数理解析研究所講究録
第346巻 1979年 80-87

Higher Separating of Links

広大・理　大川哲介

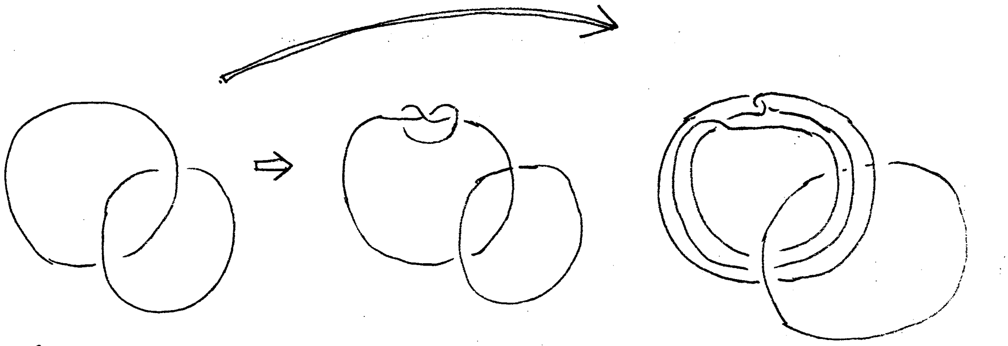
目的：　knot については，ある程度分ったものとし，その上に相対的な，link の不変量・性質・同値関係等を，調べる．最も基本的な不変量は，linking number であり，その拡張として，Milnor $\bar{\mu}$-invariant が定義されている。

ここでは，PL-isotopy，Fi-isotopy，n-separability 等について考える．主に群論的方法で不変量が定義されるので，コボルディズムとの関連は，はっきりせず，これからの問題と云える。

諸定義：　全て，S^3内の tame な link を考える．本論では向きは考えない．但し各成分には1からμまで（μは成分の数）番号がついているものとし，$L = \cup_{i=1}^{\mu} L_i$ の如く書表わす．（注：isotopyと云う以上は当然向きを考えているが，ここで考える invariant は，向きによらぬと云う意味である）

$L = \cup_{i=1}^{\mu} L_i$，$L' = \cup_{i=1}^{\mu} L'_i$ を μ-component link とする．Lの一つの成分上に局所的な knot を付加え

て，L'が得られるとき，L'はLに elementary PL-isotopic であると云い，その関係から得られた同値関係をPL-isotopicと云う．Lの1つの成分L_iの正則近傍をN（$N\cap L_j=\phi$ $(i\neq j)$）とし，$L'_j=L_j$ $(j\neq i)$，$L'_i\subset \mathrm{Int}\, N$，かつ$L'_i$の$N$に於けるwinding numberは1であるとき，L'はLに elementary F-isotopicであると云い，これにより生成された同値関係をF-isotopicと云う．F-isotopicは，PL-isotopicを含む．



elementary PL-isotopy　　elementary F-isotopy

Lが$(s_1, s_2, \cdots s_\mu)$-separableであるとは，次の条件を満たす多面体列K_{ij}が存在することを云う．　$(s_i\geq 0)$

① $K_{ij}\subset S^3$　$(i=1,\cdots \mu,\ j=0,1,\cdots s_i)$

② $L_i=K_{i0}\subset K_{i1}\subset\cdots\subset K_{is_i}$

③ $K_{is_i}\cap K_{js_j}=\phi$　$(i\neq j)$

④ $K_{i,p}\subset K_{i,p+1}$から導びかれる準同形 $H_1(K_{i,p};\mathbb{Z})\to H_1(K_{i,p+1};\mathbb{Z})$が零写像

$(i=1, \cdots \mu,\ p=0, 1, \cdots\ S_i-1)$

$(S, S, \cdots\ S)$-separable を，単に S-separable と云う．$\mu=2$，$p+q=p'+q'$ のとき，$(p, q, p', q' \geqq 0)$，(p, q)-separability と (p', q')-separability は同値であることがすぐ分る．

次に，群系なる概念を導入する．群 G と，$m_i, l_i \in G$ $(i=1, 2, \cdots\ \mu)$ の組 $\mathcal{G}=(G, m_1, l_1, \cdots\cdots\ m_\mu, l_\mu)$ を，群系と呼ぶ．$\mathcal{G}$ と $\mathcal{G}'=(G', m_1', l_1', \cdots\cdots\ m_\mu', l_\mu')$ が同値であるとは，${}^\exists\varphi : G \to G'$：同型写像，${}^\exists a_1, \cdots\ {}^\exists a_\mu \in G'$，$\varphi(m_i)=a_i^{-1} m_i' a_i$，$\varphi(l_i)=a_i^{-1} l_i a_i$ となることを云う．群 G の降中心列を $\Gamma_1 G = G$，$\Gamma_{n+1} G=[\Gamma_n G, G]$ で定める．さらに

$\mathrm{Cl}\,X$：X で生成された部分群

$\mathrm{NCl}\,X$：X で生成された正規部分群

$$A \sqcap B = \mathrm{Cl}\{b^{-1}ab \mid a \in A,\ b \in B\}$$

$$A_{pq}\,\mathcal{G} = \mathrm{NCl}\,\bigcup_{i=1}^{\mu} \Gamma_q\left(\{m_i\} \sqcap \Gamma_p \mathrm{NCl}\{m_i\}\right)$$

$$B_{pq}\,\mathcal{G} = \mathrm{NCl}\,\bigcup_{i=1}^{\mu} \Gamma_q\left(\{m_i, l_i\} \sqcap \Gamma_p \mathrm{NCl}\{m_i, l_i\}\right)$$

$$\tilde{A}_{pq}\,\mathcal{G} = G / A_{pq}\,\mathcal{G}$$

$$\tilde{B}_{pq}\,\mathcal{G} = G / B_{pq}\,\mathcal{G}$$

$\mathcal{G}=\{G, m, l\}$ に対し　$C_0\,\mathcal{G}=G$，

$$C_{n+1}\,\mathcal{G} = [C_n\,\mathcal{G}, C_n\,\mathcal{G}] \cdot (\{m\} \sqcap C_n\,\mathcal{G})$$

一般の$\mathcal{G}$に対して

$$C_n\mathcal{G} = \mathrm{Cl}\ \bigcup_{i=1}^{\mu} C_n(G, m_i, l_i)$$

$$\widetilde{C}_n\mathcal{G} = G/C_n\mathcal{G} \qquad \cdots と定義する.$$

link $L = \bigcup_{i=1}^{\mu} L_i$ が与えられたとき，それに対する群系$\mathcal{G} = (G, m_1, l_1; m_2, l_2; \cdots ; m_\mu\ l_\mu)$，を，$G = \pi_1(S^3 - L)$，$m_i, l_i$ は各々，L_iの meridian，longitude，$(m_i, l_i) = 1$ $(i = 1, \cdots \mu)$ として与える．この様な与え方は，変換 $m_i \to m_i^{\pm 1}$，$l_i \to l_i^{\pm 1}$，及び群系の同値を除いて一意に定まる．初めにLをS^3内の link に限ったが，以後，断わらぬ限り，$L \subset M^3$ (M^3 : connected 3-mfd) として考える．このとき，l_iのとり方として，L_iがM^3で homologous to 0 のときはl_iも，$M^3 - L_i$で homologous to 0のものを取り，そうでない場合は，単なる longitude を勝手に取る．最初に述べた，PL-isotopy 等の概念は，一般のM^3内でも，同様に定義出来る．

諸定理：

定理 1. L, L'を，M^3内の link (with μ-components)，それらに対する群系を，$\mathcal{G}$，$\mathcal{G}'$とせよ．そのとき

i) LとL'がPL-isotopicならば

$$\widetilde{A}_{pq}\mathcal{G} \approx \widetilde{A}_{pq}\mathcal{G}' \qquad (p, q \geqq 1)$$

ii) LとL'が，F-isotopicならば，

$\widetilde{B}_{pq}\mathcal{G} \approx \widetilde{B}_{pq}\mathcal{G}'$　$(p, q \geqq 1)$

（但し $\approx$ は群の同型を意味する）

定理 2. LをM^3内のlinkで，LはS－separableであるとする．Lの群系を$\mathcal{G} = (G, m_1, l_1, \cdots m_\mu, l_\mu)$とするとき，$l_i \in C_s \mathcal{G}$　$(i = 1, \cdots \mu)$

系. LをS^3内の2－component link，$\mathcal{G} = (G, m_1, l_1; m_2, l_2)$をその群系，$\mathcal{G}' = (G, m_1, l_1)$とする．Lが$(S, 0)$－separableならば$l_1 \in C_S \mathcal{G}'$

定理1の系. LをS^3内のlinkとする．$G = \pi_1(S^3 - L)$とするとき　$G/\Gamma_p G$　$(p = 1, 2, \cdots)$は　LのF－isotopy－invariantである．

注意：これはGiffenの結果（F－isotopy ⇒ topological cobordant）Stallingsの結果（$G/\Gamma_p G$はtopological cobordism invariant）を使っても得られる．しかし，我々の結果は$p = \infty$　（但し$\Gamma_\infty G = \bigcap_{i=1}^{\infty} \Gamma_p G$）でも成立する．定理1も　$1 \leqq p, q \leqq \infty$として成立する．証明は，以下に述べる有限の場合と全く同様である．

定理 3. LをM^3内のlinkで，M：compactとする．さらにHを有限群とするとき，$\widetilde{A}_{pq}\mathcal{G}$，$\widetilde{B}_{pq}\mathcal{G}$，$\widetilde{C}_p\mathcal{G}$からHへの準同形の総数，全写準同型の総数等は計算可能である．但し$\mathcal{G}$は，link Lの群系．

固定された群Hへの準同型の総数等は明らかに群の不変量であるから，これを経由し，link のPL(F)−isotopy invariantとなり，またS−separableでないことを判定出来る計算可能不変量となっている．ここでは有限群を值域に考えたが，有限次元線型群を考えると，準同型全体は，定義域が有限生成なら，有限次元 affine variety となり，その座標環も計算可能となるから，より能率的な不変量を得ることが出来る．以下，定理1の略証を与えることにする

定理1の略証．

①$A_{p,g}$ $\mathcal{G}$ 等の構成法より，$\mu=1$，即ち knot の場合に証明すれば，十分である。

②さらに elementary PL(F)−isotopy の場合に限って良い．

③L'をLに elementary PL(F)−isotopic な knot とする．$G=\pi_1(M^3-L)$，$G'=\pi_1(M^3-L')$，N：Lの閉正則近傍，$L'\subset \mathrm{Int}\,N$とする．すると，図式

$$M^3-\mathrm{Int}\,N \supset \partial N \subset N-L'$$

より，

$$G'=\text{push out}\left\{\begin{array}{c} G \leftarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow \pi_1(N-L')\end{array}\right\} \qquad (1)$$

が得られる．さらにPL−isotopyの場合は，N_1：Lのある1点の十分小さな正則近傍で，$N_1\cap L\approx I$かつ これは，

N_1の中で knot していないとし，$L-N_1=L'-N_1$とする．

すると，$\pi_1(M-L)=\pi_1(M-(L\cup N_1))=G$となる．図式

$$M-L-\mathrm{Int}\,N_1\supset\partial N_1-L\subset N_1-L'$$

より，

$$G'=\text{push out}\left(\begin{tikzcd}[column sep=small] G & & \pi_1(N_1-L') \\ & \mathbb{Z} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}\right) \quad (2)$$

が成立する．(1), (2)に於ける$\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}$は$\{m,l\}$, $\{m\}$によって生成されたGの部分群とも見られる．但し$\mathcal{G}=\{G,m,l\}$をLの群系とする．これらの図式に操作$\tilde{A}_{pq}$，$\tilde{B}_{pq}$を施して，自然射$G\to G'$がこれらの群の同型を惹起することを云えば良い．図式①，②の push out 図式に現れる射を次の如く名付ける．

(1)
$$\begin{tikzcd} & G' & \\ G \arrow[ur, "\gamma_1"] & & \pi_1(N-L') \arrow[ul, "\delta_1"'] \\ & \mathbb{Z}^2 \arrow[ul, "\alpha_1"] \arrow[ur, "\beta_1"'] & \end{tikzcd}$$

(2)
$$\begin{tikzcd} & G' & \\ G \arrow[ur, "\gamma_2"] & & \pi_1(N_1-L') \arrow[ul, "\delta_2"'] \\ & \mathbb{Z} \arrow[ul, "\alpha_2"] \arrow[ur, "\beta_2"'] & \end{tikzcd}$$

④ β_1，β_2は，Abel化群の同型を引起こす。

⑤ これより，$\Gamma_2\pi_1(N_1-L')=\Gamma_3\pi_1(N_1-L')=\Gamma_4\cdots\cdots$

及び，$\Gamma_2\pi_1(N-L')=\Gamma_3\pi_1(N-L')=\Gamma_4\cdots\cdots$

が従う．

⑥ さらに，

$$\pi_1(N-L') \subset \{m, l\} \sqcap \pi_1(N-L')$$

$$\pi_1(N_1-L') \subset \{m\} \sqcap \pi_1(N_1-L')$$

⑦これらと⑤を合わせて

$$\pi_1(N-L') \subset \{m, l\} \sqcap \Gamma_p\, \pi_1(N-L')$$

$$\pi_1(N_1-L') \subset \{m\} \sqcap \Gamma_p\, \pi_1(N_1-L')$$

⑧さらに

$$\widetilde{A}_{pq}\{\pi_1(N_1-L');\ m,\ l\} \approx \mathbb{Z}$$

$$\widetilde{B}_{pq}\{\pi_1(N-L');\ m,\ l\} \approx \mathbb{Z}^2$$

と合わせて求める結果を得る.

定理2，3の証明は略するが，定理2の証明は本質的に同じ考えで出来る．幾何学的には，$\{m\}\sqcap\cdots\cdots$を取っているところからも分る様に，meridean以外の部分をほぐすcoveringを操り返し使ってlinkの成分を分離するところにある．定理1では，2回しかくり返していないが，多重に操り返すことにより，$\widetilde{A}_{p_1p_2\cdots p_n}G$，$\widetilde{B}_{p_1p_2\cdots p_n}G$なる不変量を得ることが出来る．