

Monotone写像について.

香川大・教育 酒井克郎

1950年代における R. D. Anderson の一連の仕事のなかで証明なしに報告された結果に, D. C. Wilson が与えた証明をきっかけに, J. J. Walsh は [1][2][3] で次の美しい定理を示した。

定理1. M を 3次元以上の compact 連結 PL-多様体または compact 連結 Q-多様体, Y を compact 連結 ANR とするとき, 連続写像 $f: M \rightarrow Y$ が monotone 写像と homotopic になる必要十分条件は $f_*: \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(Y)$ が全射となることである。

定理2. M と Y を上の様にとるとき, 連続写像 $f: M \rightarrow Y$ が開写像に homotopic となる必要十分条件は, $f_*(\pi_1(M))$ が $\pi_1(Y)$ において有限指数をもつことである。

また, Walsh は [4] で monotone 写像 f の拡張に関する次の定理を示した。

定理3. M を 3次元以上の compact 連結 PL-多様体, X を

$\dim X \leq \dim M - 2$ となる閉集合, Y を compact 連結 ANR とするとき, 連続写像 $f: M \rightarrow Y$ が基本群の間の全射を導くならば, $X \cup M$ を止めて monotone 開写像に homotopic となる。

この定理を用いることにより, 定理 1 の定義域の条件は, 多少弱められる。

定理 1'、 K を 2 次元以下の主単体と cut-point をもたない連結な有限複体, Y を compact 連結 ANR とするとき, 連続写像 $f: M \rightarrow Y$ が monotone 写像に homotopic となる必要十分条件は, 基本群の間の全射を導くことである。

ここで次元に関する条件は Whyburn の本の IX, 定理 2.1 より S^2 から 2 胞体には monotone 写像が存在しないことから, また cut-point に関する条件は次の簡単な例から落せないことがわかる。

例. X を 2 つの solid torus を 1 点 x_0 でくっつけた空間とし, Y を solid torus とし, $f: X \rightarrow Y$ をそれぞれの solid torus に制限したとき位相同型となるように定義すれば, f と homotopic な写像は X の 2 つの solid torus を 1 点につぶさない。 x_0 の像を含まない Y の連結部分集合で X の 2 つの torus の像と交わるものをとれば, その逆像は連結にはならない。

任意の多面体に関しては上の簡単な系として次の形のものを得る。

定理1' X を compact 連結多面体, Y を compact 連結 ANR とするとき, 連続写像 $f: X \times I^2 \rightarrow Y$ が monotone 写像と homotopic となる必要十分条件は基本群の間の全射を導くことである。

定理1' は次の補題より簡単に導かれる。

補題. K を定理1' のようにとると, 自然な単射 $\varepsilon: K \rightarrow K \times Q$ ($\varepsilon(x) = (x, 0)$) と homotopic になるような monotone 写像が存在する。

(証明) K の1次元以上の単体 σ について, $\sigma \times Q$ が Peano 連続体であることから, ε と homotopic な写像 $f: K \rightarrow K \times Q$ で $f(\sigma) = \sigma \times Q$ となるものをまず作り, K の各主単体に対して定理3を適用して, 各主単体ごとに辺では f と同じになる monotone 写像を定義すればよい。□

定理2については, 定義域の条件を弱めることにまだ成功していない。

定理1, 2に関連して種々の写像の homotopy class の特徴づけが出来るかどうか考えらるが, monotone 写像より条件の弱い写像については, Walsh の [5] の結果から, quasi-open

写像の homotopy class は開写像の homotopy class と同じになり、従ってその特徴づけも同じになる。よって例えば、定理 1 の空間の間の confluent 写像と homotopic になるような写像は、定義域の基本群を値域の基本群の指数有限の部分群に写すような準同型写像を導くようなものにかぎること加わります。

問題 弱 confluent 写像と homotopic になる写像は何か？

また、monotone 写像より条件の強い写像として UV^m 写像とこのかあるか、その特徴づけも問題となる。ただし、

Wilson [6] によれば $2k+1$ 次元以下の compact 連結多様体から \mathbb{I}^m の UV^k-写像があれば、 m は $\dim M$ 以下となる。よって定義域の次元は k より十分高くなければならない。Walsh の証明から次の問題が起る。

問題 十分次元の高い多様体から ANR の \mathbb{R} -連結写像は、

UV^k-写像と homotopic となるか？

参考文献

- [1] Walsh, J.J. : Monotone and open mappings on manifolds
I., Trans. AMS 209 (1975) 419-432
- [2] ——— : Light open and open mappings on manifolds
II., Trans. AMS. 217 (1976) 271-284
- [3] ——— : Monotone and open mappings onto ANR's.
Proc. AMS. 60 (1976) 286-288.
- [4] ——— : Extending mappings to monotone mappings.
Houston J. Math. 3 (1977) 579-592
- [5] ——— : Isotoping mappings to open mappings,
Trans. AMS., to appear.
- [6] Wilson, D.C. : Open mappings on manifolds and a counter-
example to the Whyburn conjecture, Duke
Math. J. 40 (1973) 705-716.
- [7] Whyburn, G.T. : Analytic Topology, AMS Collog. Publ. 28.
1942.