数理解析研究所講究録
第 344 巻 1979 年 67-79

E_n型 Chevalley 群の unipotent 類

高知学園短大　水野賢三

E_n型シバリー群の unipotent 類を具体的に決めたので，その結果および計算方法を示す。G を代数閉体 K 上の単連結な E_n 型 chevalley 群とし，B をその1つの Borel 部分群，H を極大 Torus.（$\subseteq B$），U を maximal unipotent（$\subseteq B$）とする。さらに，(B, T) に関する root 系を Σ と表わす。この時，次のことが知られている。

補題1．V を U の連結部分群で H 不変なものとする。この時，$G(V)=\{gxg^{-1} \mid x \in V, g \in G\}$ は zariski closed となる。

そこで，Σ^+ の ideals 間に同値関係を，2つの ideals I, J について $I \sim J \overset{def}{\iff} G(U_I)=G(U_J)$（但し $U_I=\langle \mathfrak{X}_\alpha \mid \alpha \in I \rangle$）で定義する。補題1により，$G(U_I)$はある共役類の zariski closure になっているから，上記の同値類を調べることは，unipotent 類を決定する上で有用であるばかりでなく，その閉包の間の包

含関係を決める上でも役立つ。次に ideals の同値類を調べる方法を考える。W を Σ の Weyl 群, $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ を Σ^+ の simple roots, $\{w_1, \cdots, w_m\}$ を simple reflections とする。今 Σ^+ の部分集合 S が (r, s)-cube であるとは, 次の 1) ~ 3) を満足することと定める。

1) S の中には, 半順序"$\leq$"に関して最小のものが存在する。それを α_0 と書く。

2). $r+s+1$ 個の simple roots $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s, \delta$ が存在して, $\alpha_0+\beta_1$, $\alpha_0+\gamma_1$, $\alpha_0+\delta$, $\beta_i+\beta_{i+1}$, $(i=1,2,\cdots,r-1)$, $\gamma_j+\gamma_{j+1}$ $(j=1,2,\cdots,s-1)$ は全て Σ^+ の元となる。

3) $\widetilde{\alpha_0} = \alpha_0 + \delta + \sum_{i=1}^{r} \beta_i + \sum_{j=1}^{s} \gamma_j$ は又, root となり,

$$S = \{\alpha \in \Sigma^+ \mid \alpha_0 \leq \alpha \leq \widetilde{\alpha_0}\}.$$

(但し, 半順序"$\leq$"は $\alpha \leq \beta \overset{def}{\Longleftrightarrow} \beta - \alpha \in \sum_{i=1}^{m} (\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}) \alpha_i$ で定める)

(r, s)-cube S は定義より $\alpha_0, \beta_i, \gamma_j, \delta$ で決まるから, $S = \mathrm{Cube}(\alpha_0; \beta_1, \cdots, \beta_r; \gamma_1, \cdots, \gamma_s; \delta)$ と書き $\mathrm{Side}(S) = \{\beta_1, \cdots, \beta_r, \gamma_1, \cdots, \gamma_s, \delta\}$ とおく。ideals の間には, 次に示すいくつかのの変形方法がある。

補題 2. I を Σ^+ の ideal とする。ある $\alpha_0 \in I$ と ある simple root α_i について,

$I - \{\alpha_0\}$ ideal, $w_i(\alpha_0) > \alpha_0$,

$I = w_i(I)$, $I - \{\alpha_0, w_i(\alpha_0)\}$ ideal

ならば $I \sim I - \{\alpha_0\}$.

補題3. I を Σ^+ の ideal とし，$S = Cube(\alpha_0; \beta; \gamma; \delta) \subseteqq I$ とする。もし $I - S$ が ideal で且つ，$I = w_\beta(I) = w_\gamma(I)$ ならば $I \sim I - \{\alpha_0, \alpha_0 + \delta\}$。

補題4. I を Σ^+ の ideal とし，$S = Cube(\alpha_0; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; \delta)$ とする。もし，$I - S$ が ideal で $S - I = \{\alpha_0, \alpha_0 + \beta_1, \alpha_0 + \gamma_1, \alpha_0 + \delta\}$ 且つ，$I = w_\delta(I) = w_{\beta_2}(I) = w_{\gamma_2}(I)$ ならば $I \sim I - \{\alpha_0 + \beta_1 + \gamma_1\}$。

補題5. I を Σ^+ の ideal とし，$S = Cube(\alpha_0; \beta_1; \gamma_1, \gamma_2; \delta) \subseteqq I$ とする。もしある root ε について，ある $\alpha' \in Side(S)$ があり，

$w_{\alpha'}(\varepsilon) > \varepsilon$, $I - \{\alpha'\}$: ideal, $I - S$ ideal $\alpha' \neq \alpha_0$.

$I = w_\alpha(I)$ for $\forall \alpha \in Side(S)$

となるならば $I \sim I - \{\varepsilon, \alpha_0, \alpha_0 + \gamma_1, \alpha_0 + \delta, \alpha_0 + \beta_1\}$.

補題6. I を Σ^+ の ideal とし，S を I に含まれる Σ^+ の (2,3)-cube とする。もし，ある root $\varepsilon \in I$ について，ある $\alpha' \in Side(S)$ があって，$w_{\alpha'}(\varepsilon) > \varepsilon$, $I - \{\varepsilon\}$: ideal, $\varepsilon \neq \alpha_0$.

$I - S$ ideal. $I = w_{\alpha}(I)$. $^{\forall}\alpha \in Side(S)$ ならば

$$I \sim I - (\{\alpha \in S \mid ht(\alpha) \le ht(\alpha_0) + 2\} \cup \{\varepsilon\})$$

となる。但し、α_0 は S の最小の root とする。

補題7. $\Sigma = E_8$ とするならば α_5 で生成された ideal は $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5$, $\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$, $\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7$, $\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8$ で生成された ideal に同値である。但し Dynkin diagram を

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & - & 3 & - & 4 & - & 5 & - & 6 & - & 7 & - & 8 \\ & & & & | & & & & & & & & \\ & & & & 2 & & & & & & & & \end{array}$$

とする。

そこで補題2〜7を用いて共役類の代表元を求めていく方法を、2.3の実例を示して述べる。

$G = E_8$ とする。

第1段階. $I = \Sigma^+$ とおく。$G(U_I)$ の中で open になっている共役類 C_1 を求める(この場合は regular unipotent 全体).

第2段階. U_I の元で C_1 に入らない元を調べる。(この場合 $x = \prod x_\alpha(t_\alpha)$ と表わすと $x \ne$ regular $\Leftrightarrow t_{\alpha_1} t_{\alpha_2} \cdots t_{\alpha_8} = 0$)

第3段階. $G(U_I) = C_1 \cup G(U_{J_1}) \cup \cdots \cup G(U_{J_r})$. ($G(U_I) \supsetneqq G(U_{J_i})$) となる $J_1, \cdots, J_r$ を求める(この場合 $J_i = I - \{\alpha_i\}$).

第4段階. 補題2〜7を用いて 通 $G(U_{J_1}), \cdots, G(U_{J_r})$ の中で極大なものを求める。(この場合は補題2により $J_i \sim I - \{\alpha_3, \alpha_4\}$)

再び

オ1'段階　$I=\Sigma^{+}-\{\alpha_3,\alpha_4\}$ とおき $G(U_I)$ の中で open になっている共役類 C_2 を求める（この場合は subregular class）

オ2'段階　U_I の元で C_2 に入らないものを調べる。（この場合 $x=\prod x_\alpha(t_\alpha)\ (\in U_I)$ と表わすと　$x \neq$ subregular $\Rightarrow t_{\alpha_1} t_{\alpha_2} t_{\alpha_3+\alpha_4} t_{\alpha_5} t_{\alpha_6} t_{\alpha_7} \times t_{\alpha_8}(t_{\alpha_5} t_{\alpha_2+\alpha_4} + t_{\alpha_2} t_{\alpha_4+\alpha_5})=0$）

オ3'段階　$G(U_I)=C_2 \cup G(U_{J_1}) \cup \cdots \cup G(U_{J_r})$ となる $J_1,\cdots,J_r$ を求める。（この場合　$J_1=I(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8)$（$\alpha_1,\alpha_3,\cdots,\alpha_8$ で生成された ideal の意味）$J_2=I(\alpha_1+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_2,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8)$, $J_3=I(\alpha_1,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_2+\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8)$, $J_4=I(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8)$, $J_5=I(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8)$, $J_6=I(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_5,\alpha_7,\alpha_8)$. $J_7=I(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_8)$. $J_8=I(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7)$).

オ4'段階　補題2~7を用いて $G(U_{J_1}),\cdots,G(U_{J_r})$ の中で極大なものを求める。（この場合　$J=I(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4+\alpha_5,\alpha_5+\alpha_6,\alpha_6+\alpha_7,\alpha_8)$ とおくと $G(U_J)$ が最大）.

オ5'段階　C_2 の代表元を1つ取り，その中心化群の構造を求める．$G(U_J) \subsetneqq G(U_I)$ を調べる。

以下同様にして調べていくことによって，共役類の代表元を求めることができる。この代表元の中に重複がないかを調べるには中心化群の構造が異なることを示せば十分であるが，中心化群の構造をもとめるために，選び出された各代表元 x に

ついて、下記の1)～4)の性質をもつ4つのGの部分群 P, R, V, V_1 を見出すことを考える。

1) $P \geqq B$, $R, V, V_1 (\subseteqq U)$: Pの normal subgroup.

2) $x \in V$, $R \subseteqq R_u(P)$, $V_1 \geqq D(V)$.

3) $R(x) = x V_1$.

4). $(P/R, V/V_1)$: prehomogeneous space, $P(x)/V_1$ が open-orbit.

（但し，標数が bad の時にはいくつかの代表元については，直接計算でもとめた）。

以上の方法で得られた結果を記す。標数が大であれば，ユニポテント類の分類および中心化群の連結成分の構造は，Elkington の結果があるので，ここでもその結果に合わせて書くことにする。代表元として $x_\alpha(1)$ なるものいくつかの積で表わせるものが取れるが，しかし，2つの形の異なる元が標数が小さい時には共役でなくても，標数が大であれば共役となる場合がある。その様な時には，中心化群の次元が標数に無関係になるものを（標数が大なる時に対応する）正則部分代数の形で表わし，標数 p で次元が小さくなるものを添字 p を付けて表わすこととする。以下の表では，この型を第1列に記し，第2列には，中心化群のその連結成分による剰余群

の構造を、第3列には、中心化群の連結成分の Reductive part $(= Z_G(x)^\circ / R_u(Z_G(x)^\circ))$ の型，第4列には中心化群の根基の次元を記す。

E_7 のユニポテント類（単連結の場合）

E_7	$Z_{2(6,p)}$	0	7
$E_7(a_1)$	Z_2	0	9
$E_7(a_2)$	Z_2	0	11
D_6+A_1	$Z_2 \times Z_{(2,p-1)}$	0	13
E_6	$Z_{(6,p)}$	A_1	10
$E_6(a_1)$	Z_2	T_1	14
D_6	Z_2	A_1	12
$D_6(a_1)+A_1$	$Z_{(2,p-1)}$	0	17
A_6	$Z_{(2,p)}$	$\begin{cases} T_1 & (p=2) \\ A_1 & (p\neq 2) \end{cases}$	$\begin{cases} 18 & (p=2) \\ 16 & (p\neq 2) \end{cases}$
$D_6(a_1)$	Z_2	A_1	16
D_5+A_1	Z_2	A_1	16
$D_6(a_2)+A_1$	$S_3 \times Z_{(2,p-1)}$	0	21
D_5	$Z_{(2,p)}$	$2A_1$	15
$(A_5+A_1)'$	Z_2	A_1	20
$(A_5+A_1)''$	$Z_{(2,p-1)}$	A_1	22

$D_6(a_2)$	$Z_{(2,p-1)}$	A_1	20
A_5'	1	$2A_1$	19
$D_5(a_1)+A_1$	$Z_{(2,p-1)}$	A_1	22
A_5''	$Z_{(2,p-1)}$	G_2	17
A_4+A_2	1	A_1	24
$D_5(a_1)$	Z_2	T_1+A_1	23
A_4	Z_2	T_1+A_2	24
A_4+A_1	Z_2	$2T_1$	27
D_4+A_1	Z_2	B_2	21
$A_3+A_2+A_1$	$Z_{(2,p-1)}$	A_1	30
A_3+A_2	$Z_{(2,p-1)}$	$\begin{cases} T_1+A_1 & (p\neq 2) \\ A_1 & (p=2) \end{cases}$	31 $(p\neq 2)$ 32 $(p=2)$
$(A_3+A_2)_2$	1	$2A_1$	31
D_4	$Z_{(2,p)}$	C_3	16
$D_4(a_1)+A_1$	$Z_2\times Z_{(2,p-1)}$	$2A_1$	31
$D_4(a_1)$	S_3	$3A_1$	30
A_3+2A_1	$Z_{(2,p-1)}$	$2A_1$	33
$(A_3+A_1)'$	1	$3A_1$	32
$(A_3+A_1)''$	$Z_{(2,p-1)}$	B_3	26
A_3	1	A_1+B_3	25
$2A_2+A_1$	1	$2A_1$	37

$2A_2$	1	A_1+G_2	32
A_2+3A_1	$Z_{(2,p-1)}$	G_2	35
A_2+2A_1	1	$3A_1$	42
A_2+A_1	Z_2	T_1+A_3	41
A_2	Z_2	A_5	32
$4A_1$	$Z_{(2,p-1)}$	C_3	42
$(3A_1)'$	1	A_1+C_3	45
$(3A_1)''$	$Z_{(2,p-1)}$	F_4	27
$2A_1$	1	A_1+B_4	42
A_1	1	D_6	33
ϕ	1	E_7	0

E_8のユニポテント類

E_8	$Z_{(60,p^2)}$	0	8
$E_8(a_1)$	$Z_{(12,p^2)}$	0	10
$E_8(a_2)$	$Z_{(4,p^2)}$	0	12
E_7+A_1	$Z_2\times Z_{(6,p)}$	0	14
E_7	$Z_{(12,p^2)}$	A_1	13
D_8	Z_2	0	16
$E_7(a_1)+A_1$	Z_2	0	18
$E_7(a_1)$	$Z_{(2,p)}$	A_1	17

$D_8(a_1)$	$\begin{cases} Z_2 & (p\neq 2) \\ D_8 & (p=2) \end{cases}$	0	20
$E_7(a_2)+A_1$	$S_3 \times Z_{(2,p)}$	0	22
D_7	$Z_{(2,p)}$	A_1	19
$E_7(a_2)$	$Z_{(2,p)}$	A_1	21
A_8	S_3	0	24
E_6+A_1	$Z_{(6,p)}$	A_1	23
$D_7(a_1)$	$\begin{cases} Z_2 & (p\neq 2) \\ 1 & (p=2) \end{cases}$	$\begin{cases} T_1 & (p\neq 2) \\ 0 & (p=2) \end{cases}$	$\begin{cases} 25 & (p\neq 2) \\ 26 & (p=2) \end{cases}$
$(D_7(a_1))_2$	Z_2 $(p=2)$	A_1 $(p=2)$	25 $(p=2)$
E_6	$Z_{(6,p)}$	G_2	18
$D_8(a_3)$	$\begin{cases} S_3 & (p\neq 3) \\ Z_2 & (p=3) \end{cases}$	0	28
D_6+A_1	Z_2	A_1	25
A_7	1	$\begin{cases} A_1 & (p\neq 3) \\ 0 & (p=3) \end{cases}$	27 $(p\neq 3)$ 30 $(p=3)$
$(A_7)_3$	1 $(p=3)$	A_1 $(p=3)$	29 $(p=3)$
$E_6(a_1)+A_1$	Z_2	T_1	29
D_6	$Z_{(2,p)}$	B_2	22
$D_7(a_2)$	Z_2	T_1	31
$E_6(a_1)$	Z_2	A_2	26

$D_5 + A_2$	$\begin{cases} Z_2 & (p \neq 2) \\ 1 & (p = 2) \end{cases}$	$\begin{cases} T_1 & (p \neq 2) \\ 0 & (p = 2) \end{cases}$	$\begin{cases} 33 & (p \neq 2) \\ 34 & (p = 2) \end{cases}$
$(D_5 + A_2)_2$	$Z_2 \ (p = 2)$	$A_1 \ (p = 2)$	$33 \ (p = 2)$
$A_6 + A_1$	1	A_1	33
$D_6(a_1) + A_1$	$Z_{(2, p-1)}$	A_1	33
$D_6(a_1)$	$Z_2 \times Z_{(2,p)}$	$2A_1$	32
A_6	$Z_{(2,p)}$	$\begin{cases} 2A_1 & (p \neq 2) \\ T_1 + A_1 & (p = 2) \end{cases}$	$\begin{cases} 32 & (p \neq 2) \\ 34 & (p = 2) \end{cases}$
$D_5 + A_1$	$Z_{(2,p)}$	$2A_1$	34
$2A_4$	S_5	0	40
$A_5 + A_2$	S_3	A_1	39
$A_5 + 2A_1$	Z_2	A_1	41
$D_6(a_2)$	Z_2	$2A_1$	38
D_5	$Z_{(2,p)}$	B_3	27
$D_5(a_1) + A_2$	1	A_1	43
$(A_5 + A_1)'$	1	$2A_1$	40
$(A_5 + A_1)''$	Z_2	G_2	36
$D_4 + A_2$	Z_2	$\begin{cases} A_2 & (p \neq 2) \\ A_1 & (p = 2) \end{cases}$	$\begin{cases} 42 & (p \neq 2) \\ 47 & (p = 2) \end{cases}$
$(D_4 + A_2)_2$	$Z_2 \ (p = 2)$	$G_2 \ (p = 2)$	$42 \ (p = 2)$
$A_4 + A_3$	1	A_1	45

A_5	1	A_1+G_2	35
$D_5(a_1)+A_1$	1	$2A_1$	46
$A_4+A_2+A_1$	1	A_1	49
A_4+A_2	1	$2A_1$	48
$D_5(a_1)$	Z_2	A_3	43
D_4+A_1	$Z_{(2,p)}$	C_3	43
A_4+2A_1	Z_2	T_1+A_1	52
D_4	$Z_{(2,p)}$	F_4	28
A_4+A_1	Z_2	T_1+A_2	51
$2A_3$	1	B_2	50
A_4	Z_2	A_4	44
$D_4(a_1)+A_2$	Z_2	A_2	56
$A_3+A_2+A_1$	1	$2A_1$	60
A_3+A_2	$Z_{(2,p-1)}$	$\begin{cases} T_1+B_2 & (p\neq 2) \\ B_2 & (p=2) \end{cases}$	$\begin{cases} 59 & (p\neq 2) \\ 60 & (p=2) \end{cases}$
$(A_3+A_2)_2$	$1 \quad (p=2)$	$A_1+B_2 \quad (p=2)$	$59 \quad (p=2)$
$D_4(a_1)+A_1$	S_3	$3A_1$	63
A_3+2A_1	1	A_1+B_2	63
$D_4(a_1)$	S_3	D_4	54
$2A_2+2A_1$	1	B_2	70
A_3+A_1	1	A_1+B_3	60

$2A_2+A_1$	1	A_1+G_2	69
A_3	1	B_5	45
$2A_2$	Z_2	$2G_2$	64
A_2+3A_1	1	A_1+G_2	77
A_2+2A_1	1	A_1+B_3	78
A_2+A_1	Z_2	A_5	77
$4A_1$	1	C_4	84
A_2	Z_2	E_6	56
$3A_1$	1	A_1+F_4	81
$2A_1$	1	B_6	78
A_1	1	E_7	57
ϕ	1	E_8	0

但し. T_1 は 1次元 torus とする。