数理解析研究所講究録
第 345 巻 1979 年 61-63

A multivariate analogue of the one-sided test についての一注意

九大 理　工藤昭夫
笹渕祥一

$Y=(Y_1,\ldots,Y_p)'$ は、平均 $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_p)'$、分散行列 $\sigma^2 I_p$ の p 次元正規分布に従う確率ベクトル、$A=(a_1,\ldots,a_k)'$ を $k\times p$ 既知行列として、次の検定問題を考える。

$$\begin{cases} \text{帰無仮説 } H: & a_i'\theta=0,\ i=1,\ldots,k \\ \text{対立仮説 } K: & a_i'\theta\geqq 0,\ i=1,\ldots,k \text{ 少くとも1つ}\neq\text{。} \end{cases}$$

σ^2 が既知の場合については、工藤が Biometrika (1963) 九大紀要 (1975) で発表した。σ^2 が未知で、σ^2 の推定量 $\hat{\sigma}^2$ ($\hat{\sigma}^2$ は Y と独立で、$m\hat{\sigma}^2/\sigma^2$ は χ^2_m 分布に従う) が存在する場合の笹渕の結果 (1978年4月 日本数学会) は Shorack, A.M.S. (1967) の拡張である。

ここでは、σ^2 が未知で、前記のような $\hat{\sigma}^2$ が存在しない場合を考える。以後、$k\geqq p$ で、$a_1,\ldots,a_k$ の中のどの p 個の組も1次独立であるとする。($k<p$ の場合は、$k=p$ の場合に帰着される。)

$a_i'\theta \geqq 0$ ($i=1,\ldots,k$) なる条件下で $\|Y-\theta\|^2$ を最小にする θ を $\hat{Y}$ と書くと、尤度比検定の統計量は $\bar{E}^2 = \|\hat{Y}\|^2/\|Y\|^2$ で、棄却域は $\bar{E}^2 \geqq c$ ($0 \leqq c \leqq 1$) で与えられる。

H の下での $\bar{E}^2$ の分布は次で与えられる。

$$\Pr\{\bar{E}^2 \geqq c\} \qquad (0 < c < 1)$$

$$= \sum_{\substack{\phi \subsetneqq M \subsetneqq K \\ \mathcal{J}_M \neq \phi}} P(\Lambda_M^{-1}) P(\Lambda_{K-M:M}) \Pr\left\{ B_{\frac{k-n(M)}{2}, \frac{n(M)}{2}} \geqq c \right\}$$

$$+ \Pr\{a_i'Y > 0,\ i=1,\ldots,k\}$$

$$\Pr\{\bar{E}^2 = 1\} = \Pr\{a_i'Y > 0,\ i=1,\ldots,k\} = P(\Lambda_K)$$

$$\Pr\{\bar{E}^2 = 0\} = \Pr\{\hat{Y} = 0\} = 1 - \sum P(\Lambda_M^{-1}) P(\Lambda_{K-M:M})$$

ここで、M は $K=\{1,\ldots,k\}$ の部分集合、Λ_M は $a_i'Y$; $i \in M$ の分散行列、$\Lambda_{K-M:M}$ は $a_i'Y$; $i \in M$ を固定した時の $a_j'Y$: $j \in K-M$ の条件付分散行列、$\mathcal{J}_M = \{y : a_i'y = 0,\ i \in M,\ a_j'y > 0,\ j \in K-M\}$

$P(\Sigma)$ は $N(0, \Sigma)$ に従う確率ベクトルが正象限に入る確率。

$\Pr\{a_i'Y > 0,\ i=1,\ldots,k\} < \alpha$ の場合には、有意水準の検定が可能である。次の例は検定可能な場合である。

例1　H_1 : $\theta_1 = \cdots = \theta_p = 0$,　$H_1 \cup K_1$: $\theta_1 \geqq 0, \ldots, \theta_p \geqq 0$

$$\Pr\{Y_1 > 0, \ldots, Y_p > 0\} = \frac{1}{2^p} < 0.05, \quad \text{if } p \geqq 5$$

例2　H_2 : $\theta_1 = \cdots = \theta_p$,　$H_2 \cup K$: $\theta_1 \leqq \cdots \leqq \theta_p$

$$\Pr\{Y_1 < \cdots < Y_p\} = \frac{1}{p!} < 0.05 \quad \text{if } p \geqq 4$$

例3　H_3 : $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$,　$H_3 \cup K_3$: $\theta_1 \geqq 0, \theta_2 \geqq 0, \theta_3 \geqq \theta_1 + \theta_2$

$$\Pr\{Y_1 > 0,\ Y_2 > 0,\ Y_3 > Y_1 + Y_2\} = 0.027$$

例1　では

$$\bar{E}^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ Y_i>0}}^{p} Y_i^2 \Big/ \sum_{i=1}^{p} Y_i^2$$

である。

例2　では

$$\bar{E}^2 = \sum_{i=1}^{p} (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \Big/ \sum_{i=1}^{p} (Y_i - \bar{Y})^2$$

ただし　$\bar{Y} = \sum_{i=1}^{p} Y_i / p$，$(\hat{Y}_1, \ldots, \hat{Y}_p)$は Pool Adjacent Violators の Algorithm により計算される $(\theta_1, \ldots, \theta_p)$ の最尤推定値である。例2の数値例を示す。

$(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5)$	$(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}_3, \hat{Y}_4, \hat{Y}_5)$	$\bar{E}^2$	P値
(1, 2, 3, 4, 5)	(1, 2, 3, 4, 5)	1	0.00833
(1, 2, 3.6, 3.4, 5)	(1, 2, 3.5, 3.5, 5)	0.9976	0.01397
(1, 2, 3.7, 3.3, 5)	(1, 2, 3.5, 3.5, 5)	0.9916	0.02063

参考文献

R. E. Barlow, D. J. Bartholomew, J. M. Bremner and H. D. Brunk(1972) : Statistical Inference under Order Restrictions. The Theory and Application of Isotonic Regression. John Wiley & Sons.