

Poincaré 予想に関する Computer 実験  
(反例を求めて)

東工大 理 森川 治

Def. 1 Poincaré 予想 (3次元)

$W$ : closed 3-mfd

$\pi_1(W) = \text{trivial} \implies W = S^3$

この問題に対して、mfdを2つの Solid torus  $L, H$  に分解する Heegaard 分解を用いて、コンピュータ実験を行なった。

Def. 2  $W = L \cup_f H$  :  $W$  の Heegaard 分解

$\iff L, H$ : Solid torus

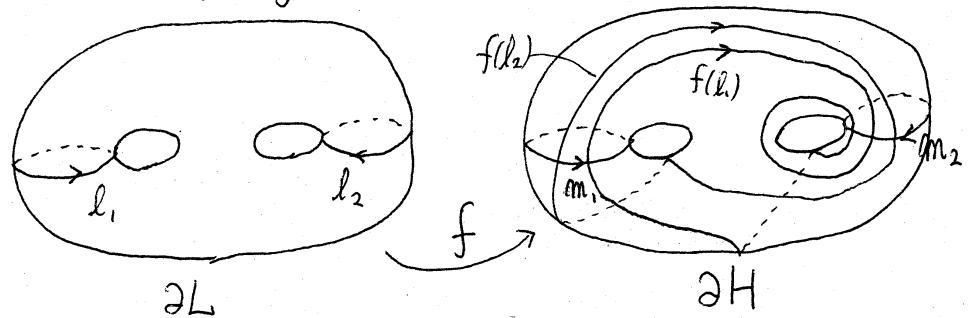
$f: 2L \rightarrow 2H$  homeo

$L, H$  が genus 1 のとき予想は正しいことが知られているので、ここでは genus 2 の場合について論ずる。

Def. 2 より、 $W$  を論じることは、 $f: 2L \rightarrow 2H$  を論じればよい

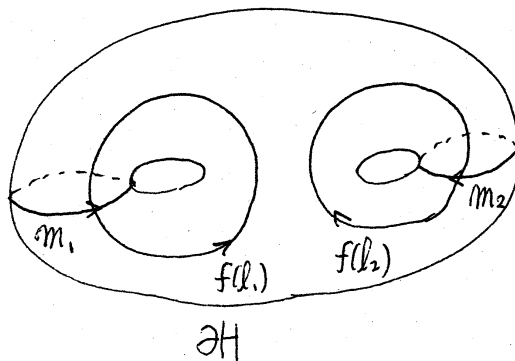
ことがわかる。さらに、 $f$  は  $\partial H$  の meridian が、 $\partial L$  の meridian とどのように交わっているかによって決定される。

Def. 3  $\partial L$  の meridian  $l_i$  の  $f$  による像  $f(l_i) \in \partial H$  を longitude と呼ぶ。 $\partial H$  の meridian, longitude を合せて  $m$ - $l$ 系 と呼ぶ。



すなわち、manifold  $W$  は、 $m$ - $l$ 系により決定される。

Def. 4  $m$ - $l$ 系の標準型を下図のように定義する。



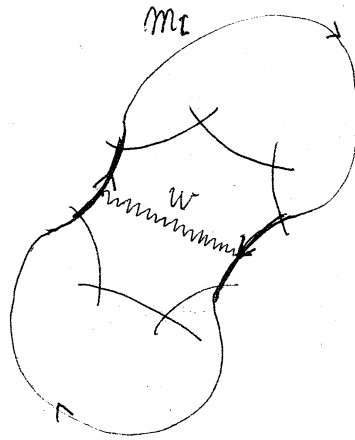
Def. 5  $m$ - $l$ 系が reducible である

$\iff$   $m$ - $l$ 系によって分解された  $\partial H$  の面の中に、Wasse  $W$  をとることが可能な面が含まれる。すなわち、その面の周囲を形作る辺の中に、同じ  $m_i$ , 又は  $f(l_i)$  が同じ向きに面してい

るペアが存在する。

• wave  $W$  による reduction

例えば右図のように、 $m_i$  が  $W$  により2つのループ  $m'_i, m''_i$  に分解されたとする。このとき、 $m_2$  に homolog でない方の  $m'_i$  (又は  $m''_i$ ) を  $m_i$  の代りにして新しい  $m$ -l 系を作る。明らかに、この操作により交点数は減少する。



Th. 1 (本間, 高橋元男, 落合)

$S^3$  の  $m$ -l 系が、標準型でない

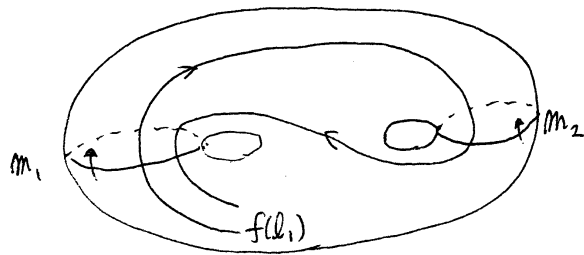
$\implies$   $m$ -l 系は reducible

よって reducible でない、すなわち reduced な  $m$ -l 系をもつ 3-mfd  $W$  で、 $\pi_1(W) = \text{trivial}$  なものが存在すれば、Poincaré 予想の反例となる。

Th. 2  $W$ : closed 3-mfd

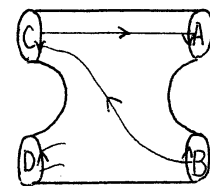
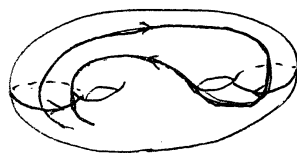
$\pi_1(W) = \{ m_1, m_2; \hat{l}_1, \hat{l}_2 \}$  と表わせる。

ただし、 $\hat{l}_i$  は、 $f(\hat{l}_i)$  にそって  $m_1, m_2$  との交わりを表わす word である。



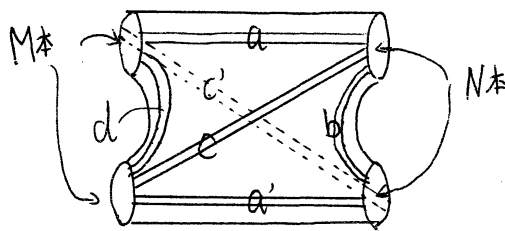
$$\hat{l}_1 = \dots m_1 m_2^{-1} m_1^{-1} \dots$$

Th. 3 reduced な  $m$ - $l$  系は、次の2つの type に分類される。

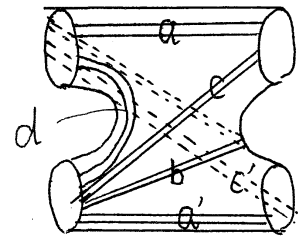


とした場合.

type 1



type 2



このとき、 $a, b, c, d$  は本数を表わす。又、簡単な計算により、 $a = a', c = c'$  が求まる。

すなわち、コンピュータを用いて、

$m_1, m_2$  との交点数  $M, N$  を指定してやり、その条件下で、可能な type 1, type 2 の  $m$ - $l$  系を作る。その中で、reduced な  $\pi_1(W)$  の trivial なものを見つける。もし見つければ、反例である。

Th. 4  $\pi_1(W) : \text{trivial} \implies H_1(W) = \pi_1(W) / [m_1, m_2] : \text{trivial}$   
 $H_1(W) : \text{trivial} \iff$  次のような matrix  $C$  が  $\det C = \pm 1$

$C = (C_{ij})$ ,  $C_{ij} : \hat{l}_i$  の中の  $m_j$  のべき数の和

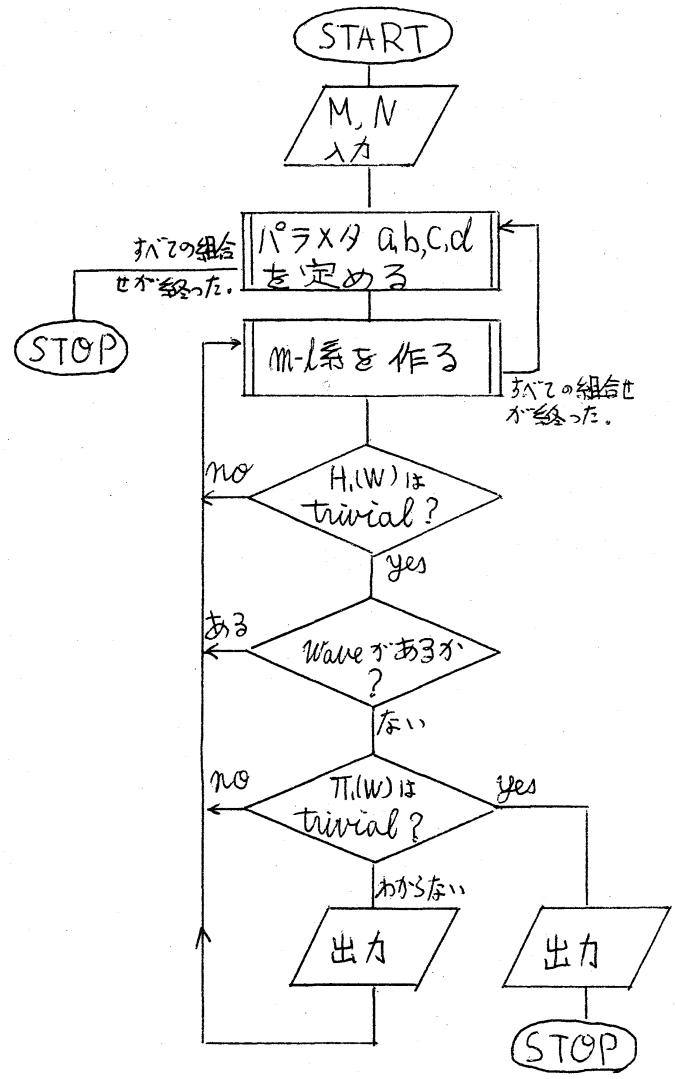
(例  $\hat{l}_1 = m_1^3 m_2^{-3} m_1^{-1} m_2^4$   
 $\hat{l}_2 = m_1 m_2^2$   $\implies C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ )

$\pi_1(W)$  の triviality は、  
 判定が難しいので、  
 Th.4より、先ず  $H_1(W)$  の  
 triviality を判定を行な  
 った。よって流れ図は  
 右図のようになった。

以降プログラムにそ  
 って説明を行なってゆ  
 くが、その前に私の使  
 用した言語 RATFOR  
 (Rational FORTRAN) に  
 ついて簡単に述べる。

・RATFOR はベル研究

所で作成された拡張 FORTRAN 言語であり、次の点が改良され  
 ている。



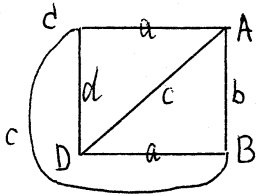
- (1) 文のブロック化 ----- { } でくる。(カードパンチに { } がなかったので、私は  $\backslash$  (半) で代用した。)
- このため、if のうしろに、2つ以上の文を実行させることが可能になる。又、DO ループのための文番号が不要となる。
- (2) "else" が書ける ---- if の条件の成立たない時実行。さらに、DO ループの他に、while ループ, repeat ループ, for ループを付加。
- (3) while(条件) 文 ---- 条件が成立っている間実行。
- (4) repeat 文  
until (条件) ----- 条件が成立つまで実行。(until は省略可)
- (5) for (初期値; 条件; 更新) ---- DO ループとほとんど同じだが、条件が成立たないと1回も実行しない。
- (6) break ----- 現在いるループから外へ出る。  
next ----- 現在いるループの次の回へ行く。
- (7) .GT., .GE., .EQ., .NE., .LE., .LT., .AND., .OR. の代りに、  
<, <=, ==, !=, >=, >, &, | が使える。
- (8) 書式が Free Format となる。又、"#" のうしろは注釈となる。";" で区切れば、1枚のカードに2つ以上の文が書ける。
- (9) Define (名前, 置換文字列) ---- 以降"名前"は

“置換文字列”となる。

RATFOR については以上ですが、詳しくは、“Software Tools”  
-1, 又、原プログラムは Addison-Wesley 社より購入できます。

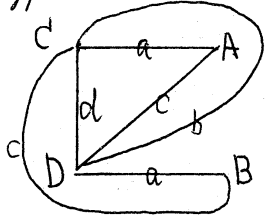
○ パラメータ  $a, b, c, d$  を定める。(参. プログラム P1, l36~  
41, l51~55)

type 1 について。(簡略化して、Whitelead graph で書く)



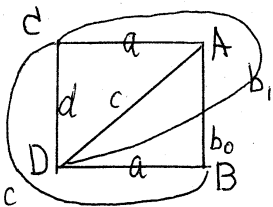
graph の対称性より、 $a \leq c$ ,  
 $b \leq d$  と仮定した。

type 2 について。



type 1 と同様に、 $a \leq c$ ,  $b \leq d$   
さらに  $a \neq 0$  ( $a=0$  ならば、wave  
が存在する。),  $b \neq 0$  ( $b=0$  ならば  
type 1 に含まれる。) と仮定した。

コンピュータに2つの graph を記憶させるのは大変なので、  
次の graph を考えた。(P3. l11~22)



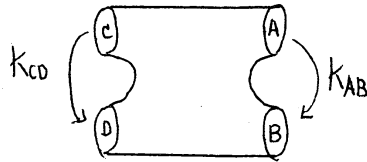
よって、パラメータは実際には、 $a, b_0$ ,  
 $b_1, c, d$  の5つを定めることになっ  
た。さらに仮定より  $N \leq M$  とした。

type 1  $\Rightarrow b_1 = 0$

type 2  $\Rightarrow b_0 = 0$

①  $m$ - $l$ 系を作る。(P3. l30~41)

出来上がった Whitehead graph の頂点  $A$  と  $B$ ,  $C$  と  $D$  を貼合  
 わせて、頂度 2 の closed loop をつくればよい。



②  $H(W)$  の triviality の判定。(P3. l42~47)

Th.4 より、matrix  $C$  を作り、 $\det C$  を求めればよい。

③ wave の有無。(P3. l49~52)

1). 10 辺形以上があれば、必ず wave が meridian 系に存在す  
 る。よって 4, 6, 8 辺形について考えればよい。

2). 1 つの meridian をはさんで wave がある場合

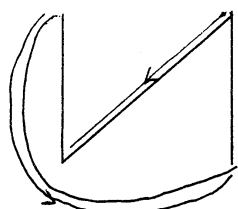


$\hat{m}_i$  の word を作ってみると、annihilation  
 部分がある。(P9. l5~l10)

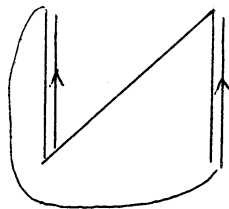
3). 2 つの meridian をはさんで wave がある場合。(8 辺形)

type 1 について、

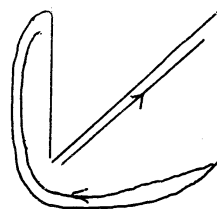
$a=0$  のとき



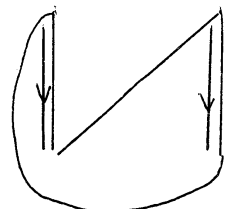
Case 1.1



1.2



1.3

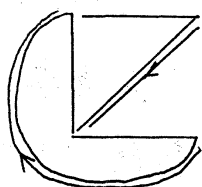


1.4

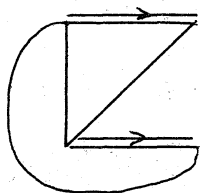


genus 2 の場合、対称性により case 1.3 と 1.1, 1.4 と 1.2 は同値となる。よって case 1.1, 1.2 を調べる。(P9. l17~20)

$b=0$  のとき



1.5



1.6

(P9. l12~15)

type 2 について、8 辺形は出来ない。

◎  $\pi_1(W)$  の triviality の判定。(P3 l54~56)

Th.5 次の条件を満たす有限決定性オートマトンが存在すれば、群は trivial ではない。

1. 各状態  $P$  に対し、 $\lambda$  列として relation  $V_i$  を与えると、再び  $P$  となる。

$$2. P \xrightarrow{x} Q \iff Q \xrightarrow{x^{-1}} P$$

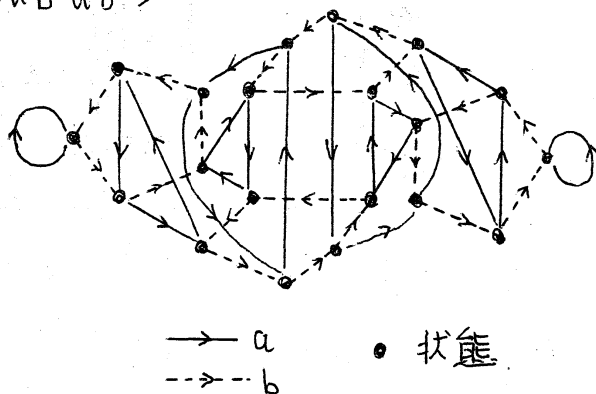
3. 状態数は、2 以上である。

例. 群  $G = \langle a, b; r_1 = a^3 b^5, r_2 = a b^{-1} a b^4 \rangle$

に対し右図のオートマトン

が条件 1, 2, 3 を満たしていることは明らかである。よ

って  $G \neq \text{trivial}$ 。



よってこのようなオートマトンが見つければ、群が *trivial* でないことが判断できる。又、このオートマトンを見つかる  
ときに、何の条件も付加せずに、すなわち元の結合以外では、  
再び状態  $P$  にもどらないようにしてオートマトンを作って、  
状態数が 1 となったら、群が *trivial* であると判断できる。今  
回は状態数を 300 ( $= \text{MAXK}0, P10, l9$ ) までのオートマトンを  
対象にし、それより大きくなる時は判定を保留すること  
にした。

○ 実験の結果

M \ N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4									
5									
6						0			
7					0(2) 0	0(4)	0(3)		
8			0		0(1) 0(1)	0	2(4)	0	
9					2(2) 0(1)	4(6) 2(2)	1(3) 2(4)	2(3)	12(12)
10					1(3) 1(3)	0	1(4) 0(1)	0	9(10)

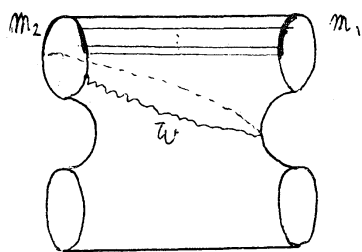
出力数 (reduced の数)  
上段 type 1  
下段 type 2

$N, M$  が 8 以下では、ほとんどこのアルゴリズムで、反例の  
ないことが示せた。しかし、 $N, M$  が大きくなると、 $\pi(W)$  の  
*triviality* 判定ルーチンの力不足である。  $N=12, M=17$  の場合

reducedなものが type 1 で 53ヶ, type 2 で 16ヶ、に対し、出力数はそれぞれ 52ヶ, 15ヶ とほとんど無カであった。

◎ wordの reducibility と wave の存在について。

右の図より meridian  $m_2$  に wave  
があれば、 $m_1, m_2$  にそって longitude  
 $l_1, l_2$  を読んだ word  $\hat{m}_1, \hat{m}_2$  に対し、  
 $\hat{m}_1$  が  $\hat{m}_2$  の subword となっている



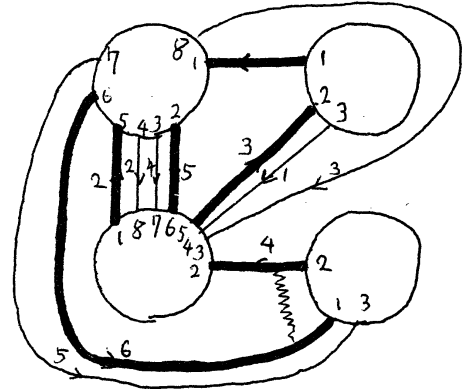
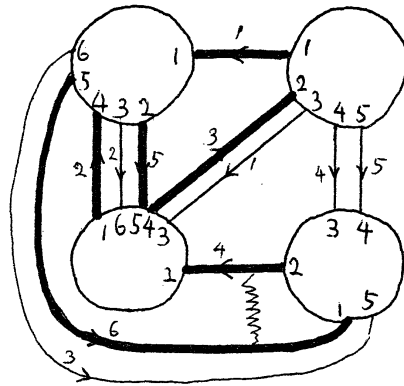
ことが予想される。又当然逆の予想、「 $\hat{m}_1$  が  $\hat{m}_2$  の subword なら  
 $m_2$  に wave が存在するであろう」が考えられる。これらの予想  
に対し、 $M+N \leq 40$  に対し実験を行なったところ、次の結果を  
得た。

「 $M+N \leq 40$ ,  $H_1(W) = \text{trivial}$  ならば、一方の word が他方の  
subword となれば wave が存在する。又逆に wave が存在すれば  
一方は他方の subword となる。」

さらに落合氏により、type 1 の場合には、 $M+N > 40$  の場合に  
も成立つことが示された。

又、 $H_1(W) = \text{trivial}$  の条件をはずすと反例が得られた。

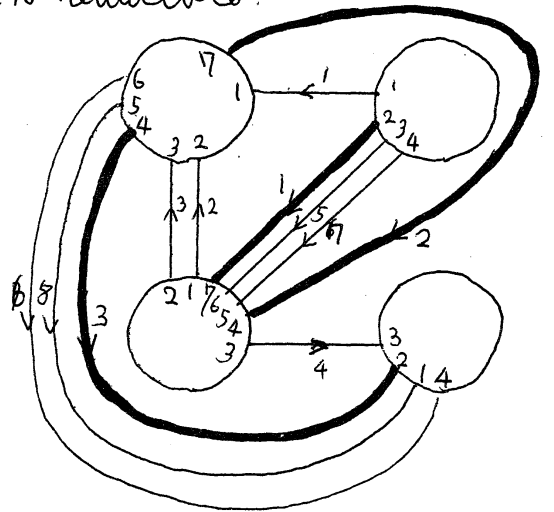
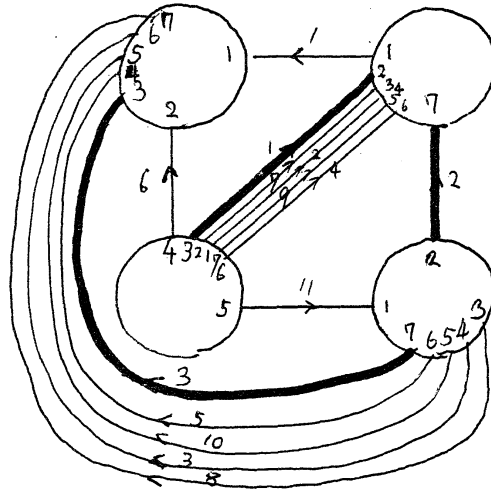
㊦ Waveがあるが、wordは reducible ではない。



$N=5, M=6, (a,b,c,d)=(1,2,2,3)$   
 $\begin{cases} \hat{l}_1 = ab^{-2}a^{-1}b^2 \\ \hat{l}_2 = a^3b^2 \end{cases}$

$N=3, M=8, (a,b,c,d)=(1,1,2,4)$   
 $\begin{cases} \hat{l}_1 = ab^{-2}a^{-1}b^2 \\ \hat{l}_2 = ab^4 \end{cases}$

㊧ Waveはないが、wordは reducible.

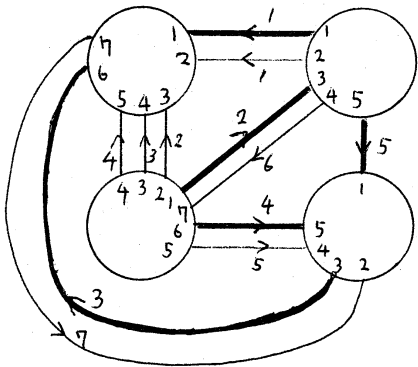


$N=7, M=7, (1,1,5,1)$   
 $\begin{cases} \hat{l}_1 = a^2b \\ \hat{l}_2 = ab^{-1}a^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-2}a^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-1} \end{cases}$

$N=4, M=7, (1,1,3,2)$   
 $\begin{cases} \hat{l}_1 = ab^2 \\ \hat{l}_2 = ab^{-3}abab \end{cases}$

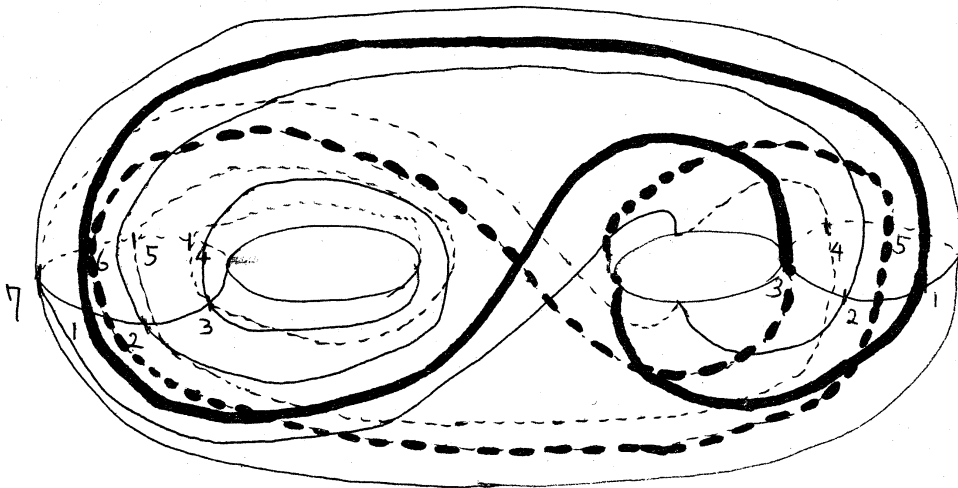
しかし、Waveがあり、Wordが reducible でない例は、closed loop が  $m-l$  系をなしていない、すなわち、homology 0 ではない、一方が他方と homology であるものしか見つからなかった。ですから現在のところ、「Waveがあれば、wordが reducible である」という予想は、 $m-l$  系においては未だ解決していない。

◎ 最も交点数の少ない、reduced な  $m-l$  系(標準型以外)



$N=5, M=7, (2, 1, 2, 3)$

$$\begin{cases} \hat{l}_1 = a^2 b^{-1} a^{-1} b^{-1} \\ \hat{l}_2 = a b a b^{-4} \end{cases}$$



この Heegaard 分解をもつ 3-mfd  $W$  は明らかに  $S^3$  ではない。  
 又、 $\pi_1(W) \neq \text{trivial}$  である。

## 参考文献

- [1] 本間龍雄 *genus 2 の Heegaard 分解をもち  $S^3$  について*  
(曲面の位置の理論と関連する話題), 数理解析研講究録  
297 (1977)
- [2] J. A. Todd and H. S. M. Coxeter, *A practical method for  
enumerating cosets of a finite abstract group*, Proc.  
Edinburgh Math. Soc. (2), 5 (1936), 26~34
- [3] J. Leech, *Coset enumeration on digital computers*,  
Proc. Camb. Phil. Soc. 59 (1963), 257~267
- [4] N. S. Mendelsohn, *An algorithmic solution for a word  
problem in group theory*, Dept. of Math. Publications,  
Univ. of Manitoba, 1963
- [5] 落合豊行 *On geometric reductions of homology  
3-spheres of genus two* (多様体に於ける低次元トポロジ  
ーの問題), 数理解析研講究録 309 (1977)

```

1 #####                                     #####
2 # HEEGAARD SPLITTING OF GENUS TWO 1977 6/6 BY MORIKAWA #
3 # 'HGDSPU' (KYOTO 1978 8/29 ) #
4 #####                                     #####
5 DEFINE(OWARI,900)
6 DEFINE(SIZE,80)
7 DEFINE(TRUE,1); DEFINE(FALSE,0)
8 DEFINE(CCHARACTER,INTEGER)
9 DEFINE(COMMONCONSTANT,COMMON /CONST/ M,N,MA,MB,MC,MD,MN,
10 ICNT1,ICNT2,ICNT3,ICNT4)
11 DEFINE(COMMONOUT,COMMON /OUT/ IPAGE,CHAR,IA2,IB2,IC2,ID2;
12 CHARACTER CHAR(SIZE,2))
13 COMMONCONSTANT
14 COMMONOUT
15 COMMON /COND/ ICOND # 1978 7/24
16 #
17 # MA MB MC MD MN
18 # I I I I I
19 # V V V V V
20 # CHAR: AAA.....ABBB.....BCCC.....CDDD.....D
21 # 123.....N123.....N123.....M123.....M
22 # VERTEX: ( MAPPING BY 'KAB' ) ( MAPPING BY 'KCD' )
23 # EDGE: ( MAPPING BY IA0,IB0,IB1,IC0,IC1 )
24 #
25 REPEAT *(
26 READ(5,500,END=OWARI) N,M,ICOND # 1978 7/24
27 500 FORMAT(2I4,6X,I1) # 1978 7/24
28 IF( MOD(N,2)+MOD(M,2) == 0) NEXT # 1978 7/17
29 IF(N > M) *( I=N; N=M; M=I; *)
30 MA=N; MB=M; MC=2*N; MD=MC+M; MN=MD+M
31 CALL SETCHA(CHAR)
32 #
33 IPAGE=ICNT1=ICNT2=ICNT3=ICNT4=0
34 WRITE(6,600) N,M
35 600 FORMAT('1N=',I4,5X,'M=',I4,10X,'GRAPH=G1')
36 IAMAX=N/2+1
37 DO IA=1,IAMAX *(
38 ICMAX=N-IA+2
39 DO IC=IA,ICMAX
40 CALL WGRAPH(IA-1,N-IA-IC+2,0,IC-1,M-IA-IC+2)
41 *)
42 WRITE(6,610) ICNT4,ICNT3,ICNT2,ICNT1
43 610 FORMAT(' #### ',I3,' (REDUCED',I4,', HOMOMOLOGY',I4,
44 ', 2-LOOPS',I4,') ####')
45 #
46 IF(2 > M-N) NEXT # 1978 8/5
47 IF(N <= 1) NEXT # 1978 9/1
48 IPAGE=ICNT1=ICNT2=ICNT3=ICNT4=0
49 WRITE(6,601) N,M
50 601 FORMAT('1N=',I4,5X,'M=',I4,10X,'GRAPH=G2')
51 IAMAX=N/2; IBMAX=(M-N)/2 # 1978 8/15
52 DO IA=1,IAMAX # 1978 8/15
53 DO IB=1,IBMAX
54 CALL WGRAPH(IA,0,IB,N-IA,M-N-IB)
55 *)
56 WRITE(6,610) ICNT4,ICNT3,ICNT2,ICNT1
57 *)
58 OWARI STOP
59 END

```

```
1 # CHAR:= TRANSLATION TABLE FOR 'OUT' ROUTINE
2 # INTERNAL CODE --> VERTEX ON GRAPH
3 #     MA+1     -->   (A 1)
4 #     MA+2     -->   (A 2)
5 #     :
6 #     MD+N     -->   (D N)
7 #
8 SUBROUTINE SETCHA(CHAR)
9 COMMONCONSTANT
10 CHARACTER CHAR(SIZE,2)
11 DO I=1,N *(
12     CHAR(I+MA,1)='A'
13     CHAR(I+MB,1)='B'
14     CHAR(I+MA,2)=CHAR(I+MB,2)=I
15 *)
16 DO I=1,M *(
17     CHAR(I+MC,1)='C'
18     CHAR(I+MD,1)='D'
19     CHAR(I+MC,2)=CHAR(I+MD,2)=I
20 *)
21 RETURN
22 END
```



```

1  DEFINE(TRIVIAL,1)
2  DEFINE(JUST2LOOPS,0)
3  DEFINE(ONLY1LOOP,1)
4  DEFINE(ATLEAST3LOOPS,2)
5  DEFINE(REDCIBLE,FALSE); DEFINE(REDCED,TRUE)
6  DEFINE(COMMONWORK1,COMMON /WORK1/ EDGE,EDGE1,VERTEX,CHECK;
7  INTEGER EDGE(SIZE),EDGE1(SIZE),VERTEX(SIZE),CHECK(SIZE))
8  DEFINE(COMMONWORK2,COMMON /WORK2/ LOOP,LL,WORD,LW,C;
9  INTEGER LOOP(SIZE,2),LL(2),WORD(SIZE,2),LW(2),C(2,2))
10 #
11 # GRAPH: /--(IB1)-----|
12 #          C---(IA0)---A |           IA0 <= IC0
13 #          /|           / | |         IB0 <= ID0
14 #          | |           / | |         IB1 <= ID0
15 #          |(ID0) (ICU) | |         GRAPH-1 ... IB1=0
16 #          | | / ---+--/         GRAPH-2 ... IB0=0
17 #          | | / --/ |           0 < IB1
18 #          | | /--/ (IB0)
19 #          | D---(IA0)---B
20 #          |------(IC0)---/
21 #
22 SUBROUTINE WGRAPH(IA0,IB0,IB1,IC0,IDO) # WHITEHEAD-GRAPH
23 COMMONCONSTANT
24 COMMONOUT
25 COMMONWORK1
26 COMMONWORK2
27 IF(IA0+IB0==0 | IA0+IC0==0) RETURN # REDUCIBLE # 1978 8/10
28 IA2=IA0; IB2=IB0+IB1; IC2=IC0; ID2=IDO
29 CALL SETEDG(EDGE,IA0,IB0,IB1,IC0,IDO)
30 #
31 ##### PARAMETER KAB,KCD WO KIMERU #####
32 # KAB: ATTACHING MAPPING (A J)--->(B J+KAB)
33 # KCD: ATTACHING MAPPING (C I)--->(D I+KCD)
34 #
35 DO KCD=1,M *(
36 CALL SETKCD(KCD,NLOOP)
37 IF(NLOOP > 2) NEXT
38 DO KAB=1,N *(
39 CALL SETKAB(KAB,NLOOP,ISW)
40 IF(ISW /= JUST2LOOPS) NEXT
41 ICNT1=ICNT1+1
42 #
43 ##### HOMOLOGY 3-SPHERE ? #####
44 #
45 CALL MAKEC
46 IF(ABS(C(1,1)*C(2,2)-C(1,2)*C(2,1)) /= 1) NEXT
47 ICNT2=ICNT2+1
48 #
49 CALL MAKEWD
50 CALL GEORED(ISW,IA0,IB0,IB1,IC0,IDO) # 1978 8/30
51 IF(ISW == REDUCIBLE) NEXT
52 ICNT3=ICNT3+1
53 #
54 CALL COSET(WORD,LW,ISW)
55 IF(ISW == FALSE) NEXT
56 ICNT4=ICNT4+1
57 CALL OUT
58 *)
59 *)
60 RETURN

```

```

61         END
62
63        #
64        ### GRAPH WO TSUKURU : EDGE (A K) <--> (C J) ###
65        #
66        SUBROUTINE SETEDG(EDGE,IA0,IB0,IB1,IC0,IDO)
67        COMMON CONSTANT
68        INTEGER EDGE(SIZE)
69        KA=MA; KC=MC; KB=MB; KD=MD
70        FOR(K=1; K <= IA0; K=K+1) *(
71            EDGE(KA+K)=KC+K      # (A K) <--> (C K)
72            EDGE(KC+K)=KA+K
73            EDGE(KB+K)=KD+K      # (B K) <--> (D K)
74            EDGE(KD+K)=KB+K
75        *)
76        KA=IA0; KB=MB+IA0+IB0
77        KC=MC+IA0+IC0+IDO+1; KD=MD+IA0+IB1+IC0+1
78        FOR(K=1; K <= IC0; K=K+1) *(
79            EDGE(KA+K)=KD-K
80            EDGE(KD-K)=KA+K
81            EDGE(KB+K)=KC-K
82            EDGE(KC-K)=KB+K
83        *)
84        KA=IA0+IC0; KB=MB+IA0
85        FOR(K=1; K <= IB0; K=K+1) *(
86            EDGE(KA+K)=KB+K
87            EDGE(KB+K)=KA+K
88        *)
89        KC=MC+IA0+IC0+IDO; KD=MD+IA0
90        FOR(K=1; K <= IB1; K=K+1) *(
91            EDGE(KC+K)=KD+K
92            EDGE(KD+K)=KC+K
93        *)
94        KC=MC+IA0; KD=MD+IA0+IB1+IC0
95        FOR(K=1; K <= ID0; K=K+1) *(
96            EDGE(KC+K)=KD+K
97            EDGE(KD+K)=KC+K
98        *)
99        RETURN
100       END

```

```

1  ### SET THE 'VERTEX' BY THE PARAMETER 'KCD' ###
2  #   NLOOP:= NUMBER OF LOOP(MADE FROM 'C'&'D') -1
3  #   VERTEX:= MAPPING OF VERTEX ON GRAPH TO ONE
4  #
5  SUBROUTINE SETKCD(KCD,NLOOP)
6  COMMONCONSTANT
7  COMMONWORK1
8  COMMONOUT
9  DO I=1,M *(
10     VERTEX(I+MC)=K=MD+1+MOD(I+KCD,M)
11     VERTEX(K)=I+MC
12     CHAR(K,2)=I
13     *)
14  IMAX=2*M
15  DO I=1,IMAX
16     CHECK(I+MC)=0
17  #
18  ### EDGE1 WO EDGE,VERTEX NI-YORI SET ###
19  #           EDGE    VERTEX  EDGE    VERTEX  EDGE
20  #           I      I      I      I      I
21  #           V      V      V      V      V
22  #   EDGE,VERTEX: (A I)-->(C J1)=(D K1)-->(C J2)=.,.,-->(B L)
23  #   EDGE1      : (A I)-->(B L)
24  #
25  DO I=1,MC *(
26     J=I
27     REPEAT *(
28         J=EDGE(J)
29         IF(J <= MC) BREAK
30         CHECK(J)=1
31         J=VERTEX(J)
32         CHECK(J)=1
33         *)
34     EDGE1(I)=J
35     *)
36  #
37  #### 'C','D' DAKE-KARA-NARU LOOP WO KAZOERU ###
38  #
39  NLOOP=1
40  DO I=1,IMAX *(
41     IF(CHECK(I+MC) /= 0) NEXT
42     NLOOP=NLOOP+1
43     J=I+MC
44     REPEAT *(
45         CHECK(J)=1
46         J=EDGE(J)
47         CHECK(J)=1
48         J=VERTEX(J)
49         *)
50     UNTIL(CHECK(J) == 1)
51     *)
52  RETURN
53  END

```

```

1  ### SET THE 'VERTEX' BY THE PARAMETER 'KAB' ###
2  #   ISW:= RETURN CONDITION
3  #
4  SUBROUTINE SETKAB(KAB,NLOOP,ISW)
5  COMMONCONSTANT
6  COMMONWORK1
7  COMMONOUT
8  DO I=1,N *(
9      VERTEX(I)=K=N+1+MOD(I+KAB,N)
10     VERTEX(K)=I
11     CHAR(K,2)=I
12     *)
13  #
14  ##### LOOP WO 2-TSU MITSUKERU #####
15  #
16  DO I=1,MC
17     CHECK(I)=0
18     DO I=NLOOP,2 *(
19         J=1
20         REPEAT *(
21             IF(CHECK(J) == 0) BREAK
22             IF(J == MC) *(
23                 ISW=ONLY1LOOP
24                 RETURN
25                 *)
26             J=J+1
27             *)
28         J0=J
29         REPEAT *(
30             CHECK(J)=1
31             J=EDGE1(J)
32             CHECK(J)=1
33             J=VERTEX(J)
34             *)
35         UNTIL(J == J0)
36         *)
37     DO I=1,MC
38         IF(CHECK(I) == 0) *(
39             ISW=ATLEAST3LOOPS
40             RETURN
41             *)
42     ISW=JUST2LOOPS
43     RETURN
44     END

```

```

1  #### MAKE 'LOOP' & 'C' OF 'VERTEX' & 'EDGE'  ###
2  #
3  #   C:= MATRIX   C(1,*)=#(A)-#(B)
4  #               C(2,*)=#(C)-#(D)
5  #               #(A):= NUMBER OF 'A' IN THE LOOP
6  #   LOOP:= SEQUENCE OF INTERNAL CODE (VERTEX ON GRAPH)
7  #   LL := LENGTH OF LOOP
8  #
9  #           EDGE VERTEX EDGE VERTEX
10 #            I     I     I     I
11 #            V     V     V     V
12 #   LOOP= (A I), (B J), (A K), (C L), ....;
13 #
14 SUBROUTINE MAKEC
15 COMMON CONSTANT
16 COMMON WORK1
17 COMMON WORK2
18 #
19 DO I=1,MN
20   CHECK(I)=0
21 C(1,1)=C(1,2)=C(2,1)=C(2,2)=0
22 DO J=1,2 *(
23   DO I=1,MN
24     IF(CHECK(I) == 0) BREAK
25     K=1
26     LOOP(1,J)=I; CHECK(I)=J
27     REPEAT *(
28       IF (I <= MB) C(1,J)=C(1,J)+1
29       ELSE IF(I <= MC) C(1,J)=C(1,J)-1
30       ELSE IF(I <= MD) C(2,J)=C(2,J)+1
31       ELSE C(2,J)=C(2,J)-1
32       I=LOOP(K+1,J)=EDGE(I); CHECK(I)=-J
33       I=LOOP(K+2,J)=VERTEX(I); CHECK(I)= J
34       K=K+2
35     *)
36     UNTIL(I == LOOP(1,J))
37     LL(J)=K-1
38   *)
39 RETURN
40 END

```

```

1 ##### MAKE 'WORD' OF 'LOOP' #####
2 # LOOP ==> WORD
3 # ... (A *) = (B *) ... ==> 1
4 # ... (B *) = (A *) ... ==> -1
5 # ... (C *) = (D *) ... ==> 2
6 # ... (D *) = (C *) ... ==> -2
7 # LW := LENGTH OF WORD
8 #
9 SUBROUTINE MAKEWD
10 COMMON CONSTANT
11 COMMON WORK2
12 #
13 DO J=1,2 *(
14     I=0; KMAX=LL(J)
15     DO K=1,KMAX,2 *(
16         I=I+1
17         IF (LOOP(K,J) <= MB) WORD(I,J)= 1
18         ELSE IF (LOOP(K,J) <= MC) WORD(I,J)=-1
19         ELSE IF (LOOP(K,J) <= MD) WORD(I,J)= 2
20         ELSE WORD(I,J)=-2
21     *)
22     LW(J)=I
23 *)
24 RETURN
25 END

```

```

1  SUBROUTINE GEORED(ISW,IA0,IB0,IB1,IC0,IDO)
2  COMMONCONSTANT
3  COMMONWORK1
4  ISW=REDUCIBLE
5  IF(CHECK(1)+CHECK(N) == 0) RETURN
6  DO I=2,N
7      IF(CHECK(I-1)+CHECK(I) == 0) RETURN
8  IF(CHECK(MC+1)+CHECK(MC+M) == 0) RETURN
9  DO I=2,M
10     IF(CHECK(MC+I-1)+CHECK(MC+I) == 0) RETURN
11 #
12 IF(IB0+IB1 == 0) *(
13     IF(CHECK(MA+IA0+IC0) == CHECK(MB+IA0+1)) RETURN
14     IF(CHECK(MA+1) == CHECK(MB+IA0)) RETURN
15     *)
16 #
17 ELSE IF(IB1+IA0 == 0) *(
18     IF(CHECK(MA+1) == CHECK(MC+IC0+IDO)) RETURN
19     IF(CHECK(MA+IB0+IC0) == CHECK(MC+1)) RETURN
20     *)
21 # ELSE IF(IB0+IA0 == 0) RETURN
22 #
23 ISW=REDUCED
24 RETURN
25 END
26
27 SUBROUTINE OUT
28 COMMONOUT
29 COMMONWORK2
30 CHARACTER MOJI(5)
31 DATA MOJI /'-B','-A',' ','+A','+B'/
32 #
33 IPAGE=IPAGE+1
34 IF(IPAGE > 3) *( WRITE(6,640); 640 FORMAT('1'); IPAGE=1; *)
35 WRITE(6,600) IA2,IB2,IC2,ID2
36 600 FORMAT(' A=',I2,', B=',I2,', C=',I2,', D=',I2,
37           /' ***** LOOP *****')
38 IMAX=LL(1);WRITE(6,601) ((CHAR(LOOP(I,1),J),J=1,2),I=1,IMAX)
39 IMAX=LL(2);WRITE(6,601) ((CHAR(LOOP(I,2),J),J=1,2),I=1,IMAX)
40 601 FORMAT(/(' ',10('(',A1,I2,',',A1,I2,')'))
41 WRITE(6,610)
42 610 FORMAT(/' ***** RELATION (LONGITUDE) *****')
43 IMAX=LW(1); WRITE(6,611) (MOJI(WORD(I,1)+3),I=1,IMAX)
44 IMAX=LW(2); WRITE(6,611) (MOJI(WORD(I,2)+3),I=1,IMAX)
45 611 FORMAT(' ',40A2)
46 WRITE(6,620) C
47 620 FORMAT(/' C11=',I3,' C12=',I3,' C21=',I3,' C22=',I3/)
48 RETURN
49 END

```

TIME 12:58

\*\* PAGE 10 \*\*

```

1  SUBROUTINE COSET(WORD,LW,ISW)
2  COMMON /COND/ ICOND # 1978 7/24
3  INTEGER WORD(SIZE,2),LW(2)
4  #####
5  # COSET ENUMERATION METHOD FOR ORDER OF THE GROUP #
6  #####
7  DEFINE(CCHARACTER,INTEGER)
8  DEFINE(ORIGIN,3)
9  DEFINE(MAXK0,300); DEFINE(MAXK01,301)
10 DEFINE(TRUE,1); DEFINE(FALSE,0)
11 COMMON /COSET/WTABLE(SIZE,2), # WORKING TABLE
12 RTABLE(5,MAXK0), # RELATION TABLE
13 UDEFP(2,2), # UNDEFINED POINTER FOR WTABLE
14 LCON(3), # LENGTH OF CONDITION
15 MAXK # MAXIMUM INDEX OF COSET
16 INTEGER WTABLE,RTABLE,UDEFP,LCON,SET,SETWT
17 DIMENSION AB(3)
18 #
19 ##### WORKING TABLE INITIALIZE #####
20 K=LCON(1)=1
21 DO N=1,2 *(
22 IMAX=LW(N)
23 DO I=1,IMAX *(
24 WTABLE(K,1)=WORD(I,N)
25 K=K+1
26 *)
27 WTABLE(K,1)=0
28 LCON(N+1)=K=K+1
29 *)

```



```

1   DO L=1,2 *(
2       UDEF P(L,1)=LCON(L)
3       UDEF P(L,2)=LCON(L+1)-1
4       WTABLE(UDEF P(L,1),2)=WTABLE(UDEF P(L,2),2)=1
5   *)
6   #
7   #### RELATION TABLE INITIALIZE ####
8       MAXK=1
9       DO IS=1,5
10          RTABLE(IS,1)=0
11   #### MAIN PROGRAM ####
12       REPEAT
13          CALL SCHDEF          # SEARCH & DEFINED RELATION
                                TABLE
14          UNTIL(SETWT(1) == TRUE |          # SET WORKING TABLE
15              MAXK >= MAXKO)
16          IF (MAXK == 1) *(
17              WRITE(6,600); 600 FORMAT(' THIS GROUP IS TRIVIAL !
                                !!!')
18              CALL OUT
19              STOP 900
20              *)
21          ELSE IF (MAXK < MAXKO) *(
22              ISW=FALSE
23              RETURN
24              *)
25          ELSE *(
26              AB(1)='PUNC'
27              IF (ICOND > 5) *(
28                  DO K=1,MAXKO
29                      RTABLE(ORIGIN,K)=K
30                  DO K=1,MAXKO,30 *(
31                      IMAX=K+29
32                      WRITE(6,1) ((RTABLE(J,IS),IS=K,IMAX),J=1,5)
33                      1 FORMAT(' +B',3(10I4,3X),
34                          /' +A',3(10I4,3X),
35                          /' ',3(10I4,3X),
36                          /' -A',3(10I4,3X),
37                          /' -B',3(10I4,3X)/)
38                  *)
39              *)
40          *)
41   #
42   DO L=1,2 *(
43       UDEF P(L,1)=LCON(L)
44       UDEF P(L,2)=LCON(L+1)-1
45       WTABLE(UDEF P(L,1),2)=WTABLE(UDEF P(L,2),2)=1
46   *)
47   MAXK=1
48   RTABLE(1,1)=RTABLE(5,1)=0
49   RTABLE(2,1)=RTABLE(4,1)=1
50   RTABLE(3,1)=0
51   IGOMI=SETWT(1)
52   REPEAT
53       CALL SCHDEF
54       UNTIL(SETWT(1) == TRUE | MAXK >= MAXKO)
55       IF (MAXK == 1)
56           AB(2)='TRIV'
57       ELSE IF (MAXK < MAXKO) *(
58           ISW=FALSE

```

TIME 12:58

\*\* PAGE 12 \*\*

```

59         RETURN
60     *)
61 ELSE *(
62     AB(2)='PUNC'
63     IF (ICOND > 5) *(
64         DO K=1,MAXKO
65             RTABLE(ORIGIN,K)=K
66         DO K=1,MAXKO,30 *(
67             IMAX=K+29
68             WRITE(6,1) ((RTABLE(J,IS),IS=K,IMAX),J=1,5)
69             *)
70         *)
71     *)
72 #
73 DO L=1,2 *(
74     UDEFPP(L,1)=LCON(L)
75     UDEFPP(L,2)=LCON(L+1)-1
76     WTABLE(UDEFPP(L,1),2)=WTABLE(UDEFPP(L,2),2)=1
77     *)
78 MAXK=1
79 RTABLE(1,1)=RTABLE(5,1)=1
80 RTABLE(2,1)=RTABLE(4,1)=0
81 RTABLE(3,1)=0
82 IGOMI=SETWT(1)
83 REPEAT
84     CALL SCHDEF
85 UNTIL (SETWT(1) == TRUE | MAXK >= MAXKO)
86 IF (MAXK == 1)
87     AB(3)='TRIV'
88 ELSE IF (MAXK < MAXKO) *(
89     ISW=FALSE
90     RETURN
91     *)
92 ELSE *(
93     AB(3)='PUNC'
94     IF (ICOND > 5) *(
95         DO K=1,MAXKO
96             RTABLE(ORIGIN,K)=K
97         DO K=1,MAXKO,30 *(
98             IMAX=K+29
99             WRITE(6,1) ((RTABLE(J,IS),IS=K,IMAX),J=1,5)
100            *)
101        *)
102    *)
103 #
104 WRITE(6,2) AB
105 2 FORMAT(/' NORMAL--',A4,',', COSET(A)--',A4,
106            ',', COSET(B)--',A4)
107 ISW=TRUE
108 RETURN
109 END

```

```

1     INTEGER FUNCTION SETWT(IGOMI)  * SET WTABLE AS WELL AS
2                                     POSSIBLE
3                                     * TRUE ... CLOSED UP !
4     DEFINE(COMMONCOSET,
5     COMMON /COSET/WTABLE(SIZE,2),RTABLE(5,MAXK),
6     UDEFPP(2,2),LCON(3),MAXK
7     INTEGER WTABLE,RTABLE,UDEFPP,LCON)
8     COMMONCOSET
9     INTEGER FULLSW(10),SET
10    #
11    REPEAT *(
12        ISW=TRUE
13        DO K=1,2
14            REPEAT *(
15                IF(SET(UDEFPP(K,1),UDEFPP(K,2)) == FALSE) *(
16                    FULLSW(K)=FALSE
17                    BREAK
18                    *)
19                I=WTABLE(UDEFPP(K,1),2)
20                J=WTABLE(UDEFPP(K,2),2)
21                IS=WTABLE(UDEFPP(K,1),1)
22                IF(RTABLE(ORIGIN+IS,1) /= J)
23                    IF(RTABLE(ORIGIN+IS,1) /= 0) *(
24                        CALL COLLAP(RTABLE(ORIGIN+IS,1),J)
25                        ISW=FALSE
26                        BREAK
27                        *)
28                    ELSE IF(RTABLE(ORIGIN-IS,J) /= 0) *(
29                        CALL COLLAP(RTABLE(ORIGIN-IS,J),1)
30                        ISW=FALSE
31                        BREAK
32                        *)
33                    ELSE *(
34                        ISW=FALSE ***** NEW RELATION SET
35                        RTABLE(ORIGIN+IS,1)=J
36                        RTABLE(ORIGIN-IS,J)=I
37                        *)
38                I=WTABLE(LCON(K),2)
39                IF(I >= MAXK) *( ***** THIS TABLE IS CLOSED
40                    UP !
41                    FULLSW(K)=TRUE
42                    BREAK
43                    *)
44                UDEFPP(K,1)=LCON(K)
45                UDEFPP(K,2)=LCON(K+1)-1
46                WTABLE(UDEFPP(K,1),2)=WTABLE(UDEFPP(K,2),2)=I+1
47                *)
48            *)
49        UNTIL(ISW == TRUE)
50    #### ANSWER --> SETWT ####
51    SETWT=TRUE
52    DO K=1,2
53        SETWT=SETWT*FULLSW(K)
54    RETURN
55    END

```

TIME 16:45

\*\* PAGE 14 \*\*

```

1      INTEGER FUNCTION SET(IP,JP) # TRUE ... OK, THIS TABLE IS
                                           FILLED UP
2      COMMONCOSET
3      WHILE(IP+1 < JP) *(
4          I=WTABLE(IP,2)
5          IS=WTABLE(IP,1)
6          IF(RTABLE(ORIGIN+IS,I) /= 0) *(
7              IP=IP+1
8              WTABLE(IP,2)=RTABLE(ORIGIN+IS,I)
9              NEXT
10             *)
11         J =WTABLE(JP,2)
12         JS=WTABLE(JP-1,1)
13         IF(KTABLE(ORIGIN-JS,J) /= 0) *(
14             JP=JP-1
15             WTABLE(JP,2)=RTABLE(ORIGIN-JS,J)
16             NEXT
17             *)
18         SET=FALSE
19         RETURN
20     *)
21     SET=TRUE
22     RETURN
23     END
24
25
26
27
28
29     SUBROUTINE SCHDEF          # SEARCH & DEFINED
30     COMMONCOSET
31     **** SEARCH ****
32     MAXK=MAXK+2
33     DO I=1,2
34         IF(UDEFPP(I,1)+1 /= UDEFPP(I,2))
35             IF(MINI > WTABLE(LCON(I),2)) *(
36                 L=I
37                 MINI=WTABLE(LCON(I),2)
38             *)
39     **** DEFINED ****
40     MAXK=MAXK+1
41     DO IS=1,5
42         RTABLE(IS,MAXK)=0
43         I=WTABLE(UDEFPP(L,1),2)
44         IS=WTABLE(UDEFPP(L,1),1)
45         RTABLE(ORIGIN+IS,I)=MAXK
46         RTABLE(ORIGIN-IS,MAXK)=I
47     RETURN
48     END

```

```

1  SUBROUTINE COLLAP(I0,J0) # COLLAPSING I0<=>J0
2  COMMON COSET
3  DIMENSION ISTACK(MAXK,2)
4  I=I0; J=J0
5  IF(I < J) #( I0=I; I=J; J=I0; #)
6  CALL RNUM(I,J)
7  # WRITE(6,600) I,J; 600 FORMAT(' COLLAPSING',I3,' =',I3)
8  #
9  ISTN=0
10 REPEAT #(
11     DO IS=1,5
12         IF(RTABLE(IS,I) /= RTABLE(IS,J)
13            & RTABLE(IS,I) /= 0)
14             IF(RTABLE(IS,J) == 0)
15                 RTABLE(IS,J)=RTABLE(IS,I)
16             ELSE #(
17                 I1=RTABLE(IS,I)
18                 J1=RTABLE(IS,J)
19                 IF(I1 < J1) #( I0=I1; I1=J1; J1=I0; #)
20                 CALL RNUM(I1,J1)
21                 # WRITE(6,600) I1,J1
22                 ISTN=ISTN+1
23                 ISTACK(ISTN,1)=I1
24                 ISTACK(ISTN,2)=J1
25                 #)
26             RTABLE(ORIGIN,I)=J
27             IF(ISTN == 0) BREAK
28             I=ISTACK(ISTN,1)
29             J=ISTACK(ISTN,2)
30             ISTN=ISTN-1
31         #)
32 I=MAXK
33 CALL GBGCOL # GERBAGE COLLECTOR
34 # WRITE(6,601) I,MAXK
35 # 601 FORMAT(' GERBAGE COLLECTOR ! MAXK:',I3,'->',I3)
36 RETURN
37 END

```

TIME 12:58

\*\* PAGE 16 \*\*

```

1      SUBROUTINE GBGCOL      # GERBAGE COLLECTOR
2      COMMONCOSET
3      DIMENSION NEWNUM(MAXK01) # NEW NUMBERING
4      #
5      ##### 'NEWNUM' SET #####
6      J=NEWNUM(1)=0
7      DO I=1,MAXK *(
8          IF(RTABLE(ORIGIN,I) == 0) J=J+1
9              NEWNUM(I+1)=J
10         *)
11     #
12     ##### RTABLE REWRITE #####
13     J=1
14     DO I=1,MAXK *(
15         IF(RTABLE(ORIGIN,I) /= 0) NEXT
16         DO IS=1,5
17             RTABLE(IS,J)=NEWNUM(RTABLE(IS,I)+1)
18             J=J+1
19         *)
20     MAXK=J-1
21     #
22     ##### WTABLE REWRITE #####
23     DO K=1,2 *(
24         UDEFK(K,1)=LCON(K)
25         UDEFK(K,2)=LCON(K+1)-1
26         WTABLE(UDEFK(K,1),2)=WTABLE(UDEFK(K,2),2)=_
27             NEWNUM(WTABLE(UDEFK(K,1),2)+1)
28     *)
29     RETURN
30     END
31
32
33     SUBROUTINE RNUM(IO,J0) # RENUMBERING IO->J0
34     COMMONCOSET
35     DO I=1,MAXK
36         DO IS=1,5
37             IF(RTABLE(IS,I) == IO) RTABLE(IS,I)=J0
38     RETURN
39     END

```