

Some notes on the theory of holomorphic curves.

名 大・教養 戸田暢茂  
三重大・教育 鈴木順二

## 1. 序

正則曲線の理論については、Ahlfors [2], Cowen-Griffiths [4], Weyl [5], Wu [6] にそれぞれの方法で詳しく述べられてゐるが、ここでは、正則曲線の order functions に関するいくつかの注意も与え、これらを活用することにより、いくつかの場合について、より精密な結果も述べる。

$$\alpha: |z| < R \rightarrow P^n(\mathbb{C}) \quad (n \geq 1, 0 < R \leq \infty)$$

を非退化な正則曲線、その 1 つの既約表現を

$$X = (x_1(z), \dots, x_{n+1}(z))$$

とする。ここに  $x_i(z)$  ( $i=1, \dots, n+1$ ) は共通零点をもたない  $|z| < R$  での正則函数である。  $\alpha$  の階数  $p$  の associated curves を  $X^p$  とすると、  $X^p$  は Plücker 座標を用いて

$$X^p = [X, dX/dz, \dots, d^{p-1}X/dz^{p-1}]$$

と表現される。このとき  $X^1 = X$  である。  $X^p$  ( $p=1, \dots, n$ ) の

order function を  $T_p(x)$  とする。このとき  $\mu = 2$  の主要定理として

$$(1) \quad V_p(x) + \{T_{p+1}(x) - 2T_p(x) + T_{p-1}(x)\} = \Omega_p(x) - \Omega_p(x_0)$$

$(x_0 < x < R)$  が成立することは、よく知られている。ここ

に  $x_0$  は正定数、 $V_p(x)$  は  $x$  の階数  $p$  の stationary indices に関する個数函数、

$$\Omega_p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{|x^{p+1}| \cdot |x^{p+1}|}{|x^{p+2}|} d\theta \quad (z = re^{i\theta})$$

である (Weyl [5], p. 123)。

正則曲線の理論においては、この  $\Omega_p(x)$  を order function  $T_p(x)$  によって評価することが本質的な事柄の一つであり、例えば、「 $R = \infty$  の場合、任意の  $\alpha > 1$  に対して、不等式

$$2\Omega_p(x) \leq \alpha \log T_p(x) - 2 \log x + O(1)$$

が  $E \subset [x_0, \infty)$  かつ  $\int_E x^{-1} dx < \infty$  なる閉集合  $E$  の外で成立する。」(Weyl [5], III 章) ことが知られている。

$R < \infty$  の場合も、これと同様な不等式が成立している (Weyl [5], IV 章)。Weyl [5] では独立変数として  $\log x$  ( $|z| = x$ ) と用いているが、ここでは常に  $x$  を用いることに注意する。

正則曲線に関する「Defect relations」を証明するとき  $\Omega_p(x)$  のような評価式は、本質的役割をはたし、よって必然的に「Defect relations」を証明するのに必要な、多くの不等式には、除外集合が伴う (Ahlfors [2], Weyl [5] etc)。

他方、 $|z| < R$  の有理型函数の Nevanlinna 理論においては、 $|z| < R$  における非常数、位数有限な有理型函数  $f(z)$  に対しては、 $\sigma =$  基本定理は、除外集合なしで成立している。但し、 $R < \infty$  のときは

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow R} \log T(r, f) / \log \frac{1}{R-r} = \infty$$

と仮定する。又  $|z| < R$  における正則函数系について、Cartan [3] により同様な結果が得られている。

以下、上で述べた有理型函数の場合と同様に、正則曲線の場合においても、 $T_1(r)$  が有限位数のとき、Ahlfors [4] において用いられる手法を用いて、除外集合を取り除くことが出来ること、及び  $R < \infty$  の場合の仮定 "A" (Weyl [5], p 201) が弱められること等を証明する。なお、記号等は主に Weyl [5] におけるものを用いる。

## 2. 補助定理

後で用いるため、いくつかの補助定理を用意する。

補助定理 1. (Weyl [5], p 155, p 197)

$f(x)$  は  $[x_0, R)$  で定義された函数で、非負かつ連続な、導函数もとら、 $f(x_0) \geq 1$  とする。このとき任意の  $\alpha > 1$ ,  $\mu \geq 0$  に対して

$$I) \quad R = \infty \text{ のとき: } f'(x) \leq \{f(x)\}^\alpha x^{\mu-1}$$

が  $E \subset [x_0, \infty)$  かつ  $\int_E x^{\mu-1} dx < (\alpha-1)^{-1}$  なる閉集合  $E$  の外で成立する。

II)  $R < \infty$  のとき:  $f'(x) \leq \{f(x)\}^\alpha (R-x)^{-\mu-1}$

が  $E \subset [x_0, R)$  かつ  $\int_E (R-x)^{\mu-1} dx < (\alpha-1)^{-\mu-1}$  なる閉集合  $E$  の外で成立する。

### 補助定理 2.

$f(x), F(x)$  は  $[x_0, R)$  で定義され,  $f(x)$  は連続で

$$1 + \log \frac{x}{x_0} + \int_{x_0}^x (\log x - \log t) \exp(f(t)) \frac{dt}{t} \leq F(x)$$

をみたすものとする。このとき、任意の  $\alpha > 1, \mu \geq 0$  に対して

I)  $R = \infty$  のとき:  $f(x) \leq \alpha^2 \log F(x) + \mu(\alpha+1) \log x$

が  $E \subset [x_0, \infty)$  かつ  $\int_E x^{\mu-1} dx \leq 2(\alpha-1)^{-1}$  なる閉集合  $E$  の外で成立する。

II)  $R < \infty$  のとき:

$$f(x) \leq \alpha^2 \log F(x) + (\mu+1)(\alpha+1) \log \frac{1}{R-x} + (\alpha+1) \log x$$

が  $E \subset [x_0, R)$  かつ  $\int_E (R-x)^{-\mu-1} dx \leq 2(\alpha-1)^{-1}$  なる閉集合  $E$  の外で成立する。

この補助定理は、補助定理 1 を用いることにより、Weyl [5], p156, p197 と同様に証明出来る。

定義  $R = \infty$  の場合で  $\alpha$  が非退化であるとき、又は

$R < \infty$  の場合で、 $\alpha$  が非退化かつ

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow R} T_p(x) = \infty \quad (p=1, \dots, n)$$

をみる。とき、正則曲線  $\gamma$  は admissible であるといふこと  
 になる。

注意  $R = \infty$  の場合は、 $\gamma$  が非退化なら

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T_p(x) = \infty \quad (p = 1, \dots, n)$$

は成立する (Weyl [5])。

補助定理 3.

$1 \leq R$  における任意の admissible な正則曲線  $\gamma$  に対して、  
 不等式

$$1 + \log \frac{x}{x_0} + \int_{x_0}^x (\log x - \log t) \exp(2\tilde{\Omega}_p(t)) \frac{dt}{t} \leq 2T_p(x)$$

が任意の  $x \in [R_0, R)$  ( $R_0 \geq x_0$ ) に対して成立する。こゝに  
 $\tilde{\Omega}_p(t) = \Omega_p(t) + \log t/x_0$  であり、 $R_0$  は曲線に依存して決まる定数であ  
 る。(Weyl [5], p 154, p 196 参照)

以後 §2, §3 においては、曲線はすべて admissible であ  
 るとする。補助定理 1, 2 を様々な曲線に適用すれば、補  
 助定理 3 から、次の命題を得る。

命題 1.

任意  $\alpha > 1$ ,  $\mu \geq 0$  に対して

I)  $R = \infty$  のとき:

$$2\tilde{\Omega}_p(x) \leq \alpha^2 \log T_p(x) + \mu(\alpha+1) \log x + O(1)$$

が  $E \subset [R_0, \infty)$  かつ  $\int_E x^{\mu-1} dx < \infty$  なる閉集合  $E$  の外で成  
 立する。

II)  $R < \infty$  のとき:

$$2\tilde{\Omega}_p(x) \leq \alpha^2 \log T_p(x) + (\mu+1)(\alpha+1) \log \frac{1}{R-x} + O(1)$$

が  $E \subset [R_0, R)$  かつ  $\int_E (R-x)^{-\mu-1} dx < \infty$  なる閉集合  $E$  の外で成立する。

この命題を用いれば、Weyl [5] と同様にして次の命題が得られる。

### 命題 2.

任意の  $\varepsilon > 0$ ,  $\mu \geq 0$  に対して  $x_1$  が存在して次の不等式が成立する。

I)  $R = \infty$  のとき:  $E \subset [x_1, \infty)$  かつ  $\int_E x^{\mu-1} dx < \infty$  なる閉集合  $E$  の外の任意の  $x \geq x_1$  に対して

$$(3) \quad T_{p+1}(x) < \left(1 + \frac{1}{p} + \varepsilon\right) T_p(x) + O(\log x)$$

$$(4) \quad T_{p-1}(x) < \left(1 + \frac{1}{n+1-p} + \varepsilon\right) T_p(x) + O(\log x)$$

II)  $R < \infty$  のとき:  $E \subset [x_1, R)$  かつ  $\int_E (R-x)^{-\mu-1} dx$  なる閉集合  $E$  の外の任意の  $x \geq x_1$  に対して

$$(5) \quad T_{p+1}(x) < \left(1 + \frac{1}{p} + \varepsilon\right) T_p(x) + O\left(\log \frac{1}{R-x}\right)$$

$$(6) \quad T_{p-1}(x) < \left(1 + \frac{1}{n+1-p} + \varepsilon\right) T_p(x) + O\left(\log \frac{1}{R-x}\right)$$

### 3. 定理とその応用

ここでは、 $T_p(x)$  の位数を調べ、命題 1, 及び 2 を改良する。 $T_p(x)$  の位数  $\rho_p$ , 及び劣位数  $\lambda_p$  は次の様に定義される。

る。

$$R = \infty \text{ のとき : } \rho_p = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \log T_p(x) / \log x$$

$$\lambda_p = \underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \log T_p(x) / \log x$$

$$R < \infty \text{ のとき : } \rho_p = \overline{\lim}_{x \rightarrow R} \log T_p(x) / \log \frac{1}{R-x}$$

$$\lambda_p = \underline{\lim}_{x \rightarrow R} \log T_p(x) / \log \frac{1}{R-x} .$$

### 定理 1.

すべての  $T_p(x)$  の位数は等しい。

証明  $R = \infty$  の場合は、Aalfors [2] より証明されている。  
よって  $R < \infty$  の場合について、Aalfors [1] で用いられた方法と応用して証明する。

$\rho_p < \infty$  と仮定する。このとき任意の  $\rho > \rho_p$  に対して、 $x_2 \geq x_1$  なる  $x_2$  が存在して、任意の  $x \in [x_2, R)$  に対して

$$T_p(x) \leq O\left(\frac{1}{(R-x)^\rho}\right).$$

ここで命題 2 II) (5) を応用する。(i)  $x \notin E$  の  $x_2 \leq x < R$  なる任意の  $x$  に対しては、

$$T_{p+1}(x) \leq O\left(\frac{1}{(R-x)^\rho}\right).$$

(ii) 次に  $x \in E$ ,  $x_2 \leq x < R$  なる  $x$  と考える。かかる  $x$  を含み、 $E$  の含まれる最長区間の右端点を  $x'$  とし、 $\mu = \rho$  とおけば、

$$(R-x')^{-\rho} - (R-x)^{-\rho} \leq \rho \int_E (R-x)^{-\rho-1} dx = O(1).$$

よって  $(R-x')^{-\rho} \leq (R-x)^{-\rho} + O(1)$

$$\log \frac{1}{R-x'} \leq \log \frac{1}{R-x} + O(1).$$

一方  $T_p(x)$  の増加性及び  $x' \in E$  なることより

$$T_{p+1}(x) \leq T_{p+1}(x') \leq O\left(\frac{1}{(R-x')^p}\right) \leq O\left(\frac{1}{(R-x)^p}\right) + O(1)$$

よって (i)(ii) より十分  $R$  に近いすべての  $x$  について

$$T_{p+1}(x) \leq O\left(\frac{1}{(R-x)^p}\right).$$

これは  $P_{p+1} \leq P_p$  を意味し、 $P_p < P_p$  なる  $P$  は任意であらうから  $P_{p+1} \leq P_p$ 。同様に命題 2. II) (6) を用いれば

$$P_p \leq P_{p+1}.$$

が得られ、 $P_p < \infty$  の場合の結果と得る。ある  $P_p = \infty$  の場合、もし  $P_p < \infty$  なる  $\alpha$  が 1 つでも存在すれば、上の議論により、すべての位数は有限、よって  $P_p = \infty$  に矛盾し、すべての  $T_p(x)$  の位数は無有限でなければならぬ (証明終)。

### 定理 2.

すべての  $T_p(x)$  の劣位数は等しい。

証明. I)  $R = \infty$  の場合: ある  $p$  について、 $0 < \lambda_p \leq \infty$  の場合について証明すれば十分である。そうでなければ、すべての劣位数は零で等しい。よって  $\lambda_p > 0$  とする。このとき、 $0 < \lambda < \lambda_p$  なる任意の  $\lambda$  に対して  $x_2 \geq x_1$  なる  $x_2$  が存在して、 $x \geq x_2$  なる任意の  $x$  に対して

$$T_p(x) \geq x^\lambda.$$

ここで命題 2. I), (3) を適用する。 (i)  $x \in E$ ,  $x \geq x_2$  なる任意の  $x$  に対して

$$x^\lambda \leq \left(1 + \frac{1}{p-1} + \varepsilon\right) T_{p-1}(x) + O(\log x) \quad (\forall \varepsilon > 0).$$

(ii)  $x \geq x_3$ ,  $x \notin E$  なる任意の  $x$  を考える。よから  $x$  を含み、 $E$  に含まれる最長区間の左端点を  $x''$  とし、 $\mu = \lambda$  とすれば

$$x^\lambda - x''^\lambda = \lambda \int_{x''}^x t^{\lambda-1} dt \leq \lambda \int_E t^{\lambda-1} dt = O(1)$$

$$\text{よって} \quad x^\lambda \leq x''^\lambda + O(1).$$

十分大なる  $x$  について  $x'' \in E$  かつ  $T_p(x)$  は増加函数であるから

$$\begin{aligned} x''^\lambda &\leq \left(1 + \frac{1}{p-1} + \varepsilon\right) T_{p-1}(x'') + O(\log x'') \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{p-1} + \varepsilon\right) T_{p-1}(x) + O(\log x'') \end{aligned}$$

よって (i), (ii) より十分大なる  $x$  について、 $x$  が  $E$  に属するかの否にかかわらず

$$x^\lambda \leq \left(1 + \frac{1}{p-1} + \varepsilon\right) T_{p-1}(x) + O(\log x) + O(1)$$

が成立する。これは  $\lambda \leq \lambda_{p-1}$  を意味し、 $\lambda < \lambda_p$  なる  $\lambda$  の任意性より、 $\lambda_p \leq \lambda_{p-1}$ 。同様に (3) の代りに (4) から議論をばじめれば、 $\lambda_{p-1} \leq \lambda_p$  が得られる。よって  $\lambda_p$  のうち 1 つで 0 零でなければ、すべての  $\lambda_p$  は零でなく等しい。

II)  $R < \infty$  の場合: 命題 2. II) を適用することにより、 $R = \infty$  の場合と同様に証明出来る。

### 定理 3.

$T_p(x)$  が有限位数ならば、任意の  $\alpha > 1$  に対して

I)  $R = \infty$  の場合: 十分大なるすべての  $x$  に対して

$$2\tilde{\Omega}_p(x) \leq \alpha^2 \log T_p(x) + O(\log x) + O(1)$$

II)  $R < \infty$  の場合:  $R$  に近いすべての  $x$  に対して

$$2\tilde{\Omega}_p(x) \leq \alpha^2 \log T_p(x) + O\left(\log \frac{1}{R-x}\right) + O(1)$$

が成立する。

証明 I)  $R = \infty$  の場合、 $T_1(x)$  の位数  $\rho_1 < \infty$  とする。このとき定理 1 より、すべての  $T_p(x)$  の位数は  $\rho_p = \rho_1$ 。よって  $\rho > \rho_1$  なる任意の  $\rho$  に対して、 $x_4 \geq R_0$  なる  $x_4$  が存在して、

$$T_p(x) \leq x^\rho \quad (x \geq x_4)$$

であり、任意の  $p$ -ad  $A^p$  (Weyl [5]) に対して

$$N_p(x, A^p) \leq T_p(x) + C_p$$

だから

$$(7) \quad n_p(x, A^p) \log 2 \leq \int_x^{2x} n_p(t, A^p) \frac{dt}{t} \leq N_p(2x, A^p) \leq O(x^\rho)$$

ここに、 $C_p$  は  $A^p$  に依存しないことに注意す。

ここで命題 1 で  $\mu = \rho$  とおくと

$$(8) \quad 2\tilde{\Omega}_p(x) \leq \alpha^2 \log T_p(x) + \rho(\alpha+1) \log x + O(1)$$

が  $E \subset [R_0, \infty)$  から  $\int_E x^{\rho-1} dx < \infty$  なる測度集合  $E$  の外で成立する。

一方  $x \in E$ ,  $x \geq x_4$  なる任意の  $x$  に対して、 $x$  を含み、 $E$  に含まれる最長区間の右端点を  $\hat{x}$  とすると

$$(9) \quad \hat{x}^\rho - x^\rho = \rho \int_x^{\hat{x}} t^{\rho-1} dt \leq \rho \int_E t^{\rho-1} dt = O(1)$$

$$(10) \quad \log \hat{x} = \log x + O(1).$$

更には (7) と (9) より

$$N_p(\hat{x}, A^p) - N_p(x, A^p) = \int_x^{\hat{x}} n_p(t, A^p) \frac{dt}{t} \leq O\left(\int_x^{\hat{x}} t^{\rho-1} dt\right)$$

$$\leq O\left(\int_E x^{p-1} dx\right) = O(1).$$

$$\text{即ち、 } N_p(\tilde{y}, A^p) \leq N_p(x, A^p) + O(1).$$

こゝで、 Ahlfors [2], p 8 (又は Wu [5], p 107) のよれば

$$\iint_{A^p} N_p(x, A^p) = T_p(x)$$

であり、 $O(1)$  は  $A^p$  に依存しないから

$$(11) \quad T_p(\tilde{y}) \leq T_p(x) + O(1).$$

他方 (1) より

$$V_p(x) + T_{p+1}(x) + T_{p-1}(x) + \log \frac{x}{x_0} = \tilde{\Omega}_p(x) - \Omega_p(x_0) + 2T_p(x)$$

だから、 $\tilde{\Omega}_p(x) + 2T_p(x)$  は  $x$  の増加関数であることがわかる。

よって

$$2T_p(x) + \tilde{\Omega}_p(x) \leq 2T_p(\tilde{y}) + \tilde{\Omega}_p(\tilde{y}).$$

(11) に注意すれば

$$\tilde{\Omega}_p(x) \leq \tilde{\Omega}_p(\tilde{y}) + O(1).$$

$\tilde{y} \in E$  かつ (8), (10), (11) より

$$2\tilde{\Omega}_p(x) \leq \alpha^2 \log T_p(x) + p(\alpha+1) \log x + O(1)$$

が成立する。かくて、 $x \geq x_4$  なる任意の  $x$  に対して

$$2\tilde{\Omega}_p(x) \leq \alpha^2 \log T_p(x) + O(\log x) + O(1)$$

が成立する。

II)  $R < \infty$  の場合にも、 $R = \infty$  の場合と同様に証明出来る。

定理 3 を用いれば、命題 1 から命題 2 を導くのと同様に

して、次の系が得られる。

系 1.

$T_1(x)$  が有限位数なら、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して  $x_\varepsilon$  が存在して、

I)  $R = \infty$  の場合:  $x \geq x_\varepsilon$  なる任意の  $x$  に対して

$$T_{p+1}(x) < \left(1 + \frac{1}{p} + \varepsilon\right) T_p(x) + O(\log x)$$

$$T_{p-1}(x) < \left(1 + \frac{1}{n+1-p} + \varepsilon\right) T_p(x) + O(\log x)$$

II)  $R < \infty$  の場合:  $x_\varepsilon \leq x < R$  なる任意の  $x$  に対して

$$T_{p+1}(x) < \left(1 + \frac{1}{p} + \varepsilon\right) T_p(x) + O\left(\log \frac{1}{R-x}\right)$$

$$T_{p-1}(x) < \left(1 + \frac{1}{n+1-p} + \varepsilon\right) T_p(x) + O\left(\log \frac{1}{R-x}\right)$$

が成立する。

$R = \infty$  のとき、もとの曲線  $\alpha$  が超越的、即ち

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T_1(x) / \log x = \infty$$

なら、すべての associated curves  $\alpha^p$  と  $\alpha$ 、超越的であることは知られている (Wu [6])。これに対応する結果として  $R < \infty$  の場合には、次の定理が成立する。

定理 4.

$R < \infty$  の場合、

$$(12) \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow R} T_1(x) / \log \frac{1}{R-x} = \infty$$

なら、次の様な数列  $\{s_n\}$  が存在する:

$$x_n \notin E, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = R, \lim_{n \rightarrow \infty} T_p(x_n) / \log \frac{1}{R-x_n} = \infty$$

( $p = 1, 2, \dots, n$ ).

こゝに、E は命題 2. II) のそれである。

証明.  $T_1(x)$  の位数  $p_1$  が有限なら、系 1 より結果は明らか、  
よつて  $p_1 = \infty$  とする。定理 1 より  $p_2 = \dots = p_n = \infty$  である。

$\mu = 0$  として、命題 2. II) (6) を応用する。先づ、

$$p' = \overline{\lim}_{x \rightarrow R, x \notin E} T_1(x) / \log \frac{1}{R-x} = \infty$$

が成立することゝ注意する。実際、 $p' < \infty$  と仮定する。R に  
十分近い  $\hat{x} \in E$  に対して、 $\hat{x}$  と含み、E を含まれる最長区間  
の左端点、右端点をそれぞれ  $t_1, t_2$  とする。このとき  $t_1,$   
 $t_2 \notin E$  であるから、

$$\log \frac{1}{R-t_2} - \log \frac{1}{R-t_1} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R-t} dt \leq \int_E \frac{1}{R-t} dt = O(1)$$

$$\log \frac{1}{R-t_1} < \log \frac{1}{R-\hat{x}} < \log \frac{1}{R-t_2}$$

よつて  $T_1(x)$  が増加函数であることゝ注意すれば、

$$\frac{\log T_1(t_1)}{\log \frac{1}{R-t_2}} \leq \frac{\log T_1(\hat{x})}{\log \frac{1}{R-\hat{x}}} \leq \frac{\log T_1(t_2)}{\log \frac{1}{R-t_1}}$$

$$\times \lim_{\hat{x} \rightarrow R} \log \frac{1}{R-t_1} / \log \frac{1}{R-t_2} = 1.$$

$$\text{よつて} \quad \overline{\lim}_{\substack{\hat{x} \rightarrow R \\ \hat{x} \in E}} \log T_1(\hat{x}) / \log \frac{1}{R-\hat{x}} \leq \overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow R \\ x \notin E}} \log T_1(x) / \log \frac{1}{R-x} = p'$$

これは  $T_1(x)$  の位数が有限であることを意味し、仮定に矛盾する。よって  $\rho' = \infty$ 。これは  $\{s_n\} \subset [x_1, \infty) - E$ ,  $s_n \rightarrow R$  ( $n \rightarrow \infty$ ),  $\rho' \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} T_1(s_n) / \log \frac{1}{R-s_n} = \infty$  なる  $\{s_n\}$  の存在を意味する。

この結果を  $p=2, \dots, n$  に対して、命題 2. II) (6) に適用すれば、結論を得る (証明終)。

系 2. Weyl [5], p 201 における "仮定 B" は、次の様な仮定によつておきかえられる。

"  $R < \infty$  の場合、 $\alpha$  が admissible で "

$$\lim_{x \rightarrow R} T_1(x) / \log \frac{1}{R-x} = \infty \quad " .$$

注意. 以上の議論で得られた事柄を、Weyl [5] 等の方法に適用すれば、そこで与えられてゐるよりも精密な「Defect relations」が得られることは容易にわかる。

## 引用文献

- [1] L. V. Ahlfors, Über eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen. Soc. Sci. Fenn. Comm. Phys-Math. 8-10(1935), 1-14.

- [2] L. V. Ahlfors, The theory of meromorphic curves. Acta Soc. Sci. Fenn. 3-4(1941), 3-31.
- [3] H. Cartan, Sur les zéros des combinaisons linéaires de  $p$  fonctions holomorphes données. Mathematica 7(1933), 5-31.
- [4] M. Cowen and P. Griffiths, Holomorphic curves and metrics of negative curvature. J. d'Analyse Math. 29(1976), 93-153.
- [5] H. Weyl and J. Weyl, Meromorphic functions and analytic curves. Ann. of Math. Studies 12(1943) 269pp.
- [6] H. Wu, The equidistribution theory of holomorphic curves. Ann. of Math. Studies 64(1970), 219pp.