数理解析研究所講究録
第 348 巻 1979 年 127-137

On a characteristic property of periodic entire functions

京都教育大　　占部 博信

定数 b $(\neq 0)$ に対して、次の様な整函数族 $G(b)$ を考える。

$$G(b) \equiv \{ f(z) = h(z) + H(z)\ ;\ h,\ H \text{ は非定数整函数で、 } H(z+b) \equiv H(z) \text{ かつ 位数 } \rho(h) < 1 \}.$$

この函数族は Baker-Gross [1] において考えられたものと同じであり、$J(b)$ (上で $h(z)$ が一次の多項式の場合) 等と共に、整函数の合成を演算とした分解の問題に関し、興味ある函数族である ([1], [7] 等参照)。

このとき、

<u>定理 1.</u>　定数 b_j $(\neq 0,\ j=1,2)$ に対して、$f(z) \in G(b_1)$, $g(z) \in G(b_2)$ とし、重複度も込めて、$f(z)=0 \rightleftarrows g(z)=0$ が、収束指数が 1 より小である点列集合を除いて、成立していると仮定する。このとき、ある定数 c $(\neq 0)$ が存在して、

$$f(z) \equiv c \cdot g(z)$$

であり、かつ、b_1/b_2 は有理数である。

今、$f(z)\in G(b_1)$, $g(z)\in G(b_2)$ を

$$f(z)=h(z)+H(z),\quad g(z)=k(z)+K(z),$$

$H(z+b_1)\equiv H(z)$, $K(z+b_2)\equiv K(z)$, 位数 $\rho(h)<1$ かつ $\rho(k)<1$ と表わすと、定理1の後半の条件は、関係式

$$(1)\qquad h(z)+H(z)=\bigl(k(z)+K(z)\bigr)\cdot R(z)\cdot e^{p(z)}$$

が、ある有理型函数 $R(z)$ ($\not\equiv 0$, 位数 $\rho(R)<1$) と、ある整函数 $p(z)$ に対して成立していることを意味している。示すべきことは、$R(z)$ も $p(z)$ も共に定数であることである。そうすれば必然的に b_1/b_2 は有理数でなければならぬことが簡単にわかる。

定理1において、さらにもし、ある z_0 に対して、$f(z_0)=g(z_0)\neq 0$ であれば、$f(z)\equiv c\cdot g(z)$ において、$c=1$ となり、$f(z)\equiv g(z)$ が結論される。従って、定理1は、有理型函数についての Nevanlinna の unicity theorems ([4] p. 121～128) との関連で言えば、$G(b)$ に属する函数はその零点集合でほぼ決まることを主張している。

ここで、「非定数周期整函数 $F(z)$ は、不動点 ($F(z)-z$ の零点) を常に無限個持つ。」という Gross [2] の結果を想起したい。不動点は、整函数の合成や iteration の理論においても重要な役割を持つ。ところで、定理1より容易に導かれる次

事実は、「周期整函数は、(重複度を込めた)不動点の集合で一意的に定まる」ことを示している。

<u>定理2.</u>　$H_j(z)$ $(j=1,2)$ をそれぞれ b_j $(\neq 0$, 定数$)$ を周期とする周期整函数とし、$H_1(z)$ の不動点の集合(重複度込み)と、$H_2(z)$ のそれとが、収束指数が1より小である点列集合を除いて、一致したと仮定する。このとき、

$$H_1(z) \equiv H_2(z)$$

でかつ、b_1/b_2 は有理数である。

[注意]、上の結果は、多変数の整函数の場合に、直接的に一般化が可能である。例として、2変数の場合を述べてみよう。そのために、定数 b, b' $(\neq 0)$ に対して、整函数族

$$G(b, b') \equiv \{ F(z, w) = f(z) + g(w) ;$$
$$f(z) \in G(b) \text{ かつ } g(w) \in G(b') \}$$

を考える。このとき、次のことがわかる。

定数 b_j, b_j' $(\neq 0, j=1,2)$ に対して、$F(z, w) \in G(b_1, b_1')$ かつ、$E(z, w) \in G(b_2, b_2')$ とし、もし、2変数 z, w の整函数 $p(z, w)$ が存在して、関係式

$$F(z, w) \equiv E(z, w) \cdot e^{p(z, w)}$$

が成立したとすれば、$p(z, w)$ は定数であり、かつ、b_1/b_2, b_1'/b_2' は共に有理数である。

定理1の証明には、次の様なBorel型のunicity theoremが使われる（cf. [5]）。

<u>補題A.</u>　$G_j(z)$は超越整函数、c_jは定数$(\neq 0)$、$g(z)$は整函数$(\neq 0)$で、条件：$T(r,g)=o(T(r,G_j))$, $r\to\infty$ $(j=1,\cdots,n)$を満たすとする。このとき、

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\cdot G_j(z)\equiv g(z) \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n}\delta(0,G_j)\leqq n-1$$

が成立する。但し、$T(r,*)$, $\delta(a,*)$はNevanlinna特性函数及びdeficiencyを表わす。

また、簡単であるが、次の事実も利用される。

<u>補題B.</u>　$w(z)$は位数$\rho(w)<1$なる有理型函数とし、定数$b\ (\neq 0)$とcに対して、

$$w(z+b)\equiv e^{c}\cdot w(z)$$

を満たせば、$w(z)$は定数である。

実際、$w(z)$が補題Bの仮定を満せば、

$$F(z)=w(z)\cdot\exp\left[-\frac{c}{b}z\right]$$

を考えると、$F(z+b)\equiv F(z)$が成立する。もし、$w(z)$が定数でなければ、$\rho(w)<1$ゆえ、$w(z)$は零点か極を持つ。そうするとF(z)の周期性より、$w(z)$の零点か極の収束指数は$\geqq 1$、従って、$\rho(w)\geqq 1$となり矛盾を生じる。

定理1の証明は非常に長いので、ここでは、ℓ_1/ℓ_2が有理数である特別な場合の証明を述べるだけにしたい。即ち、(1)の成立を仮定して、さらに、

(2) $\qquad \ell = m\ell_1 = n\ell_2 \quad (m, n$ は整数, $\neq 0)$

であるとき、

(3) $\qquad p(z)$ と $R(z)$ は共に定数

を示すことにする。

この場合、

(4) $\qquad H(z+j\ell) \equiv H(z), \quad K(z+j\ell) \equiv K(z)$

が任意の自然数 j に対して成立している。ここで、さらに、

(5) $$\begin{cases} h_j(z) = h(z+j\ell), & k_j(z) = k(z+j\ell), \\ R_j(z) = R(z+j\ell), & p_j(z) = p(z+j\ell) \end{cases}$$

とおく。

ところで、(4)と記号(5)に注意すると、(1)より

$$h_j - h = (k_j + K(z))R_j e^{p_j} - (k + K(z))Re^{p}$$

を得る。従って、

(6) $$(R_j e^{p_j} - Re^{p})K(z) = (h_j - h) - (k_j R_j e^{p_j} - kRe^{p})$$

を得る。(6)式を $j=1, 2$ として使い、$K(z)$ を消去すると、

$$R_2(h_1-h)e^{p_2} + R_1R_2(k_2-k_1)e^{p_1+p_2} - RR_2(k_2-k)e^{p+p_2}$$

$$+RR_1(h_1-h)e^{p+p_1}-R_1(h_2-h)e^{p_1}+R(h_2-h_1)e^{p}=0$$

となるが、この関係式を e^{p_2} で割れば、

(7) $$R_1R_2(h_2-h_1)e^{p_1}-RR_2(h_2-h)e^{p}+RR_1(h_1-h)e^{p+p_1-p_2}$$
$$-R_1(h_2-h)e^{p_1-p_2}+R(h_2-h_1)e^{p-p_2}=-R_2(h_1-h)$$

なる恒等式が得られる。ここで、

(8) $p(z)\neq\mathrm{const.}$

と仮定して、(7)より矛盾を導こう。そうするとまず、$p(z)$は定数がわかったことになる。

記号(5)と(8)より、$p_1\neq\mathrm{const.}$ であるが、さらに

$$-R_2(h_1-h)\neq 0$$

であることに注意しよう。実際、$R_2(z)=R(z+2b)\neq 0$ であり、また、$h(z)$ は位数 $\rho(h)<1$ なる非定数整函数ゆえ、補題Bにより、$h_1(z)-h(z)=h(z+b)-h(z)\neq 0$ であるから。

従って、もし、

(9) $p-p_1,\quad p-p_2,\quad p+p_1-p_2\neq\mathrm{const.}$

が示されれば、$p_1-p_2\neq\mathrm{const.}$ でもあるから、補題Aを(7)式に適用すると、矛盾が生じることになる。但し、(7)式へ補題Aを適用する際、

(10) $$R(z) = v(z)/u(z),$$

u, v は整函数，$\neq 0$，位数＜1 かつ共通零点なしと表示できるから、共通分母を掛けておけばよいことに注意したい。

まず、(8)のもとで、自然数 j に対して、

(11) $$p - p_j \neq \text{const.}$$

を示そう。そうでないとして、

(12) $$p_j - p = \text{const.} = c \quad \text{即ち、} \quad e^{p_j} \equiv e^c \cdot e^p$$

と仮定しよう。このとき

(13) $$e^c \cdot R_j - R \neq 0$$

であれば、(6)式は

(14) $$K(z) = \frac{h_j - h}{e^c R_j - R} \cdot e^{-p} - \frac{e^c k_j R_j - kR}{e^c R_j - R}$$

と書き替えられる。(4), (5)と(12)に注意すると、(14)より

$$\frac{h_j - h}{e^c R_j - R} = e^{-c} \cdot \frac{h_{2j} - h_j}{e^c R_{2j} - R_j}$$

$$\frac{e^c k_j R_j - kR}{e^c R_j - R} = \frac{e^c k_{2j} R_{2j} - k_j R_j}{e^c R_{2j} - R_j}$$

であり、補題Bにより、

$$(h_j - h)/(e^c R_j - R) = \text{const.} = c' \ (\neq 0)$$

$$(e^c k_j R_j - kR)/(e^c R_j - R) = \text{const.} = c'' \ (\neq 0)$$

従って、

(15) $$\begin{cases} h_j - h = c'(e^c R_j - R) \\ e^c k_j R_j - kR = c''(e^c R_j - R) \end{cases}$$

が導かれる。ここで、$R = v/u$ と(10)のように置き、さらに、$R_j = v_j/u_j$ $(u_j(z) = u(z+jl),\ v_j(z) = v(z+jl))$ と書くと、(15)の上の式は、$c'(e^c u v_j - u_j v) = u u_j (h_j - h)$ となり、この式を u で割ると、

(16) $$-c' \cdot u_j v/u = u_j(h_j - h) - c' e^c \cdot v_j$$

と書き直せる。

(16)式より $u(z) = \text{const.}$ がわかる。実際、$u(z) \neq \text{const.}$ ならば、位数 $\rho(u) < 1$ ゆえ、$u(z)$ は零点を持つ。ところで、u と v は共通零点を持たないので、$u(z_0) = 0$ なるとき、$u_j(z_0) = 0$、i.e. $u(z_0 + jl) = 0$ となり、さらに、必要ならば変数を z から $z + jl$ に変えると、再び(16)式より、$u(z_0 + 2jl) = 0$ となる。これを繰り返すと、任意の自然数 m に対して、$u(z_0 + mjl) = 0$ となる。従って、$u(z)$ の零点の収束指数は1より小ではあり得ない。ゆえに位数 $\rho(u) \geqq 1$ であることになるが、これは、$\rho(u) < 1$ に反する。

$u(z) = \text{const.}$ であるから(10)より $R(z) = v(z)$ と仮定しても一般性を失わないであろう。このとき、(15)の下側の関係

式は、 $e^c k_j v_j - k v = c''(e^c v_j - v)$ 即ち、

$$(c''-k)v \equiv e^c(c''-k_j)v_j$$

となる。補題Bより、

$$(17) \qquad (c''-k)v = \text{const.}$$

が結論される。ところが、kもvも整函数で、$k \neq \text{const.}$ かつ $v \neq 0$ ゆえ、明らかに(17)は不合理である。従って、(13)は成立し得ないから、

$$e^c R_j - R \equiv 0$$

であることになり、再び補題Bにより、

$$R(z) = \text{const.} = c''' \ (\neq 0) \quad \text{かつ} \quad e^c = 1$$

である。ところがこの場合には(14)式は

$$(18) \qquad (h_j - h)e^{-p} - c'''(k_j - k) = 0$$

となる。ここで、$h_j - h$, $k_j - k \neq 0$, $c''' \neq 0$ かつ、$p \neq \text{const.}$ ゆえ(18)式は成立し得ない。これは矛盾ゆえ、(11)が成立していなければならない。

次に、

$$(19) \qquad p + p_1 - p_2 = \text{const.} = c$$

と仮定しよう。このとき、(19)を使って、(7)からp_2を消すと、

$$R_1R_2(h_2-k_1)e^{p_1} - RR_2(h_2-h)\cdot e^{p} - e^c R_1(h_2-h)e^{-p}$$
$$+ e^c R(h_2-h_1)e^{-p_1} + [e^c RR_1(k_1-k) + R_2(h_1-h)] = 0$$

を得るが、これを e^{p_1} で割ると、

$$(20)\qquad -RR_2(k_2-k)e^{p-p_1}+[e^cRR_1(k_1-k)+R_2(h_1-h)]e^{-p_1}$$

$$-e^cR_1(h_2-h)e^{-p-p_1}+e^cR(h_2-h_1)e^{-2p_1}=-R_1R_2(k_2-k_1)$$

なる関係式が導かれる。ここで、前と同様に、$-R_1R_2(k_2-k_1)\neq 0$ であり、(8), (11) より、$p-p_1$, $-p_1$, $-2p_1\neq const.$ である。さらに、(19) より、$-(p+p_1)=-p_2-c\neq const.$ もわかる。従って、補題Aを (20) に適用することにより、(19) は正しくないことが結論される。

結局 (9) が示されたので、(8) が成立し得ない。即ち、

$$(21)\qquad p(z)=const.=c\ \ (say)$$

が示された。このとき、$p_j=c$ であるから、(21) ならば、(6) 式は、

$$(22)\qquad e^c(R_j-R)K(z)=(h_j-h)-e^c(k_jR_j-kR)$$

となる。

ところで、R_j-R 及び、(22) の右辺は共に位数 <1 であって、$K(z)$ は仮定より非定数周期整函数であり従ってその位数 $\rho(K)\geq 1$ ゆえ、もし $R_j-R\neq 0$ ならば、(22) の両辺の位数を比較して矛盾を生じる。ゆえに、$R_j-R\equiv 0$ でなければならない。従って、補題Bにより、$R(z)=const.$

結局、$p(z)$ も $R(z)$ も定数であることが示されたことになる。
即ち、(3) が示された。

References.

[1] Baker I.N. and Gross F., Proc. Symp. Pure Math. Vol. 11 (1968), 30-35.

[2] Gross F., Trans. Amer. Math. Soc. 131 (1968), 215-222.

[3] Hayman W.K., Meromorphic functions, (Oxford, 1964).

[4] Nevanlinna R., Le théorème de Picard-Borel ...., (Gauthier Villars, Paris, 1929).

[5] Niino K. and Ozawa M., Kodai Math. Sem. Rep. 22 (1970), 98-113.

[6] Ozawa M., Ibid. 28 (1977), 311-316.

[7] Urabe H., J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978), 95-120.

[8] Urabe H., Bull. Kyoto Univ. of Education Ser. B. 51 (1977), 1-4.

[9] Urabe H. and Yang C.-C., Proc. Japan Acad. Ser. A. 54 (1978), 142-144.