数理解析研究所講究録
第 348 巻 1979 年 110-126

ある整函数の可換性について

東工大 理　　小林 忠

$f(z)$, $g(z)$ は整函数で $f(g(z)) = g(f(z))$ となっているならば $f(z)$ と $g(z)$ とは可換であるという。

与えられた整函数に対してこれと可換な整函数をすべて決定することが問題とされており現在までに種々の結果が得られている。

$f(z)$, $g(z)$ は互いに可換な整函数とする。当然

$$f'(g(z))\,g'(z) = g'(f(z))\,f'(z)$$

である。よって $g'(z)=0$ ならば $f'(z)=0$ 又は $g'(f(z))=0$, $f'(z)=0$ ならば $g'(z)=0$ 又は $f'(g(z))=0$ であるが仮りに $f'(z)$ の零点と $g'(z)$ のそれとが位数を含めて完全に一致していることが分かれば函数 $f(z)$ と $g(z)$ との関係をある程度導くことが出来る。即ち $f'(z)$, $g'(z)$ の零点の分布状況を調べることが可換な函数を決める一つの方法であろう。

この方向に沿って以下 $f(z) = z + e^z$ と可換となる函数

有限な整函数 $g(z)$ を決定してみよう.

まず $g'(z) \neq 0$ と仮定する. この時 $f(z)$ の相異なる零点 a, b に対して

$$\bar{N}(r,a,g) + \bar{N}(r,b,g) \leqq N(r,0,f')$$

となる. よって $g(z)$ の位数は高々 1 でかつ

$$g'(z) = \exp(Az+B)$$

である. $A \neq 0$ ならばある定数 s がとれて $g(z) \neq s$ となる. これは矛盾である. 結局函数 $g(z)$ は一次多項式で

$$g(z) = z + c, \quad e^{c} = 1$$

となる.

次に $g'(z)$ が零点をもっている場合を考える. $g'(z)$ の零点の全体集合を O とおく. 点 s が O の点ならば $f(z) = s$ に於いて $f'(g(z))g'(z) = 0$ である. 集合 O を次の三つの集合に分割する.

$A = \{ s \in O : f(z) = s$ の根はすべて $g'(z) = 0 \}$,

$B = \{ s \in O : f(z) = s$ の根はすべて $g'(z) \neq 0 \}$,

$C = O - (A + B)$.

点 s は集合 A の点とする. 点 t が $f(f(t)) = s$ ならば $g'(f(t)) = 0$. よって $g'(t) = 0$ 又は $f'(g(t)) = 0$ である.

$f'(g(t)) = 0$ ならば $f'(z) - 1 = f(z) - z = e^{z}$ から

$$-1 = f(g(t)) - g(t) = \exp(g(t)).$$

故に $f'(g(t))=0$ ならば

$$\begin{aligned} g(s) &= f(g(f(t))) \\ &= g(f(t)) + \exp(g(f(t))) \\ &= g(t) - 1 - e^{-1}. \end{aligned}$$

以上から $f(f(t))=s$ となる点 t に於いては $g'(t)=0$ 又は $g(t)=1+e^{-1}+g(s)$ である。これは $F(z)=f(f(z))$, $c=1+e^{-1}+g(s)$ の下に

$$\overline{N}(r,s,F) \leqq N(r,0,g') + N(r,c,g)$$

を意味している。函数 $g(z)$ の位数は有限であるから当然 $\overline{N}(r,s,F)$ の位数も有限となる。これは矛盾である。結局集合 A は空集合となっている。

点 s は集合 C の点と仮定する。この時 $f(u)=s$, $f(v)=s$, $g'(u)=0$, $g'(v)\neq 0$ となる点 u, v がとれる。$f'(g(v))g'(v) = g'(f(v))f'(v)=0$ から $f'(g(v))=0$. よって $g(s)-g(v)=\exp(g(v))=-1$ となっている。ここで点 w は $f(z)=u$ の根でかつ $g'(w)\neq 0$ とする。$g'(u)=0$, $f(w)=u$, $g'(w)\neq 0$ から $f'(g(w))=0$. よって

$$g(u)-g(w)=\exp(g(w))=-1.$$

故に $g(s)=f(g(u))=g(w)-1-e^{-1}$ となる。以上から $g(v)$ と $g(w)$ とは

$$g(w)-g(v)=e^{-1},$$

$$\exp(g(w)-g(v)) = 1$$

となり矛盾である．結局 $f(z)=u$ の根はすべて $g'(z)$ の零点となる．$u \in O$ であるから点 u は集合 A の点となる．これは $A=\phi$ に矛盾する．故に集合 C も $C=\phi$ となっている．以上から $O=B$ である．

点 s を $g'(z)$ の零点とおく．当然 $g'(f(s))f'(s) = f'(g(s))g'(s)=0$．$g'(f(s))=0$ ならば $f(s) \in O=B$．よって $g'(s) \neq 0$ となり矛盾．結局 $g'(z)$ の零点に於いては $f'(z)=0$ かつ $g'(f(z)) \neq 0$ となる．

以下点 s は $g'(z)$ のある零点とする．$s \in B$ から $f(z)=s$ の根は $g'(z)\neq 0$．よって $f(z)=s$ では $f'(g(z))=0$ となっている．恒等式

$$f''(g(z))(g'(z))^2 + f'(g(z))g''(z)$$
$$= g''(f(z))(f'(z))^2 + g'(f(z))f''(z),$$
$$f'(z) = 1 + f''(z)$$

に留意すると $f(z)=s$ の根は

$$g''(s)(f'(z))^2 = f''(g(z))(g'(z))^2$$
$$= (f'(g(z))-1)(g'(z))^2$$
$$= -(g'(z))^2$$

となっている．特に $g''(s) \neq 0$ である．

点 t を函数 $F(z)=f(f(z))$ のある s-点とおく．当然，

$$g'(f(t))f'(t) = f'(g(t))g'(t)$$

である．又 $f(f(t))=s$ から

$$g''(s)(f'(f(t)))^2 = -(g'(f(t)))^2.$$

恒等式 $f'(z) = 1 - z + f(z)$ に留意すると

$$f'(f(t)) = 1 - f(t) + f(f(t))$$
$$= 1 - f(t) + s,$$
$$f'(g(t)) = 1 - g(t) + g(f(t)),$$
$$f'(g(f(t))) = 1 - g(f(t)) + f(g(f(t)))$$
$$= 1 - g(f(t)) + g(s)$$

となっている．$f(f(t))=s$ から $f'(g(f(t)))=0$．よって $g(f(t)) = 1+g(s)$．故に

$$f'(g(t)) = 2 - g(t) + g(s)$$

となる．以上から $F(z)=s$ の根 t は

$$(g'(t))^2(2+g(s)-g(t))^2$$
$$= -g''(s)(f'(t))^2(1+s-f(t))^2$$

を満たす．ここで整函数

$$G(z) = (g'(z))^2(2+g(s)-g(z))^2$$
$$+ g''(s)(f'(z))^2(1+s-f(z))^2$$

を定義する．$g(z)$ と $f(z)$ の位数は有限であるから $G(z)$ は位数有限となっている．一方 $F(z)=s$ の根はすべて $G(z)$ の零点である．よって

$$\overline{N}(r, s, F) \leqq N(r, 0, G)$$

となる。この不等式から $G(z) \equiv 0$ が結論される。故にある適当な定数 $A \neq 0$ をもって

$$(2 + g(s) - g(z))\, g'(z)$$
$$= A\,(1 + s - f(z))\, f'(z)$$

である。結局函数 $g(z)$ は

$$2\, g(z) + g(s)\, g(z) - \frac{1}{2}(g(z))^2$$

$$= A\,\{f(z) + s\, f(z) - \frac{1}{2}(f(z))^2\} + B$$

となっている。定数 B を以下求めてみよう。点 α は $f'(\alpha) \neq 0$ かつ $f(\alpha) = 1 + s$ となっているものとする。この点 α について

$$4\, g(\alpha) + 2\, g(s)\, g(\alpha) - (g(\alpha))^2$$
$$= A\,\{\, 2 + 4s + 2s^2 - (1+s)^2 \} + 2B.$$

故に $g'(\alpha) \neq 0$ かつ $g(\alpha) = 2 + g(s)$ に留意すると

$$(2 + g(s))^2 = A\,(1+s)^2 + 2B.$$

以上から

$$(g(z) - 2 - g(s))^2 = A\,(f(z) - 1 - s)^2.$$

よってある定数 $\alpha \neq 0$, β をもって

$$g(z) = \alpha\, f(z) + \beta$$

となっている。$f(g(z)) = g(f(z))$ から α, β を求めると

$$\alpha = 1, \quad e^{\beta} = 1$$

である.

定理. $f(z) = z + ce^{az}$, $ac \neq 0$ とおく. $f(z)$ と可換な位数有限な整函数は $\exp(ab) = 1$ となる定数 b をもって $f(z) + b$ 又は $z + b$ に限る.

この方法は $z + \sin(z + c)$ の場合にも適応される.

定理. $f(z) = z + \sin(z + c)$ とおく. $g(z)$ は多項式ではない位数有限な整函数で $f(z)$ と可換なもの. この時 $g(z) = f(z) + a$, $\cos a = 1$ 又は $g(z) = b - f(z)$, $\cos(b + 2c) = 1$ である.

次に導函数の零点分布を調べることにより整函数

$$ze^{z} + \exp(ze^{z})$$

の一意分解性を証明しよう.

$f(z) = z + e^{z}$, $g(z) = ze^{z}$, $H(z) = f(g(z))$ とおく.

$$\begin{aligned} H'(z) &= f'(g(z))\, g'(z) \\ &= \{1 + \exp(g(z))\}(1 + z)e^{z} \end{aligned}$$

$$= \{1 - g(z) + H(z)\}(1+z)e^z$$

である．よって $H(0)=1$，$H'(0)=2$．又 $H'(z)$ の零点はすべて単根であることに留意する．

$F(z)$，$G(z)$ は共に整函数で

$$H(z) = f(g(z)) = F(G(z))$$

となっているもの．この時 $F(0)=1$，$F'(0)=2$，$G(0)=0$，$G'(0)=1$ と仮定出来る．この仮定の下に (1) $F(z)=f(z)$，$G(z)=g(z)$ (2) $F(z)=2z+1$，$2G(z)=H(z)-1$ 又は (3) $F(z)=H(z)$，$G(z)=z$ であることを示せば函数 $H(z)$ の一意分解性（整函数族に於いて）が証明される．

$F'(z)$ の零点が有限個の場合には $F(z)$ が一次多項式に退化し $F(z)=2z+1$ となることが分る．よって以下 $F'(z)$ の零点は無限個あるものとする．点 w が $F'(z)=0$ ならば $G(z)=w$ の根は $H'(z)=F'(G(z))G'(z)=\{1-g(z)+H(z)\}(1+z)e^z$ から $g(z)=1+F(w)$ 又は $z=-1$ となる．これから $T(r,G)=O(r)$ である．

$G'(-1)\neq 0$ と仮定する．$G(t)=G(-1)$，$t\neq -1$ となる点 t が存在すると $H(t)=F(G(-1))$ から $H(t)$ は実数となる．又 $G'(-1)\neq 0$ から $F'(G(-1))=0$．故に $F'(G(t))=0$．これから $H(t)=g(t)-1$，$\exp(g(t))=-1$．よって $H(t)$

は実数ではない．矛盾である．結局 $G(-1) \neq 0$ ならば $G(z) = G(-1)$ の根は $z=-1$ のみとなる．

各整数 n について $c_n = (2n+1)\pi i$ の下に集合

$$E_n = \{ s : F'(s) = 0,\ F(s) = c_n - 1 \}$$

を定義する．

ある整数 ν について集合 E_ν が無限個の点からなっているとする．$s_1, \cdots, s_m$ を E_ν の m 個の点とすると $G(z) = s_j$ の根は $H'(z)$ の零点であるから $g(z) = c_\nu$ 又は $z = -1$ となる．よって

$$(m - 1 + o(1))\, T(r, G) \leqq \sum_{j=1}^{m} N(r, s_j, G)$$

$$\leqq N(r, c_\nu, g) + \log^+ r$$

である．m の任意性から結局 $T(r, G) = o(r)$．一方無限集合 E_ν は非有界で E_ν の各点 s について $G(z) = s$ の根は $z=-1$ 又は $g(z) = c_\nu$ であるから $G(z) = s$ の根はすべて領域 $Re\, z \leqq |c_\nu|$ に分布している．以上から函数 $G(z)$ は高々2次の多項式となる．$G(-1) = 0$ ならば $G(0) = G(-2)$。故に $H(0) = H(-2)$ となり矛盾．結局 $G(-1) \neq 0$ から $G(z) = z$ が結論される．

以下集合 E_n はすべて有限集合とおく．再び $G(-1) \neq 0$ と仮定する．$G(z) = G(-1)$ の根は $z=-1$ のみということから

$T(x, G) = O(x)$ に留意すると定数 a, b をもって

$$G(z) = G(-1) + (z+1)\exp(az+b)$$

と表示される．当然

$$G'(z) = (az+a+1)\exp(az+b)$$

である．$a \neq 0$ と仮定しよう．この時 $u = -1-a^{-1}$ の下に $H(u) \neq c_m - 1$ となる整数 m がとれる．点 t が $g(z) = c_m$ の根ならば $H(t) = c_m - 1$，$H'(t) = 0$．又 $t \neq u$ に留意すると $G'(t) \neq 0$．よって $F'(G(t)) = 0$．結局 $G(t)$ は集合 E_m の点となる．逆に E_m の点 s について $G(z) = s$ の根 v は $g(v) = c_m$ となることが分る．以上から $s_1, \cdots, s_p$ を E_m のすべての点とすると

$$Q(z) = (z-s_1)\cdots(z-s_p)$$

の下に $Q(G(z))$ と $g(z) - c_m$ との零点は完全に一致する．よってある定数 a', b' をもって

$$g(z) = c_m + Q(G(z))\exp(a'z+b')$$

となる．点 s を $F'(z)$ の零点でかつ $s_1, \cdots, s_p, G(-1)$ とは異なるものとする．$G(z) = s$ の根は $g(z) = 1 + F(s)$ となるから方程式

$$g(z) = c_m + Q(G(z))\exp(a'z+b'),$$

$$g(z) = 1 + F(s)$$

は無限に多くの共通根をもっている．これから $a' = 0$ が示

される．結局

$$g'(z) = Q'(G(z))G'(z)e^{t}$$

から $g'(u)=0$．故に $u=-1$ となり矛盾である．以上から $G'(-1)\neq 0$ ならば $G(z)=z$ である．

$G'(-1)=0$ と仮定する．実変数 x をもって曲線

$$I=\{G(x);\, x\geqq -1\},\quad J=\{G(x);\, x\leqq -1\}$$

を考える．$x=-1$ を除くと $G'(x)\neq 0$ であるから曲線 I, J は共に始点 $G(-1)$ 以外では滑らかとなっている．$H(z) = f(g(z)) = F(G(z))$ から函数 $F(z)$ によって I は実軸上の半直線 $\{t:\, t\geqq H(-1)\}$ に，J は実軸上の線分 $\{t;\, H(-1)\leqq t<1\}$ に写像されている．又 I, J は共に単純曲線でかつ I, J の各点で $F'(z)\neq 0$ となっていることが分る．これらのことから曲線 J は I の一部と完全に一致しかつ J は点 $G(0)=0$ に終ることが結論される．これは z を実軸の負の部分に沿って $z\to\infty$ とした時 $G(z)$ は 0 に収束することを意味している．ここで函数 $g(z)$ の値分布に注意すると任意の δ $(0<\delta<\pi/2)$ に対して $|\theta-\pi|\leqq\delta$ に於いて一様に

$$\lim_{r\to+\infty} G(re^{i\theta})=0$$

となることが分る．恒等式

$$F'(G(z))G'(z)=\{1+\exp(g(z))\}g'(z)$$

を用いると $|\theta-\pi|\leqq\delta$ で一様に

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{G'(xe^{i\theta})}{g'(xe^{i\theta})} = 1,$$

よって

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{G(xe^{i\theta})}{g(xe^{i\theta})} = 1$$

となっている. 以上から $1/G(z)$, $1/G'(z)$ の近接函数が評価されて

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{m(r,0,G)}{r} \geqq \frac{1}{\pi}, \quad \liminf_{r\to\infty} \frac{m(r,0,G')}{r} \geqq \frac{1}{\pi}$$

である. 集合 E_ν が2点 s_1, s_2 を含むと仮定する. $F'(0) = 2$ から $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$. 一方 $G(z) = s_j$ $(j=1,2)$ の根は $g(z) = c_\nu$ の根となるから

$$\{1+o(1)\} T(r,G) + N(r,0,G')$$

$$\leqq N(r,s_1,G) + N(r,s_2,G)$$

$$\leqq N(r,c_\nu,g).$$

結局 $N(r,c_\nu,g) \sim r/\pi$ に留意すると $N(r,0,G') = o(r)$. 故に $T(r,G) \sim r/\pi$ かつ零を除いたすべての有限複素数 t に対して $N(r,t,G) \sim r/\pi$ となる. これは

$$N(r,s_1,G) + N(r,s_2,G) \leqq N(r,c_\nu,g)$$

に矛盾する. よって集合 E_ν は高々1点からなっている. 次にある整数 ν について $E_\nu = \phi$ と仮定する. この時 $g(z) = c_\nu$ の根は $G'(z)$ の零点である. 故に

$$N(r, c_\nu, g) \leqq N(r, 0, G'),$$

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T(r, G)}{r} \geqq \frac{2}{\pi}.$$

一方 $F'(z)$ の相異なる2つの零点 a, b について

$$(1+o(1))\,T(r, G) + N(r, 0, G')$$
$$\leqq N(r, a, G) + N(r, b, G)$$
$$\leqq N(r, 1+F(a), g) + N(r, 1+F(b), g) + \log^+ r.$$

よって

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T(r, G)}{r} + \liminf_{r\to\infty} \frac{N(r, 0, G')}{r} \leqq \frac{2}{\pi}$$

となっている。これは矛盾。以上から各集合 E_ν は1点のみからなっている。

$E_0 = \{s\}$ とおく。当然 $F'(s) = 0$，$F(s) = i\pi - 1$。又 $G(z) = s$ の根は $g(z) = i\pi$ の根である。逆に $g(z) = i\pi$ の根は $E_0 = \{s\}$ から $G(z) = s$ の根か又は $G'(z)$ の零点でなければならない。$g(z) = i\pi$ の根を $\{a_\nu\}_{\nu\geqq 1}$ で示す。これらの点は $l = \{z : |g(z)| = \pi\}$ 上に分布している。簡単な計算から集合 l は一つの解析曲線でありかつ領域

$$\{z : Re\, z \leqq \pi,\ |\arg z| \leqq \arccos \frac{-1}{e\pi}\}$$

に含まれていることが分る。$Re\, a_1 > 0$，$a_2 = -i\pi$，$\nu \geqq 3$ に対しては $Re\, a_\nu < 0$ と仮定出来る。$z \neq -1$ では $g(z)$

$\neq 0$ であるから $g(z)$ は $z \neq -1$ では局所的に単葉である。よって各自然数 ν について

$$z_\nu(0) = a_\nu, \quad g(z_\nu(t)) = i\pi(1-t) \qquad 0 \leqq t < 1$$

となる単純曲線 $L_\nu = \{ z_\nu(t) : 0 \leqq t < 1 \}$ が定義される。これらの曲線 L_ν は始点 a_ν を除くと単連結領域 $\{ z : |g(z)| < \pi \}$ に含まれている。L_1 は a_1 から点 $z=0$ に終る曲線で $\nu \geqq 2$ については

$$\lim_{t \to 1} \operatorname{Re} z_\nu(t) = -\infty, \quad \lim_{t \to 1} \arg z_\nu(t) = \pi$$

となっている。よって各自然数 ν について $t \to 1$ の下に $G(z_\nu(t)) \longrightarrow 0$。故に函数 $G(z)$ は曲線 L_ν を点 $G(a_\nu)$ から点 $z=0$ に至る曲線

$$G(L_\nu) = \{ G(z_\nu(t)) : 0 \leqq t < 1 \}$$

に写像している。一方 $0 \leqq t < 1$ に於いて

$$F(G(z_\nu(t))) = f(i\pi - i\pi t)$$
$$= i\pi - i\pi t - \exp(-i\pi t)$$

である。$f(i\pi - i\pi t)$ は $0 \leqq t \leqq 1$ で単葉かつ $0 \leqq t < 1$ で

$$F'(G(z_\nu(t)))\, G'(z_\nu(t))\, z_\nu'(t)$$
$$= i\pi \exp(-i\pi t) - i\pi$$

であるから各曲線 $G(L_\nu)$ は単純で滑らかとなっている。又点 $G(a_\nu)$ を除くと $G(L_\nu)$ の各点で $F'(z) \neq 0$ である。ここで $F'(0) = 2 \neq 0$ に留意する。結局これらの考察から各曲線

$G(b_\nu)$ は互いに完全に一致していることが結論される。よって各自然数 ν について $G(a_\nu) = G(a_{\nu+1})$ となっている。

$G(a_\nu) \neq s$ と仮定すると $E_0 = \{s\}$ から $g(z) = i\pi$ の根は $G'(z)$ の零点となる。故に

$$N(r, 0, G') \geqq N(r, i\pi, g)$$

から矛盾が導ける。よって $G(a_\nu) = s$ であり $g(z) = i\pi$ の根と $G(z) = s$ の根とは完全に一致する。以上からある定数 A, B をもって

$$g(z) - i\pi = (G(z) - s)\exp(Az + B)$$

となる。函数 $g(z)$, $G(z)$ の漸近挙動から $\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$ に於いて $z \to \infty$ の下に

$$\exp(Az + B) \to \frac{i\pi}{s}$$

であるから $A = 0$、結局

$$G(z) = \alpha g(z) + \beta$$

となり $G(0) = 0$, $G'(0) = 1$ から $G(z) = g(z)$ となる。以上で $\mathfrak{F}(g(z))$ の整函数族での一意分解性が証明された。

合成という演算は非常に複雑であり，ここにとりあげた初等的な函数 $z + e^z$ と可換となる函数を見い出すことでさえ煩雑な考察をしなければならないようである。

可換，一意分解性等の合成に関する問題を解く手法は現在

のところ大別して二種類ある。

一つは問題とする函数を表示する型を重視するものである。これに関しては(2),(7),(8)を参照。

もう一つは値分布理論を用いて問題とする函数の値分布の特性を用いるものである。これについては(4),(5),(6)を参照のこと。

文献

1. Baker, I. N., Zusammensetzungen ganzer Funktionen, Math. Zeitschr., 69 (1958), 121-163.
2. Baker, I. N. and F. Gross, Further results on factorization of entire functions, Proc. Symp. in Pure Math., 11 (1968), 30-35.
3. Gross, F., Factorization of meromorphic functions, Math. Research Center, Washington D.C., 1972.
4. Ozawa, M., On uniquely factorizable entire functions, Kodai Math. Sem. Rep., 28 (1977), 342-360.
5. Ozawa, M., On uniquely factorizable meromorphic functions, Kodai Math. J., 1 (1978), 339-353.
6. Ozawa, M., Unique factorizability and permutability of meromorphic functions, Kodai Math. J.,
7. Urabe, H., Uniqueness of the factorization under composition of certain entire functions, J. Math. Kyoto

Univ., 18 (1978), 95-120.

8. Yang, C. C. and H. Urabe, On permutability of certain entire functions, J. London Math. Soc. (2), 14 (1976), 153-159.