数理解析研究所講究録
第 348 巻 1979 年 153-164

非孤立真性特異点の近傍における exceptionally ramified meromorphic function について

三重大・教育　　黒川　都史子

§1　序

孤立真性特異点の近傍では，よく知られているように，

(1)　Picard 除外値は高々2つである。

(2)　完全分岐値は高々4つである。

(3)　exceptionally ramified meromorphic function は存在しない。(W. Gross [1])

(4)　normal meromorphic function は存在しない。(O. Lehto — K. I. Virtanen [5])

これらの基本的な性質が非孤立真性特異点の近傍ではどのようになるか？

非孤立真性特異点の近傍での値分布論の研究は Hällström, Tsuji, Kametani, Noshiro, Matsumoto, ……によって寄与されている。

それらの中でも非孤立真性特異点の場合の（1）に関連する

結果として，K. Matsumoto [6] [7] [8] [9]，(2) に関連する結果として，T. Kurokawa − K. Matsumoto [2] がある。

前者の1つ：

定理A (K. Matsumoto [7])　　E を比 $\{\xi_n\}$ をもつ Cantor set とする。もし

$$\xi_{n+1} = o(\xi_n^2)$$

ならば，E の各点を真性特異点としてもち，E の補集合で有理型な任意の函数は高々2つの Picard 除外値をもつ。

これは3つの Picard 除外値をもつ函数が存在しないための十分条件である。

他方，3つの Picard 除外値をもつ函数は exceptionally ramified であり，exceptionally ramified ならば normal である。

そこで，(3)，(4) と関連して，非孤立真性特異点の場合，もっと条件の弱い函数 − exceptionally ramified 又は normal − が存在しないような E に対する十分条件は見つからないか？という面白い問題がある。

ここでは，exceptionally ramified meromorphic function に対する肯定的な答えを定理1で示す。更に，定理1の証明

と同様な証明方法を用いることによって，いくつかの完全分岐値をもつ函数がもつ性質（定理2，3）にもふれる。

§ 2　exceptionally ramified meromorphic functions

定義1．$w_1, w_2, \cdots w_q$ を q 個（$q \geqq 3$）の値，$\nu_1, \nu_2, \cdots \cdots \nu_q$（$\nu_i \geqq 2$，integer）は

(5) $$\sum_{i=1}^{q}\left(1-\frac{1}{\nu_i}\right) > 2$$

をみたす整数とする。

$f(z)=w_i$ の根が高々有限個を除いて，ν_i 以上の重複度をもつ（w_i が Picard 除外値の時は $\nu_i=\infty$ とする）ならば，有理型函数 $f(z)$ は exceptionally ramified という。

<u>定理1</u>（T. Kurokawa [3]）　E を比 $\{\xi_n\}$ をもつ Cantor set とする。もし

(*) $$\xi_{n+1} = o(\xi_n^5)$$

ならば，E の各点を真性特異点としてもち，E の補集合で exceptionally ramified な有理型函数は存在しない。

Cantor set E を ρ 回 ($\rho \geqq 2$) 分岐する normal exhaustion をもつように少し一般化してみる。

定義2. $0 < \xi_n = \rho\eta_n < \dfrac{\rho}{2\rho-1}$ ($\rho \geqq 2$, integer),

$I_{0,1} = \{ (x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1 , y = 1 \}$ とおく。

$I_{0,1}$ から長さ $(1-\rho\eta_1)/(\rho-1)$ の開区間を $\rho-1$ 個除いて，長さ η_1 の ρ 個の閉区間が残るようにする。それらを $I_{1,1}$ $I_{1,2}, \cdots, I_{1,\rho}$ とする。同様に $I_{n,k}$ から長さ $(1-\rho\eta_n)/(\rho-1)$ の $(\rho-1)$ 個の開区間を除いて，長さ $\prod_{p=1}^{n}\eta_p \equiv l_n$ の ρ 個の閉区間が残るようにし，それらを $I_{n+1,k\rho-(\rho-1)}, I_{n+1,k\rho-(\rho-2)}, \cdots, I_{n+1,k\rho}$ とする。そこで

$$E_{[\rho]} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\rho^n} I_{n,k}$$

とかき，$E_{[\rho]}$ を比 $\{\xi_n\}$ をもった一般化した Cantor set という。

T. Kurokawa - K. Matsumoto [2] で報告したように，ρ 回分岐する normal exhaustion をもつ Cantor set $E_{[\rho]}$ に対しては次の定理 B がいえる。

定理 B. $E_{[\rho]}$ を比 $\{\xi_n\}$ をもった一般化した Cantor set とする。もし

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$$

ならば，

(i) $\rho = 2$，$E_{[\rho]}$ の少くとも一点を真性特異点としてもち，$E_{[\rho]}$ の補集合で normal な有理型函数は各真性特異点の近傍で高々3つの完全分岐値をもつ。

(ii) $\rho > 2$，$E_{[\rho]}$ の少くとも一点を真性特異点としてもち，$E_{[\rho]}$ の補集合で有理型な函数は各真性特異点の近傍で高々$(\rho+1)$個の完全分岐値をもつ。

[註： T. Kurokawa − K. Matsumoto [2] では $E_{[\rho]}$ よりもっと一般の totally disconnected compact set に対してこの結果を得ている。]

定理1では $\rho = 2$ の場合の十分条件を与えているので，$\rho > 2$ の場合も同様にできないか？ これは $\rho = 3$ の場合が特に面倒のようである。

そこで，すべての exceptionally ramified meromorphic function に対しては難しいので，最大個数の完全分岐値をもつ（即ち 定理Bより $(\rho+1)$個もつ）exceptionally ramified meromorphic function に制限して一つの十分条件を与える。

定理2（T. Kurokawa [4]） $E_{[\rho]}$ $(\rho > 2)$ を比 $\{\xi_n\}$

をもった一般化したCantor setとする。

$$\xi_{n+1} = o(\xi_n^3)$$

ならば，$E_{[\rho]}$の各点を真性特異点としてもち$E_{[\rho]}$の補集合で丁度$(\rho+1)$個の完全分岐値をもつexceptionally ramified meromorphic functionは存在しない。

続いて，$E_{[\rho]}$が十分うすくあれば，完全分岐値の中でPicard除外値となりうるものも制限をうけることを次の定理は示す。

定理3（T. Kurokawa [4]）　$E_{[\rho]}$（$\rho \geqq 2$）を比$\{\xi_n\}$をもった一般化したCantor setとする。もし

$$\xi_{n+1} = o(\xi_n^{\sqrt{2}})$$

ならば，$E_{[\rho]}$の各点を真性特異点としてもち，$E_{[\rho]}$の補集合で$(\rho+1)$個の完全分岐値をもった有理型函数はそれらの完全分岐値のうち，高々1つしかPicard除外値になれぬ。

定理1，2，3の証明はすべて帰謬法で行い，本質的なところは同じである。以下定理1の証明の概要を述べる。

§3　定理1の証明の概要

条件(*)をみたすCantor set Eに対し，Eのすべての点を真性特異点としてもち，Eの補集合でexceptionally ramifiedな有理型函数$f(z)$が存在したと仮定して矛盾を導く。定理5より$f(z)$は3つの完全分岐値w_1, w_2, w_3をもつ。

$I_{n,k}$の中心を$z_{n,k}$とし，

$$S_{n,k} = \left\{ z \;\middle|\; \prod_{p=1}^{n} \eta_p < |z - z_{n,k}| < \frac{1}{3} \prod_{p=1}^{n-1} \eta_p \right\}$$

とおく。$S_{n,k}$のharmonic modulusをμ_nで表わすと，

$$\mu_n = \log \frac{1}{3\eta_n} = \log \frac{2}{3\xi_n}$$

である。

$$\Gamma_{n,k} = \left\{ z \;\middle|\; |z - z_{n,k}| = \prod_{p=1}^{n-1} \eta_p \sqrt{\frac{\eta_n}{3}} \right\}$$

とし，$\Gamma_{n,k}$, $\Gamma_{n+1,2k-1}$, $\Gamma_{n+1,2k}$で囲まれた3重連結領域を$\Delta_{n,k}$とする。

<u>補題1</u>　　$\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$

ならば，ある番号L_1が存在し，$n \geq L_1$なるすべてのnに対し，$\Gamma_{n,k}$の$f(z)$による像$f(\Gamma_{n,k})$のchordal distanceによる直径は$M \exp(-\mu_n/2) \equiv \delta_n$を越えない。ただし，Mは$f(z)$とEの補集合にのみ依存する定数である。

（証明省略）

この補題1より，$f(\Gamma_{n,k})$を含み直径がδ_nより小さい円板$D_{n,k}$が存在する。$G_{n,k}=D_{n,k}\cup D_{n+1,2k-1}\cup D_{n+1,2k}$とおき，$\nu(w,f,\Delta_{n,k})$を$\Delta_{n,k}$における$f(z)$の$w$点の数（重複も許して数える）とすると，次の2つの場合が起る。

(i) $\nu(w,f,\Delta_{n,k})\geqq 1$ $(w\in\hat{C}-G_{n,k})$

(ii) $\nu(w,f,\Delta_{n,k})=0$ $(w\in\hat{C}-G_{n,k})$

後者では$f(\Delta_{n,k})$は$G_{n,k}$に含まれ，$G_{n,k}$は一つのcomponentのみからなり，その直径は$3\delta_n$より小である。従って，δ_nが十分小さければ，$\Delta_{n,k}$の$f(z)$による像はつぶれた状態になるので，このときの$\Delta_{n,k}$をdegenerateという。これに対し，(i)の場合の$\Delta_{n,k}$をnon-degenerateという。

次に(i)の場合を更に詳しく調べる。

Δをsimple analytic closed curves $\{\Gamma_i\}_{i=1,2,3}$で囲まれた3重連結領域，$f(z)$をΔの閉包でexceptionally ramified meromorphicとする。更に$f(z)$は$\{D_j\}_{j=1,\cdots,\alpha}$（$D_j$の直径は十分小，各$D_j$はsectionally analytic domain）によっておおわれる$\{\Gamma_i\}_{i=1,2,3}$の像をもち，即ち

(6) $$\bigcup_{j=1}^{\alpha} D_j \supset \bigcup_{i=1}^{3} f(\Gamma_i)\ ,\ \left(D_j\cap\left(\bigcup_{i=1}^{3} f(\Gamma_i)\right)\neq\phi,\ \forall j\right),$$

次の(7),(8)も満たすと仮定する。

(7) $$\nu(w,f,\Delta)\geqq 1\qquad \left(w\in\hat{C}-\bigcup_{j=1}^{\alpha}\overline{D}_j\right)$$

(8)　$f(z)$は各D_jの境界（C_jとかく）上に$f(z)$の分岐値をもたぬ。

各C_jのΔ内での原像$f^{-1}(C_j)$を考える。これらのすべてのcomponentの集合を$\{\gamma_k^{(j)}\}_k$とし，$\{\gamma_k^{(j)}\}_{k,j}$の中の有限個の曲線で囲まれるΔのsubdomainの全体を$\mathfrak{F}$とする。$\mathfrak{F}$の中へ包含関係による順序を入れてlatticeと考える。(7)より$n \equiv \nu(\zeta_0, f, \Delta') \geqq 1$ $(\zeta_0 \in \hat{C} - \bigcup_{j=1}^{\alpha} \bar{D}_j)$となるような$\mathfrak{F}$の極大元$\Delta'$が存在する。$\Delta'$のboundary curvesを$\{\Gamma_i\}_{i=1,\cdots,\tau'}$，$[f(\Gamma_i)]$は$\Gamma_i$の$f(z)$によるRiemannian image，$f(\Gamma_i)$を含む$C_j$の集合を$\{C_j\}_{j=1,\cdots,\alpha'}$とする。$z$が$\Gamma_i$を正の方向に一回転したとき（従って$w$は$[f(\Gamma_i)]$上をうごく），$\mathrm{var}\,\frac{1}{2\pi}\arg\frac{w-\zeta_0}{w-\zeta_j}$，$(\zeta_0 \in \hat{C} - \bigcup_{j=1}^{\alpha} \bar{D}_j$，$\zeta_j \in D_j)$，を$O([f(\Gamma_i)], \zeta_0, \zeta_j)$で表わす。

Δ'における$w=f(z)$によって作られる被覆面のEuler指標を$\hat{C} - \bigcup_{j=1}^{\alpha'} \bar{D}_j$，$D_j$の上にある被覆面に分けて計算すると，次の補題を得る。

補題2

$$2n - 2 = \sum_{i=1}^{\tau'} (s_i - 1) + v, \tag{9}$$

ただし，$s_i = \sum_{j=1}^{\alpha'} O([f(\Gamma_i)], \zeta_0, \zeta_j)$，$v$は$f(z)$の$\Delta'$での分岐度の総和である。

（証明省略）

次に，$s_i<0$ のものがあるときは少し工夫することによって，$s_i>0$ とできる。（参照 T. Kurokawa [3]）．即ち，Δ' の部分集合 Δ^* （ $\Delta^* \in \mathfrak{F}$ ）で，

$$\nu(\zeta_0, f, \Delta^*) \geqq 1 \quad (\zeta_0 \in \hat{\mathbb{C}} - \bigcup_{j=1}^{\alpha^*} \bar{D}_j)$$

$$s_i^* \equiv \sum_{j=1}^{\alpha^*} O([f(\Gamma_i^*)], \zeta_0, \zeta_j) > 0$$

（たゞし，Δ^* の boundary curves を $\{\Gamma_i^*\}_{i=1,\cdots,r^*}$，その像を含む C_j の集合を $\{C_j\}_{j=1,\cdots,\alpha^*}$ とする）となるものがとれる。この Δ^* に対しても補題2は成立する。

Δ^* における $w=f(z)$ の作る被覆面を調べる．

$n^* \equiv \nu(\zeta_0, f, \Delta^*)$ $(\zeta_0 \in \hat{\mathbb{C}} - \bigcup_{j=1}^{\alpha^*} \bar{D}_j)$，$m_i$ を Δ^* での w_i point の個数，$l_{i,j}$ を Δ^* での各 w_i-point での重複度 ($l_{ij} \geqq \nu_i$) とする。各 w_k に対して，w_k を含む D_j があれば $N_k = \{i \mid f(\Gamma_i^*) \subset C_j \equiv \partial D_j\}$ とし，もしなければ $N_k \equiv \phi$ と定義する。N_k の cardinal number は σ_k で表わす。

Δ^* における $f(z)$ に対し，Cauchy の留数定理と argument principle を適用すると，

$$(10) \qquad n^* = \sum_{j=1}^{m_i} l_{i,j} + \sum_{j\in N_i} s_j^* \geqq \nu_i m_i + \sigma_i$$

を得る。

(5), (9), (10) を用いて計算すると

$$\tau' = \tau^* = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3,$$

$$f(\Delta - \Delta^*) \subset \bigcup_{j=1}^{\alpha} D_j$$

を得る。

D_jの直径が十分小さい時は，Δにおける$f(z)$の挙動はΔ^*におけるf(z)のそれで殆んど決まる。そこで更に詳しく計算して，n^*, m_i, $l_{i,j}$, σ_i, N_i, $\{b_j^*\}_{j\in N_i}$のすべての場合をあげると，Δ^*における$f(z)$の作る被覆面は25種類あることが解る。(ただし，$\{w_1, w_2, w_3\}$の置換による違いは無視する。)(参照：T. Kurokawa [3] の表）以上の議論はΔの代りに$\Delta_{n,k}$として適用する。

さて，最後に$\{\Delta_{n,k}\}_{n=1,2,\cdots,\ k=1,2,\cdots,2^n}$の中，non-degenerateなものは高々有限個であることを示せばあとは簡単である。

これはnon-degenerateな$\Delta_{n,k}$が無限個あると仮定して矛盾を導くのであるが，その途中でTeichmüllerのextremal domainのharmonic modulusを利用することによって我々の条件(*)に反することが起ることを示すことによって得られる。

定理2, 3の証明は省略するが，その証明において，補題1, 2, 及び式(5), (10)が重要な役割をする。

References

[1] W.Gross, Über die Singularitäten analytischer Funktionen. Monat. Math. Physik, 29(1918), 3 - 47

[2] T.Kurokawa and K.Matsumoto, On totally ramified values, Tōhoku Math. J., Vol.28(1976).

[3] T.Kurokawa, to appear

[4] T.Kurokawa, to appear

[5] O.Lehto and K.I.Virtanen, Boundary behaviour and normal meromorphic functions, Acta Math., 97(1957),47 - 65.

[6] K.Matsumoto, Some notes on exceptional values of meromorphic functions, Nagoya Math. J.,Vol.22(1963).

[7] ————————, Existence of perfect Picard sets, Nagoya Math. J.,Vol.27(1966).

[8] ————————, Perfect Picard set of positive capacity, Nagoya Math.J.,Vol.29(1967).

[9] ————————, Some remarks on Picard sets, Ann.Acad.Sci. Fennicae, Ser.A.1. 403(1967).

[10] S.Toppila, Picard sets for meromorphic functions, Ann.Acad. Sci. Fennicae, A.I.417(1967).