数理解析研究所講究録
第 346 巻 1979 年 66-79

Notes on 2-fold branched coverings

北大 理数　河野 正晴

このNoteでは、2-fold branched coveringのいくつかの性質について述べる。§1ではbranch setのホモロジー的な性質。§2ではsurfaceのhomeotopy groupのあるsubgroupとbranch setの関係について、である。

最初にbranched coveringの定義を書く。

<u>Def</u> M, Nをcompact n-manifoldとします。A, BをM, Nのproperな$(n-2)$-submanifoldとする。(AがMでproperとは $\partial A = A \cap \partial M$)

$f : (M, A) \longrightarrow (N, B)$ がbranched coveringであるとは、(i) Nのopen baseの逆像のcomponent全体がMのbaseとなる (ii) $f(A) = B$, $f(M-A) = N-B$ で $f|_{M-A} ; M-A \longrightarrow N-B$ は普通のcoveringになっている。を満たす時のこととする。

§1. branch set のホモロジー的性質

$p:(M^3, \tilde{L}') \longrightarrow (N^3, L')$ を2-fold branched covering とする。(ここで、2-fold という意味は $x \in N-L$ に対し $p^{-1}(x)$ が2個ということ) ただし, M, N は closed 3-manifolds で $\tilde{L}$, L はその中の links。N上のLで branch する2-fold covering space をつくる時、ふつうNの中でLを bound する surface F をとり、NをFで cut する。そして、そのcopyを2コ用意し、Fに対応する F_1, F_2 をはりあわせる。

この時Lはある surface を bound するということが仮定されているが、このことは正しいだろうか? 次の定理は 2-fold branched covering の時は正しいということを示している。

<u>Theorem 1</u>

M, N を orientable closed 3-manifolds とし, $\tilde{L}$, L をその中の link とする。

$^\exists p:(M, \tilde{L}) \longrightarrow (N, L)$ 2-fold branched covering

$\Longrightarrow$ $[L] = 0 \in H_1(N; \mathbb{Z}_2)$

（証明の概略）

$\tau: M \to M$ を non-trivial covering transformation とすると、この involution τ に対し characteristic mfd $\hat{F}$ が存在する。ここで $\hat{F}$ は closed 2-mfd で、$\hat{L} \subset \hat{F}$。よって $p(\hat{F}) = F$ とすると、F は 2-mfd（non-orientable かもしれない）で $\partial F = L$ となる。よってo.k.

―

又、高次元でも同様に次の定理が示される。

<u>Theorem 2</u>

M, N; closed $(n+2)$-mfd

$\hat{L}, L$ は closed n-submfd of M, N

$p: (M, \hat{L}) \longrightarrow (N, L)$ 2-fold branched covering

L は N の locally flat な submfd

$\Longrightarrow [L] = 0 \in H_n(N; Z_2)$

更に、M, N に boundary があっても次の定理が成り立つ。

<u>Theorem 3</u>

M, N を compact $(n+2)$-mfd, $\hat{L}, L$ をその proper な n-submfd とする。（L は N で locally flat）

$p : (M, \hat{L}) \to (N, L)$ 2-fold branched covering

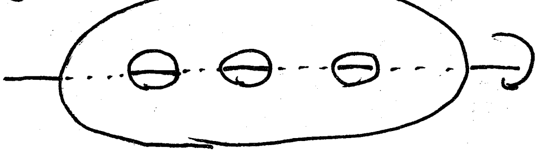
$\Longrightarrow$ $[L] = 0 \in H_n(N, \partial N; \mathbb{Z}_2)$

<u>Remark</u>

1. Theorem 1, 2, 3において係数を$\mathbb{Z}_2$から$\mathbb{Z}$にかえると定理は成立しない。
2. 同じく、2-foldを一般のbranched coveringにすると(少なくともirregularも許すと)、定理は成立しない。

§2. 曲面のhomeotopy groupとbranched covering

Fをconnected closed orientable surfaceでgenusがnのものとします。H(F)をF上のorientation preserving homeo.全体として、$H_0(F)$をそのなかでidとisotopicなもの全体とする。H(F), $H_0(F)$は写像の合成によって群をなし、特に$H_0(F)$はH(F)のnormal subgroupをなす。H(F)の$H_0(F)$による剰余群を$\mathcal{M}(F)$と書きFのhomeotopy groupと呼ぶ。Fをstandardな位置(Look ⇒)においた時180°回転のhomeo.をT



と書く。 $H(F)$ から $\mathcal{M}(F)$ への自然な準同型を φ を書く。更に、$\hat{\Lambda}(F) \equiv \{ f \in H(F) \mid fT = Tf \}$, $\Lambda(F) \equiv \varphi(\hat{\Lambda}(F))$ とする。

(i) $F/T \cong S^2$ となるので、$p : F \longrightarrow S^2$ で $\mathrm{cov}(p) = \{1, T\}$ となる 2-fold branched covering が存在する。この branched covering の下の branch set を B , 上の branch set を $\tilde{B}$ とする。

$h \in \hat{\Lambda}(F)$ に対し、 $g \in H(S^2)$ が存在して、右の図式を可換にし、g は $g(B) = B$ をみたす。h に対してこの様な g は一意的。又逆に、$g(B)=B$ をみたす $g \in H(S^2)$ に対し、右の図式を可換にする $h \in H(F)$ は存在して、$h \in \hat{\Lambda}(F)$ となる。この様な h は2個存在し、それを h , h' とすると $h' = Th$ となっている。

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"'] & F \arrow[d, "p"] \\ S^2 \arrow[r, "g"'] & S^2 \end{tikzcd}$$

(ii) $\tilde{H}(n)$ を S^2 の geometric $(2n+2)$-braid 全体とする。 つまり、 geometric $(2n+2)$-braid $\{b_1, \cdots, b_{2n+2}\}$ とは次の様なもの。$p_1, \cdots, p_{2n+2}$ を S^2 にとり以下 fix

0) $b_i : I \longrightarrow S^2 \times I$ map

1) $b_i(t) \in S^2 \times \{t\}$ for $\forall t \in I$, $i = 1, \cdots, 2n+2$

2) $b_i(0) = (p_i, 0)$ とすると, $i = 1, \cdots, 2n+2$

$\{b_1(1), \cdots, b_{2m+2}(1)\} = \{(p_1, 1), \cdots\cdots, p_{2m+2}(1)\}$

(ただしsetとしてのイコール)

3) $i \neq j$ の時 $b_i(t) \neq b_j(t)$ for $\forall t \in I$

この$\hat{A}(m)$に次の様に同値関係をいれる。

(a) $\{b_1(t), \cdots, b_{2m+2}(t)\} \sim_a \{b'_1(t), \cdots, b'_{2m+2}(t)\}$

とは、$\exists B_k : I \times I \longrightarrow M \times I$ $(k = 1, \cdots, 2m+2)$

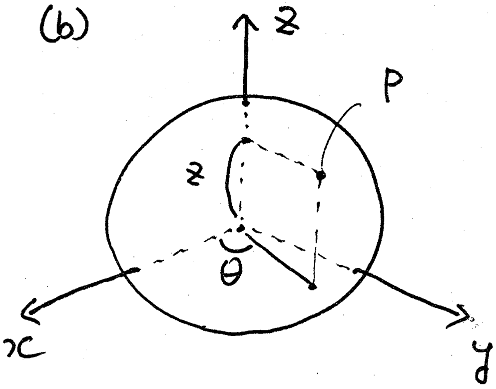
$\ni$ $B_k | I \times \{0\} = b_k$, $B_k | I \times \{1\} = b'_k$

そして、各$\tau \in I$に対す

$\{B_1 | I \times (\tau), \cdots\cdots, B_{2m+2} | I \times \{\tau\}\}$ が

geometric $(2m+2)$-braidになっているもの

(b)



$S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ とした時 pのz座標をz、pをxy-平面へ射影した点とx軸のなす角をθとして、$p = (z, \theta)$と表わす。($z = \pm 1$の時は$\theta = 0$ときめておく)

$\tilde{R}_t : S^2 \longrightarrow S^2$ を $\tilde{R}_t(z, \theta) = (z, \theta + 2\pi t)$ ときめる。そして $R : S^2 \times I \longrightarrow S^2 \times I$

$$(a, t) \longmapsto (\tilde{R}_t(a), t)$$

とする。$\{b_1, \cdots, b_{2m+2}\} \sim_b \{b'_1, \cdots, b'_{2m+2}\}$

とは $R(b_i(t)) = b'_i(t)$ for $\forall t \in I$, $i = 1, \cdots, 2m+2$

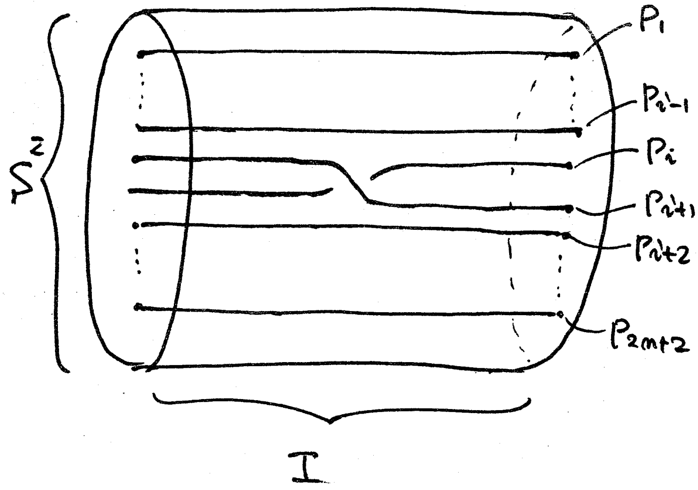
ときめる。そして $\sim_a$ と $\sim_b$ から generate される同値関係を $\sim$ と書き、これで $\widetilde{H}(n)$ をわったsetを $H(n)$ と書く。

$\widetilde{H}(n)$ の元は $S^2\times I$ の link と見ることができる。これを L とすると，L が属する $H(n)$ の class を $[L]$ と書く。

さて、$H(n)$ に積を定義する。$\tau_1: S^2\times I \longrightarrow S^2\times I$ を $\tau_1(a,t)=(a,\frac{t}{2})$ ，$\tau_2: S^2\times I \longrightarrow S^2\times I$ を $\tau_2(a,t)=(a,\frac{1}{2}+\frac{t}{2})$ とする。 $[L]$，$[L'] \in H(n)$

$\widetilde{L}=\tau_1(L)\cup\tau_2(L')$ として

$[\widetilde{L}]=[L]\cdot[L']$ で積を定義する。この積は well-def. でこの積により $H(n)$ に群をなす。



左図の様な link を L_i とすると $L_i\in\widetilde{H}(n)$ なので，$l_i=[L_i]$ として $H(n)$ の元がきまる。$H(n)$ は l_1, $l_2,\cdots,l_{2n+1}$ によって generate されるが，この群は Magnus によって決定された群と同型になるので，次の様な表示をもつ

<u>Theorem 4</u> [Magnus]

$H(n)$ は次の generator と relator で決定される。

- generators $l_1, \cdots, l_{2n+1}$
- defining relations

(i) $[l_i, l_j] = 1$ for $|i-j| \geq 2$

(ii) $l_i l_{i+1} l_i = l_{i+1} l_i l_{i+1}$

(iii) $(l_1 l_2 \cdots l_{2n+1})^{2n+2} = 1$

(iv) $l_1 l_2 \cdots l_{2n} l_{2n+1}^2 l_{2n} \cdots l_2 l_1 = 1$

(iii) さて、(i)で定義した$\Lambda(F)$と、(ii)で定義した$H(n)$には次の様な関係がある。

Theorem 5

Fをconnected orientable closed surfaceでgenusがnとする。ここで$n>1$とすると、

$\rho : \Lambda(F) \longrightarrow H(n)$ なる onto homo が存在して、$\ker \rho = \{1, T\}$ となる。

（証明の概略）

ρは次の様にして定義する。$f \in \Lambda(F)$に対し、$\hat{\Lambda}(F)$の元$\tilde{f}$で$\varphi(\tilde{f}) = f$となるものがある。(i)よりこの$\tilde{f}$に対して$g \in H(S^2)$が一意的に存在して、$gP = P\tilde{f}$となる。gはisotopic to id.だから、$G : S^2 \times I \longrightarrow S^2$で、$G_0 = id$, $G_1 = g$となるisotopyが存在する。このGに対し、$\hat{G} : S^2 \times I \longrightarrow S^2 \times I$を$\hat{G}(a, t) = (G_t(a), t)$と

定める。$L_0 = \bigcup_{i=1}^{2n+2} P_i \times I$ に対し，$L_f = \widetilde{G}(L_0)$ とし，$[L_f] = l_f$ として，$P(f) = l_f$ と定める。

この map が well-def. になれば他の性質はすぐ出てくる。この map が well-def. になるためには次のことが言えれば o.k.。

<u>Lemma 1</u> [Birman]

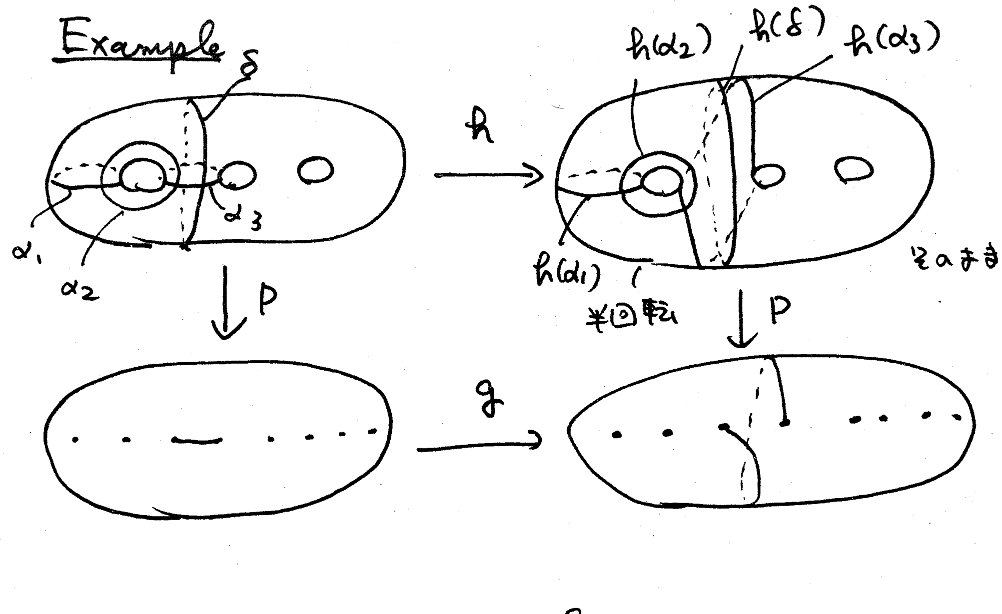
$n > 1$ として，F を connected closed orientable surface とする。$f \in \hat{\Lambda}(F)$ に対して，f と id が $H(F)$ において同じ connected component にはいれば，$\hat{\Lambda}(F)$ においても同じ connected component にはいる。

(証明は Look [BH])

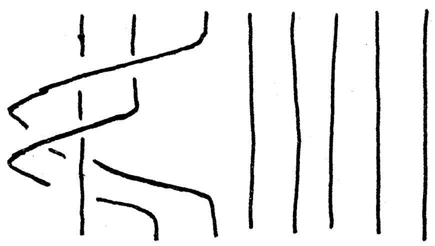
よって定理は成り立つ。

(iv) 上の結果を使って，$\Lambda(F)$ の元を Dehn twists の積で表わすことができる。

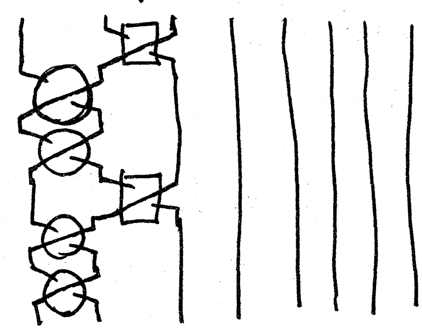
<u>Example</u>



δのまわりのhalf twistをhとする。この時 $\rho(h) = [L_h]$ を見てやると、$\rho(\delta)$のまわりのtwistに対応してるので、L_hは下の(Fig 1) つまり(Fig 2)の様にな

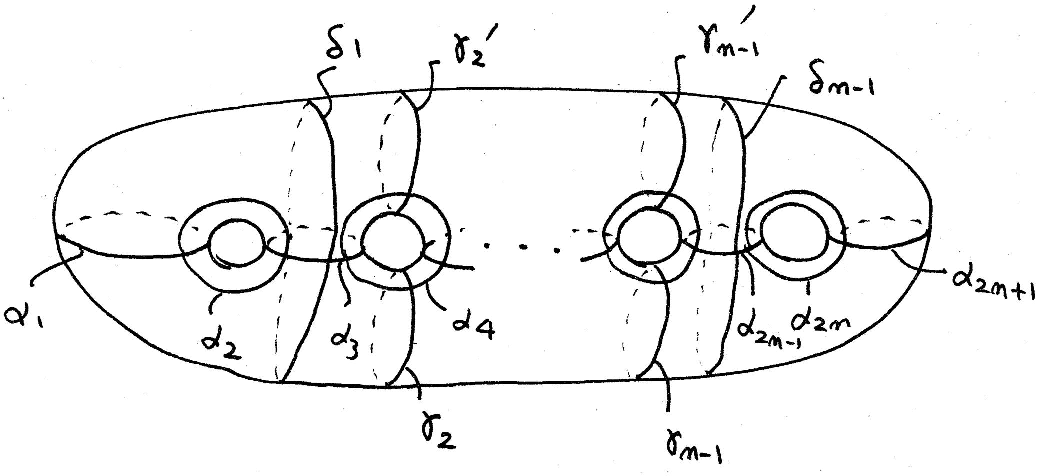


(Fig. 1)



(Fig 2)

っている。○に対応するのは$\Lambda(F)$においてはα_1のまわりのDehn twist a_1，□に対応するのはα_2のまわりのDehn twist a_2である。よって $\varphi(h) \equiv \varphi(a_1 a_1 a_2 a_1 a_1 a_2)$ (mod $\{1, T\}$) となる。実際に見てやると、 $\varphi(h) \equiv \varphi(a_1 a_1 a_2 a_1 a_1 a_2)$ となる。



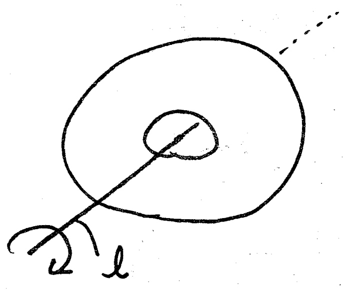
一般に genus n の surface に対し、surface F 上の loop を上の様にきめる。そして、α_i のまわりのDehn twist をa_i, δ_iのまわりのDehn twistをd_i, γ_iのまわりのDehn twistとγ_i'のまわりのDehn twistの積をc_i, δ_iのまわりのhalf twistを$\hat{d}_i$とする。この時 $d_i = \hat{d}_i \cdot \hat{d}_i$ となるが，Exampleと同じ様にやれば次のことがわかる。

<u>Proposition 1</u>

$$\hat{d}_i \simeq a_1 \cdot a_1 a_2 a_1 \cdot a_1 a_2 a_3 a_2 a_1 \cdot \cdots\cdots \cdots \cdot a_1 a_2 \cdots a_{2i} \cdots a_1 \cdot a_1 a_2 \cdots a_{2i}$$

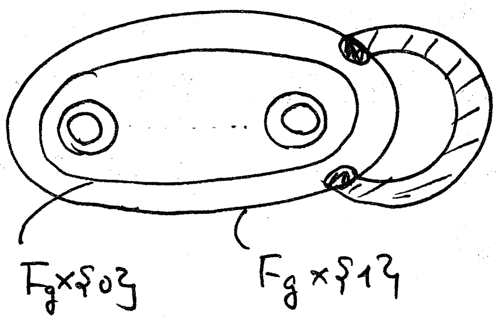
$$c_i \simeq a_1 \cdot a_1 a_2 a_1 \cdot a_1 a_2 a_3 a_2 a_1 \cdot \cdots \cdots\cdots \cdot a_1 a_2 \cdots a_{2i-1} \cdots a_1 \cdot a_1 a_2 \cdots a_{2i-1}$$

<u>Remark</u>　Theorem 5が $n=1$ で成立しないのは，Lemma 1が成立しないから。たとえば左の図で l 軸について180°回転させたhomeo f は $H(T)$ では id と arc によって結べるが，$\hat{\Lambda}(F)$ では結べない。$n>1$ の時はこの様なことがおこらない。

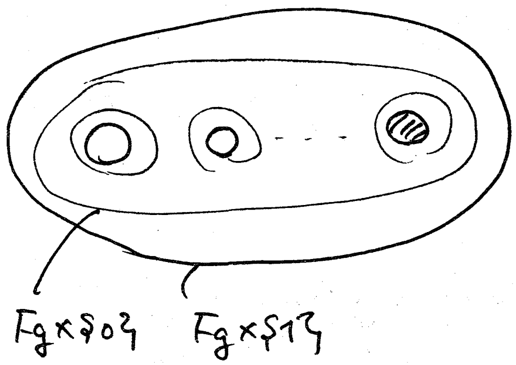


（※※）解析研で話した後に，横山さんから聞いたのですが，§2の(iii)までの様な内容は Birmanがやっているとのことです。(Look [B] ,[BH])

(v) 次に $\Lambda(F)$ と 3-mfd の 2-fold branched covering の関係について述べる。



$(g, g+1)$ で左図の様な 3-mfd を表わす。つまり
$(g, g+1) = (F_g \times I) \cup (D^1 \times D^2)$
ここで g は自然数（0 も含む）、F_g は genus g の closed ori. surface で、1-handle $D^1\times D^2$ は $F_g \times \{1\}$ にはりついているとする。 I は unit interval



$(g, g-1) = (F_g \times I) \cup (D^2 \times D^1)$
g は自然数（0 を含まない）で 2-handle は $F_g\times\{1\}$ 上の homotopic non-zero の curve にはりついているとする。（ただし T について invariant な curve とする）

(*) $(n_1, \cdots, n_m ; \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ で次の様な mfd を表わす。ただし $n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ で $|n_i - n_{i+1}| = 1$, $|n_1 - n_m| = 1$ $\alpha_i \in \Lambda(F_{n_i})$ とする。
$(n_i, n_{i+1}) = (F_g \times I) \cup (\text{handle})$ となっているが $\partial(n_i, n_{i+1})$ で $F_g \times \{0\}$ の方を $\overline{\partial}(n_i, n_{i+1})$,

のこりを $\partial^+(n_i, n_{i+1})$ とする。

さて、$(n_1, \cdots, n_m ; \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ は
$(n_1, n_2), (n_2, n_3), \cdots, (n_{m-1}, n_m), (n_m, n_1)$
を用意し　$\partial^+(n_{i-1}, n_i)$ と $\partial^-(n_i, n_{i+1})$ を α_i ではりあわせたmfdとする。($i=2,\cdots,m-1$ までだが、$i=1, m$ も同じ様にはりあわす。)

$$\underbrace{(n_1,n_2) \underset{\alpha_2}{\vee} (n_2,n_3) \underset{\alpha_3}{\vee} \cdots\cdots (n_{m-1},n_m) \underset{\alpha_m}{\vee} (n_m,n_1)}_{\alpha_1}$$

この様なmfd全体のsetを $\mathcal{M}$ とおく。

又、$[n_1 \cdots\cdots n_m, \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}]$ で次の様なmfdを表わす。

$$(0,1) \underset{\alpha_0}{\vee} (1,n_1) \underset{\alpha_1}{\vee} (n_1,n_2) \cdots \underset{\alpha_m}{\vee} (n_m,1) \underset{\alpha_{m+1}}{\vee} (1,0)$$

ただし
$n_1 = 0$ or 2, $n_m = 0$ or 2, $\alpha_0, \alpha_{m+1} \in \Lambda(F_1)$
$|n_i - n_{i+1}| = 1$, $\alpha_i \in \Lambda(F_{n_i})$ $(i=1,\cdots,m)$

つまり、(n_i, n_{i+1}) を用意し、$\partial^+(n_{i-1}, n_i)$ と $\partial^-(n_i, n_{i+1})$ をはりあわせさらに $(0,1)$ と $(1,0)$ をはりあわせる。この時　$\partial[n_1,\cdots,n_m,\alpha_0,\cdots,\alpha_{m+1}]$ は2個の2-sphereになるがここに3-ballをはりつける。このmfdを $\langle n_1,\cdots,n_m ; \alpha_0, \alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}\rangle$

と書く。(この mfd 全体を $\widetilde{\mathcal{M}}$ と書く) この時、次の定理が成り立つ

Theorem 6

$p : (M, \tilde{L}) \longrightarrow (S^2 \times S^1, L)$ 2-fold branched cover

$\Longleftrightarrow$ $M = N \# l(S^2 \times S^1)$

ただし、$N \in \mathcal{M}$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ で

$l \neq 0$ の時は $N = (m_1, \cdots, m_m, \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$

と書いた時 $m_i = 0$ なるものが一個はあるものとする。

Theorem 7

$p : (M, \tilde{L}) \longrightarrow (S^3, L)$ 2-fold branched covering

$\Longleftrightarrow$ $M = N \# l(S^2 \times S^1)$

ただし $N \in \widetilde{\mathcal{M}}$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

(証明はともに略)

Reference

[B] Birman, "Mapping class groups and their relationship to braid groups," Com. Pure and App. Math. 22 (213-238)

[BH] Birman & Hilden, "On the mapping class groups of closed surfaces as covering space," Ann. of Math Studies 66