数理解析研究所講究録
第342巻 1979年 19-27

連続体とshapeについて

大阪教育大学 数学 小山 晃

0、準備　連続体のhyperspacesの研究は古くからHausdorff, Vietoris, Wojdyslowskiなどによって行われていたが、Kelley [1]によってWhitney mapsを用いる手法が考案され、著しい発展をした。その後、大きな発展をみるには1970年代にまで到らねばならないが、近年、Krasinkiewicz, Nadler, Rogersなどによって新たな発展の時期をむかえている。この中で、連続体のhyperspacesの研究にshape理論を利用することは比較的少なく、児玉-Spież-渡辺[2], Krasinkiewicz [4]などだけである。そこで、ここではある種のWhitney連続体とshapeとの関係を調べる。

コンパクト距離空間Xに対して、2^Xは、Xのすべての閉部分集合から成る集合にHausdorff距離を導入した空間、$C(X)$は、Xのすべての連結な閉部分集合から成る2^Xの部分空間とする。この時、2^Xはコンパクト距離空間、$C(X)$は2^Xの閉部分空間とな

る。また、$\hat{X}=\{\{x\}\in C(X)\mid x\in X\}\subset C(X)$ と表わすと、$\hat{X}$ は X と等距離位相同型である。特に、X が連続体ならば、2^X 及び $C(X)$ は FAR ([2], [4]) であり、弧状連結 ([1]) でもある。

<u>定義</u>　$\Lambda=2^X$ または $C(X)$ とする。この時、次の条件を満たす連続写像 $\lambda:\Lambda\longrightarrow[0,+\infty)$ を Whitney map for Λ という。

(i)　任意の $x\in X$ に対して、$\lambda(\{x\})=0$

(ii)　任意の $A,B\in\Lambda$, $A\subsetneq B$ に対して、$\lambda(A)\lneq\lambda(B)$

特に、$\Lambda=2^X$ の時、$\lambda=\omega$, $\Lambda=C(X)$ の時 $\lambda=\mu$ と表わすことが多い。

X が連続体の時には、任意の Whitney map $\mu:C(X)\longrightarrow[0,+\infty)$ は monotone かつ開写像になる。よって、任意の $t\in[0,\mu(X)]$ に対して、$\mu^{-1}(t)\subset C(X)$ は $C(X)$ の部分連続体になる。このような連続体 $\mu^{-1}(t)$ $(t\in[0,\mu(X)])$ を X の Whitney 連続体という。

ここでは Krasinkiewicz によって示されているという次の結果を証明する ([6] 参照)。

<u>定理</u>　任意の S^1-like 連続体 X と任意の Whitney map $\mu:C(X)\longrightarrow[0,+\infty)$ に対して、

$$Sh(X)=Sh(\mu^{-1}(t))\quad \text{for every } t\in[0,\mu(X))$$

が成り立つ。

1. Whitney連続体の性質　定理を証明するために必要だと思われるWhitney連続体の性質を揚げておく。

補題1([4])　XがS^1-like連続体ならば、任意のWhitney map $\mu: C(X) \longrightarrow [0,+\infty)$に対して次のことが成り立つ。

(1) Xがsnake-likeならば、任意の$t \in [0,\mu(X))$に対し、$\mu^{-1}(t)$もsnake-likeである。

(2) Xがnon-snake-likeならば、任意の$t \in [0,\mu(X))$に対し、$\mu^{-1}(t)$もnon-snake-likeかつS^1-likeである。

任意の連続体Xと任意のWhitney map $\mu: C(X) \longrightarrow [0,+\infty)$に対して次のことが成り立つ。

補題2([7])　任意の$t_0 \in [0,\mu(X))$と任意の$A,B \in \mu^{-1}(t_0)$に対して、$A \cap B \neq \phi$ならば、AとBを結ぶarc α in $\mu^{-1}(t_0)$が存在する。

[7]の証明には飛躍があるが、次のように証明することができる。

証明　$A \cap B \neq \phi$だから$A \cap B$の任意の連結成分Kをとる。この時、$K \subset A \cap B$だから$\sigma_A(0)=K=\sigma_B(0)$, $\sigma_A(1)=A$, $\sigma_B(1)=B$である線分([1])

$$\sigma_A : [0,1] \longrightarrow C(A), \qquad \sigma_B : [0,1] \longrightarrow C(B)$$

が存在する。任意の $t \in [0,1]$ に対して、$\sigma_A(t) \cup \sigma_B(0) \subset A$, $\sigma_A(t) \cup \sigma_B(1) \supset B$ だから、

$$\mu(\sigma_A(t) \cup \sigma_B(0)) \leq t_0 \leq \mu(\sigma_A(t) \cup \sigma_B(1))$$

である。よって、$\mu(\sigma_A(t) \cup \sigma_B(s(t))) = t_0$ となる $s(t) \in [0,1]$ が存在する。そこで、関数 $f : [0,1] \longrightarrow C(X)$ を、

$$f(t) = \sigma_A(t) \cup \sigma_B(s(t)) \qquad \text{for every } t \in [0,1]$$

と定義する。この時 f は明らかに連続である。また、定義から $f(t) \in \mu^{-1}(t_0)$ $(t \in [0,1])$, $f(0) = B$ かつ $f(1) = A$ である。すなわち、f は B と A を結ぶ path in $\mu^{-1}(t_0)$ である。したがって、A と B を結ぶ arc α in $\mu^{-1}(t_0)$ が存在する。（証明終り）

補題2から次のことが成り立つ。

<u>系1</u>（[7]） X が弧状連結な連続体であれば、任意の Whitney map $\mu : C(X) \longrightarrow [0,+\infty)$ と任意の $t \in [0, \mu(X)]$ に対して、$\mu^{-1}(t)$ は弧状連結な連続体である。

<u>補題3</u> 任意の連続体 X から S^1 への任意の essential map $f : X \longrightarrow S^1$ は weakly confluent である。

よって、任意のS^1-like連続体Xに対して、次の条件を満たすinverse sequence $\{X_n, f_n, N\}$が存在する。

(i) $X = \varprojlim\{X_n, f_n, N\}$

(ii) おのおのの$n=1,2,\cdots$に対して、$X_n = S^1$かつ$f_n : X_{n+1} \longrightarrow X_n$はweakly confluentである。

よって、$C(X) = \varprojlim\{C(X_n), C(f_n), N\}$かつ、おのおのの$n=1,2,\cdots$に対して$f_n$によって誘導された連続写像$C(f_n) : C(X_{n+1}) \longrightarrow C(X_n)$は全射である。

ここで、任意のWhitney map $\mu : C(X) \longrightarrow [0, +\infty)$をとり、任意の$x \in X$と任意の$t \in [0, \mu(X)]$に対して、

$$C_x^t = \{A \in \mu^{-1}(t) \mid x \in A\} \subset \mu^{-1}(t)$$

と定義する。この時、上でみたことと補題2から次のことが成り立つ。

系2. 任意の$x \in X$と任意の$t \in [0, \mu(X)]$に対して、C_x^tは弧状連結である$\mu^{-1}(t)$の真部分連続体である。

2. 定理の証明　　上半連続関数について次のようなVietoris-Begle typeの定理が成り立つ。

補題4　任意の整数$n \geq 0$, X, YをコンパクトHausdorff空間

とする。この時、上半連続関数 $F: X \longrightarrow 2^Y$ について

(0) $\bigcup_{x \in X} F(x) = Y$

(1) $\check{H}^k(F(x)) = 0$ for every $x \in X$, $0 \leq k \leq n+1$

(2) $\check{H}^k(F^{-1}(y)) = 0$ for every $y \in Y$, $0 \leq k \leq n$

ただし、$\check{H}^*$ は整数群を係数群とする reduced Čech cohomology theory, $F^{-1}(y) = \{x \in X \mid y \in F(x)\} \subset X$ とする。

ならば、$F^*: \check{H}^k(Y) \longrightarrow \check{H}^k(X)$ は、$0 \leq k \leq n$ のとき、同型写像，$k = n+1$ のとき1対1準同型写像である。

<u>証明</u>. Fは上半連続だから Fのグラフ

$$G = \{(x, y) \in X \times Y \mid F(x) \ni y\} \subset X \times Y$$

は $X \times Y$ の閉部分集合である。よって、G はコンパクト Hausdorff 空間である。自然な射影写像

$$p: G \longrightarrow X, \quad q: G \longrightarrow Y$$

とする。この時、任意の $x \in X$ に対して、$p^{-1}(x) = \{x\} \times F(x)$ だから条件(1)と Vietoris-Begle の定理から p によって誘導された準同型写像 $p^*: \check{H}^k(X) \longrightarrow \check{H}^k(G)$ は $0 \leq k \leq n+1$ のとき同型写像である。そこで $0 \leq k \leq n+1$ について

$$F^* = p^{*-1} \circ q^*: \check{H}^k(Y) \longrightarrow \check{H}^k(X)$$

と定義する。また、任意の $y \in Y$ に対して、$q^{-1}(y) = F^{-1}(y) \times \{y\}$ だから条件(2)と Vietoris-Begle の定理から q によって誘導された準

同型写像 $g^*: \check{H}^k(Y) \longrightarrow \check{H}^k(G)$ は $0 \leq k \leq n$ のとき全射、$0 \leq k \leq n+1$ のとき1対1である。

したがって、F^* は $0 \leq k \leq n$ のとき、同型写像、$k = n+1$ のとき1対1準同型写像である。　(証明終り)

定理の証明　最初に X が non-snake-like である場合を考える。この時、任意の Whitney map $\mu: C(X) \longrightarrow [0, +\infty)$ と任意の $t \in [0, \mu(X))$ に対して補題1(2)より $\mu^{-1}(t)$ は non-snake-like かつ S^1-like 連続体である。そこで $t \in [0, \mu(X))$ に対して上半連続関数 $F_t: X \longrightarrow 2^{\mu^{-1}(t)}$ を

$$F_t(x) = C_x^t = \{A \in \mu^{-1}(t) \mid x \in A\} \quad \text{for every } x \in X$$

と定義する。この時 F が補題4の条件(0)を満たすことは明らかである。また、系2より任意の $x \in X$ に対して $F_t(x)$ は $\mu^{-1}(t)$ の真部分連続体である。よって、$\mu^{-1}(t)$ は S^1-like だから $F_t(x)$ は acyclic である。すなわち補題4の条件(1)を満たす。さらに任意の $A \in \mu^{-1}(t)$ に対して $F_t^{-1}(A) = A \subsetneq X$ である。よって、上と同様に $F_t^{-1}(A)$ も acyclic である。よって、補題4の条件(2)が成り立つ。よって、補題4から

$$F_t^*: \check{H}^k(\mu^{-1}(t)) \cong \check{H}^k(X) \quad \text{for every } k = 0, 1, 2, \text{------}$$

である。したがって、Mardešić-Segal [5] と同様にして

$$Sh(X) = Sh(\mu^{-1}(t)) \quad \text{for every } t \in [0, \mu(X))$$

が成り立つことがわかる。

次に X が snake-like である場合を考える。この時、任意の Whitney map $\mu : C(X) \longrightarrow [0,+\infty)$ と任意の $t \in [0,\mu(X))$ に対して補題1(1)から $\mu^{-1}(t)$ は snake-like である。また、$\mu^{-1}(\mu(X)) = \{X\}$ である。したがって

$$Sh(X) = Sh(\{*\}) = Sh(\mu^{-1}(t)) \quad \text{for every } t \in [0,\mu(X)]$$

である。

（証明終り）

この定理から任意の S^1-like 連続体 X について次のことが成り立つ。

系3　任意の Whitney map $\mu : C(X) \longrightarrow [0,+\infty)$ に対して、X が movable であればすべての Whitney 連続体 $\mu^{-1}(t)$ $(t \in [0,\mu(X)])$ も movable である。また、X が non-movable ならば $\mu^{-1}(t)$ $(t \in [0,\mu(X)))$ も non-movable である。

よって、X が movable であるための必要十分条件はある $t \in [0,\mu(X))$ に対して $\mu^{-1}(t)$ が movable であることである。

系4．任意の Whitney map $\mu : C(X) \longrightarrow [0,+\infty)$ に対して、X が planar であれば $\mu^{-1}(t)$ $(t \in [0,\mu(X)])$ も planar である。また、X が non-planar であれば $\mu^{-1}(t)$ $(t \in [0,\mu(X)))$ も non-planar である。

参考文献

[1] J.L. Kelley, Hyperspaces of a continuum, Trans. A.M.S., 52 (1942), 22-36.

[2] Y. Kodama, S. Spież and T. Watanabe, On shape of hyperspaces, Fund. Math., 100 (1978), 59-67.

[3] J. Krasinkiewicz, Certain properties of hyperspaces, Bull. Acad. Pol., 21 (1973), 705-710.

[4] ―――――――, On the hyperspaces of snake-like and circle-like continua, Fund. Math., 83 (1974), 155-164.

[5] S. Mardešić and J. Segal, Shapes of compacta and ANR-systems, ibid., 72 (1971), 41-59.

[6] S.B. Nadler, Jr., Hyperspaces of sets, Marcel Dekker, New York, 1978.

[7] J.R. Rogers, Jr., Whitney continua in the hyperspace C(X), Pacific J. Math., 58 (1975), 569-584.