数理解析研究所講究録
第344巻 1979年 106-111

ある種の標準部分群を持つ群

東大 教養　五味健作
筑波大数系　宮本 泉
東大 理　山田裕理

Aschbacher の定理 [1] により成分型の単純群の分類は Thompson の B-conjecture を証明することおよび次の問題を解くことに帰着される。

標準部分群問題. 群 G は標準部分群 L で $L/Z(L)$ が既知の単純群と同型であるようなものを持つと仮定する。このとき L の G における normal closure $\langle L^G \rangle$ を決定せよ。

この問題の背景については鈴木通夫氏による最近の本 [9] に詳しい。以下 L をある群 G の標準部分群とする。さて，標準部分群を持つ群 G は一般にかなり限られた形をしている。

定理 (Aschbacher). $O(G)=1$ と仮定すると次の (1), (2), (3) のいずれかが起こる。

(1) $L \lhd G$.

(2) $\langle L^G \rangle = F^*(G)$ で $F^*(G)$ は単純群.

(3) $\langle L^G \rangle = F^*(G) \cong L \times L$, $|C_G(L)| = 2$, かつ L は単純群。

すでに標準部分群問題については多くの結果が知られている。特に Aschbacher-Seitz [3] と Aschbacher [2] とにより $C_G(L)$ の Sylow 2-部分群が巡回群である場合だけを考えれば十分である。ここでは最近得られた次の定理を報告する。

定理. $L/Z(L) \cong PSU_6(2)$ で $Z(L)$ は奇数位数とする。さらに $C_G(L)$ の Sylow 2-部分群は巡回群で $LO(G) \ntrianglelefteq G$ と仮定する。このとき $\langle L^G \rangle$ は次のいずれかに同型である: $PSL_6(4)$, $SL_6(4)$, $PSU_6(2) \times PSU_6(2)$, $SU_6(2) * SU_6(2)$.

以下この定理の証明の概略を述べる。ユニタリ群 $PSU_6(2)$ の Schur multiplier は知られているが, それにより定理の仮定のもとでは L は $PSU_6(2)$ または $SU_6(2)$ に同型である。証明は両方の場合に共通にできる。これはほとんどの議論が 2-local なものであることによる。さて $C_G(L)$ の中のある involution t をとり $H = C_G(t)$ とおく。仮定により $L \trianglelefteq H$ となることに注意する。S を L のある Sylow 2-部分群とする。S の位数は 2^{15} である。M_1 を L の極大 2-local 部分群で $N_L(S)$ を含みか

つ $A_1 = O_2(M_1)$ が位数 2^9 の extra-special 群となるものとする。A_2 を S の唯一の位数 2^9 の基本可換部分群とし $M_2 = N_L(A_2)$ とおく。したがって M_2 も $N_L(S)$ を含む L の極大 2-local 部分群である。まず Glauberman の Z^*-theorem を使って t が $A_2\langle t\rangle$ の中に fuse することを示す。T を $C_H(L)$ のある Sylow 2-部分群とする。$H/C_H(L)$ は L の自己同型群のある部分群に同型であるが，L の自己同型群の性質から A_2T が ST を含む H の Sylow 2-部分群の中で G に関して weakly closed であることがわかり，これから $t^{N(A_2T)} \cap A_2T \neq \{t\}$ を得る。仮定により T は巡回群だから $T = \langle t\rangle$ となり特に $C_H(L) = \langle t\rangle \times O(H)$ を得る。また $\langle t\rangle$ が $C_G(L)$ の Sylow 2-部分群であることもわかる。さて $N_L(A_2)$ は $A_2^{\#}$ 上 3 個の orbits を持つ。長さはそれぞれ 21, 210, 280 である。このことを使って $t^{N(A_2\langle t\rangle)} = A_2t$ を示す。これにより $|N(A_2\langle t\rangle)| = 2^9 \cdot |N_H(A_2)|$ となるが，さらに置換群 $(N(A_2\langle t\rangle)/C(A_2\langle t\rangle),\ A_2t)$ が regular normal subgroup を持つことが証明できる。$C(A_2\langle t\rangle) = A_2 \times O(H)$ だから $C_2 = O_2(N(A_2\langle t\rangle))$ とおくとこれから $N(A_2\langle t\rangle) = N_H(A_2)C_2$ と $H \cap C_2 = A_2\langle t\rangle$ が得られる。特に $|C_2| = 2^{19}$ である。ここでは 2-local 部分群 $N(A_2\langle t\rangle)$ を調べて大きい 2-部分群 C_2 を得たが，このような方法は "pushing up" process と呼ばれているものである。同様の議論を繰り返して $C_{D_i}(t) = A_i$ となる M_i-invariant な

位数 2^{18} の部分群 D_i, $i=1,2$ を構成する。また $C_2=D_2\langle t\rangle$ で D_2 は基本可換群である。さて L の 3-element e で $K_0=C_L(e)'$ が $PSU_4(2)$ と同型なものが存在する。さらに K_0 が $C_G(e)$ の標準部分群でかつ $\langle t\rangle$ が $C_G(e)\cap C(K_0)$ の Sylow 2-部分群となることが示される。よって Gomi [4] により $C_G(e)$ の構造がわかる。この事実は部分群 D_1, D_2 を構成する際に重要である。同じく [4] を使って $N_1/D_1=E(N_G(D_1)/D_1)$ の形を決めることができる。$N_1/D_1 \cong PSL_4(4)$ or $PSU_4(2)\times PSU_4(2)$ である。$N_2/D_2=E(N_G(D_2)/D_2)$ の形を決めるには Seitz [7] を使う。$N_2/D_2 \cong PSL_3(4)\times PSL_3(4)$ or $SL_3(4) * SL_3(4)$ である。また $C_{N_1}(t)=M_1'$ と $C_{N_2}(t)=M_2$ もわかる。さらに N_1 と N_2 とに共通な Sylow 2-部分群 P で $C_P(t)=S$ となるものが存在することが示される。この P が実は $\langle L^G\rangle$ の Sylow 2-部分群となることが後でわかる。ここの論法からもわかるように標準部分群問題を解く方法はかなり帰納的である。

次に N_1 と N_2 で生成される部分群 $G_0=\langle N_1, N_2\rangle$ を考察する。Gomi [5] と同様の方法を使って群 G_0 が半単純群で $G_0/Z(G_0)$ が $PSL_6(4)$ または $PSU_6(2)\times PSU_6(2)$ と同型でかつ P が G_0 の Sylow 2-部分群であることが示される。また $\langle t\rangle$ は $C_G(L)$ の Sylow 2-部分群であったが，G_0 は $L=\langle M_1', M_2\rangle$ を含むので $N_G(G_0)\cap C_G(L) \rhd C_G(G_0)$，特に $C_G(G_0)$ は奇数位数である。したがって $Z(G_0)$ も

奇数位数で，Schur multiplier を見ることにより G_0 の形が決定される。実は N_1 と N_2 はともに $PSL_6(4)$ あるいは $PSU_6(2)\times PSU_6(2)$ のある極大 2-local 部分群の essential な部分に相当している。また D_2 は P の唯一の位数 2^{18} の基本可換部分群となる。

最後に $\langle L^G\rangle = G_0$ を証明するのであるが，このためには標準部分群を持つ群の一般論により G_0 が G の正規部分群であることを示せば十分である。まず $X = O^2(G)$ とおき Thompson fusion lemma を使って P が X の Sylow 2-部分群であることを示す。これがわかると $G_0/Z(G_0)\cong PSL_6(4)$ の場合は McBride [6] により $G_0 \lhd G$ を得る。$G_0/Z(G_0)\cong PSU_6(2)\times PSU_6(2)$ の場合は Shult [8] による次の定理を使って $G_0\lhd G$ を証明する。

定理 (Shult). S_1, S_2 をある群 X の triangular sets で $S_1\cap S_2 = \phi$ なるものとする。このとき $[\langle S_1\rangle, \langle S_2\rangle] \le O(X)$.

ここで群 X の involutions から成るある subset D が triangular set であるとは $D = D^X$ かつ任意の $a, b\in D$, $ab = ba \ne 1$ に対し $ab\in D$ が成立することである。

参考文献

1. M. Aschbacher, On finite groups of component type, Ill.

J. Math. 19 (1975), 87–115.

2. M. Aschbacher, A characterization of Chevalley groups over fields of odd order, Annals Math. 106 (1977), 353–468.

3. M. Aschbacher and G. Seitz, On groups with a standard component of known type, Osaka J. Math. 13 (1976), 439–482.

4. K. Gomi, Finite groups with a standard subgroup isomorphic to $PSU(4,2)$,

5. K. Gomi, Standard subgroups of type $Sp_6(2)$, I.

7. G. Seitz, Standard subgroups of type $L_n(2^a)$, J. Algebra 48 (1977), 417–438.

6. P. McBride, A classification of groups of type $A_n(q)$ for $n \geq 3$ and $q = 2^k \geq 4$, J. Algebra 46 (1977), 220–267.

8. E. Shult, Disjoint triangular sets, to appear.

9. 鈴木通夫, 群論, 下, 岩波書店, 1978.