数理解析研究所講究録
第 350 巻 1979 年 18-33

Hardy空間のFourier multiplier

東大 理　宮地晶彦

実関数論的に定義される Hardy 空間 $H^p(\mathbb{R}^n)$ または $H^p(\mathbb{T})$ で Fourier 掛算作用素 $f \longmapsto T_m f = \mathcal{F}^{-1}(m(\xi)\mathcal{F}f(\xi))$ を考える。ただし $\mathcal{F}$ は Fourier 変換, $m(\xi)$ は $\mathbb{R}^n = \widehat{\mathbb{R}^n}$ または $\mathbb{Z} = \widehat{\mathbb{T}}$ 上の関数である。T_m が H^p で有界作用素となる m の全体を $\mathcal{M}(H^p)$ と書くことにする。以下 I で, ここで扱う Hardy 空間について知られている事実をまとめておく。II で Fourier 掛算作用素についての結果を述べる。

I. $H^p(\mathbb{R}^n)$ と $H^p(\mathbb{T})$ の基本的な事実.

(1) $H^p(\mathbb{R}^n)$ の定義. まず, $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x,t) \mid x \in \mathbb{R}^n, x_0 = t > 0\}$ 上の複素数値調和関数の $(n+1)^k$ 個 $(k = 1, 2, \cdots\cdots)$ の系 $\{u_{j_1 \cdots j_k}(x,t)\}$ $(j_1 = 0, 1, \cdots, n\ ; \cdots ;\ j_k = 0, 1, \cdots, n)$ が k 階の gradient であるということは, $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上の (x,t) についての調和関数 $h(x,t)$ があって, $u_{j_1 \cdots j_k} = \partial^k h / \partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}$ と書かれることである, と

定義する。このことは次の方程式系を満たすことと同値である：

① $k \geq 2$ のとき

$$\begin{cases} u_{j_1\cdots j_k} = u_{j_{\sigma(1)}\cdots j_{\sigma(k)}} \quad \forall j_i,\ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_k \ (= k\text{文字の置換群}) \\ v_{j_1\cdots j_k j_{k+1}} = \partial u_{j_1\cdots j_k} / \partial x_{j_{k+1}} \text{ とおいた時} \\ v_{j_1\cdots j_k j_{k+1}} = v_{j_{\sigma(1)}\cdots j_{\sigma(k)} j_{\sigma(k+1)}} \quad \forall j_i,\ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_{k+1} \\ \sum_{j=0}^{n} u_{j j j_3 \cdots j_k} = 0 \quad \forall j_3 \cdots \forall j_k, \end{cases}$$

$k = 1$ のときは，

② $$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad i, j = 0, 1, \cdots, n \\ \sum_{j=0}^{n} \dfrac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \end{cases}$$

$\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上の調和関数の $\mathbb{R}^n = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ での境界値を考えるための

<u>補題</u>（［7］P.174）．$\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上の調和関数 $u(x,t)$ と $p > 0$ に対し

$$\sup_{0<t<\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^p dx \right)^{1/p} = A < \infty$$

ならば，$f = \lim_{t \downarrow 0} u(x,t)$ が $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ で存在し，f の Fourier 変換は関数で $|\mathcal{F}f(\xi)| \leq C_p A |\xi|^{n/p - n}$，かつ $u(x,t)$ は f の Poisson 積分に等しい：

③ $$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-2\pi t|\xi|} \mathcal{F}f(\xi)\right)(x).$$

さて，k 階の gradient 系 $\{u_{j_1\cdots j_k}(x,t)\}$ であって，

$$\sup_{0<t<\infty}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{j_1=0}^{n}\cdots\sum_{j_k=0}^{n}|u_{j_1\cdots j_k}(x,t)|^2\right)^{p/2}dx\right\}^{1/p}$$

が有限であるもの全体を，仮りに X_k^p とし，上の値を $\{u_{j_1\cdots j_k}\}$ のノルム $\|\{u_{j_1\cdots j_k}\}\|_{X_k^p}$ とする。上の補題により $\{u_{j_1\cdots j_k}\}\in X_k^p$ に対しては $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ で境界値 $\lim_{t\downarrow 0}u_{j_1\cdots j_k}(x,t)=f_{j_1\cdots j_k}$ があるわけだが，方程式①または②を満たすことから，$\{u_{j_1\cdots j_k}\}$ は $f_{0\cdots 0}$ だけから決定してしまう。$u_{j_1\cdots j_k}$ は $f_{j_1\cdots j_k}$ から③によって復元され，$f_{j_1\cdots j_k}$ は $f_{0\cdots 0}$ から次の式で決定される：

④ $$f_{j_1\cdots j_k}=R_{j_1\cdots j_k}f_{0\cdots 0}\underset{\text{def}}{=}\mathcal{F}^{-1}\left(\left(-i\frac{\xi_{j_1}}{|\xi|}\right)\cdots\left(-i\frac{\xi_{j_k}}{|\xi|}\right)\mathcal{F}f_{0\cdots 0}(\xi)\right),$$

ただし $j=0$ のときは項 $(-i\xi_j/|\xi|)$ は 1 でおきかえる。そこで $H^p(\mathbb{R}^n)$ を次のように定義する：$(n-1)/(n-1+k)=p_k$ として，

$p_{k-1}\geqq p>p_k$ のとき
$$\begin{cases} H^p(\mathbb{R}^n)\underset{\text{def}}{=}\left\{f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\ \middle|\ f=\lim_{t\downarrow 0}u_{0\cdots 0}(x,t),\ \{u_{j_1\cdots j_k}\}\in X_k^p\right\} \\ \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}\underset{\text{def}}{=}\|\{u_{j_1\cdots j_k}\}\|_{X_k^p}\end{cases}$$

([7] pp. 167～168.). これで $1\geqq p>0$ について $H^p(\mathbb{R}^n)$ が定義された。$\infty>p>1$ の場合には $H^p(\mathbb{R}^n)=L^p(\mathbb{R}^n)$ とする。

$H^p(\mathbb{R}^n)$ をこのように定義すると，これは $\|\ \|_{H^p(\mathbb{R}^n)}$ から定まる距離について完備な線型位相空間で $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に連続に埋め込まれ，$H^p(\mathbb{R}^n)\cap C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ が $H^p(\mathbb{R}^n)$ で稠密である。($0<p<1$ の場合には $\|\ \|_{H^p(\mathbb{R}^n)}^p$ が三角不等式を満たす。)

注 (i) $H^p(\mathbb{R}^n)$ の定義で，異なる k を使うのは，$p>p_k$ のとき k 階の gradient 系 $\{u_{j_1\cdots j_k}\}$ に対して

$$\Big(\sum_{j_1=0}^{n}\cdots\sum_{j_k=0}^{n}|u_{j_1\cdots j_k}(x,t)|^2\Big)^{p/2}$$

が (x,t) につき劣調和関数になる，という事実（[2]）に基づいている。(ii) $H^p(\mathbb{R})$ を定義するのに，上半空間 $\mathbb{R}^2_+\subset\mathbb{C}$ 上の正則関数のある族の境界値とする方法がある。この場合には，その境界値が正則関数の性質を継承しているが（例えば Fourier 変換の台が半直線上にある等），上で与えた $H^p(\mathbb{R}^n)$ の定義では，$\{u_{j_1\cdots j_k}\}$ のうち $u_{0\cdots 0}$ だけの境界値をもって H^p を定義したので，$H^p(\mathbb{R}^n)$ の元自身は正則関数的な性格を持っていない。（$p=1$ の場合については [4] 参照.）

(2) $H^p(\mathbb{R}^n)$ の特徴づけ.

定理A（[7] pp. 183−184）. $0<p<\infty$ とする．$f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対して以下の3つの条件は同値である：

(i) $f\in H^p(\mathbb{R}^n)$;

(ii) $\int\varphi(x)dx\neq 0$ なるある $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$f^+(x)=\sup_{0<t<\infty}|\varphi_t*f(x)|\in L^p(\mathbb{R}^n);$$

(iii) $$f^*(x)=\sup_{\psi\in\mathcal{A}}\ \sup_{|y-x|<t}|\psi_t*f(y)|\in L^p(\mathbb{R}^n).$$

ただし $\varphi_t(x)=t^{-n}\varphi(x/t)$，$\varphi*f(x)=\langle\varphi(x-\cdot),f\rangle$，$\mathcal{A}$ は

$$\mathcal{A}=\left\{\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\;\middle|\;\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N\sum_{|\alpha|\le N}\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\psi(x)\right|^2dx\le 1\right\}.$$

N は p と n のみによって決まる整数である．更に

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}\approx\|f^+\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\approx\|f^*\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$ ―――

次の $H^p(\mathbb{R}^n)$ の特徴づけは，本質的には $H^p(\mathbb{R}^n)$ の元（モト）の定義と同等である．

定理 B.（Riesz 変換による特徴づけ）$p>(n-1)/(n-1+k)$ とする．$R_{j_1\cdots j_k}$（$j_1=0,1,\cdots,n$；$\cdots$；$j_k=0,1,\cdots,n$）は ④ で与えられる作用素とすると，

$$f\in L^2(\mathbb{R}^n)\cap H^p(\mathbb{R}^n)\iff R_{j_1\cdots j_k}f\in L^2(\mathbb{R}^n)\cap L^p(\mathbb{R}^n)\quad\forall(j_1,\cdots,j_k).$$

しかも $f\in L^2(\mathbb{R}^n)\cap H^p(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}\approx\sum_{j_1=0}^{n}\cdots\sum_{j_k=0}^{n}\|R_{j_1\cdots j_k}f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$ ―――

もうひとつの特徴づけを述べるため，p-atom というものを次のように定義する；$f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ が p-atom であるとは，

$$\operatorname{support} f\subset B,\quad \|f\|_{L^\infty}\le|B|^{-1/p},$$

$$\int_B f(x)x^\alpha dx=0 \quad\text{whenever } |\alpha|\le\left[\frac{n}{p}-n\right]$$

を満たす球 $B\subset\mathbb{R}^n$ があること．次の定理は，$n=1$ の場合に [5] で得られ，最近 [9] で $n\ge2$ まで拡張されたものである．

<u>定理C</u>（atom分解による特徴づけ）$0<p\leq 1$ とする．任意の $f\in H^p(\mathbb{R}^n)$ に対して，$\lambda_j\in\mathbb{C}$ と p-atom g_j $(j=1,2,\cdots\cdots)$ があって，

$$f=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j g_j\ ,\ \Big(\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\leq C\|f\|_{H^p}$$

とあらわせる．逆に $\{\lambda_j\}\subset\mathbb{C}$ が $\sum|\lambda_j|^p<\infty$ なる数列で g_j が p-atom ならば，級数 $\sum\lambda_j g_j$ は $H^p(\mathbb{R}^n)$ で収束し，

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j g_j\in H^p(\mathbb{R}^n)\ ,\ \Big\|\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j g_j\Big\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}\leq C'\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|^p\Big)^{1/p}.$$

ここで C と C' は p と n のみに依存する定数である．

<u>(3) $H^p(\mathbb{R}^n)$ の dual space</u>

$\alpha\geqq 0$ と $k\in\mathbb{Z}$, $k\geqq 0$ に対して，次のように定義する：

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{\alpha,k}}\underset{\text{def}}{=}\sup_{\substack{0<r<\infty\\ y\in\mathbb{R}^n}}\inf_{P\in\mathcal{P}_k}\left\{r^{-\alpha-n}\int_{|x-y|<r}|f(x)-P(x)|\,dx\right\},$$

$(\mathcal{P}_k=k$次以下の多項式全体．$)$

$$\mathcal{L}_{\alpha,k}\underset{\text{def}}{=}\left\{f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)\ \middle|\ \|f\|_{\mathcal{L}_{\alpha,k}}<\infty\right\}.$$

特に $\mathcal{L}_{0,0}=BMO$ (= the space of functions of bounded mean oscillation).

次のことは，定理Cから ただちに導かれる：

ノルムの同値も込めて
$$\begin{cases}(H^1)'=BMO\ ,\\ (H^p)'=\mathcal{L}_{\alpha,k}\ ,\ 0<p<1\ ,\ \alpha=\frac{n}{p}-n\ ,\ k=\left[\frac{n}{p}-n\right].\end{cases}$$

対応 $u \in (H^p)' \longleftrightarrow f \in \mathcal{L}_{\alpha,k}$ or BMO は，

$$ {}_{H^p}\langle g, u\rangle_{(H^p)'} = \int g(x) f(x)\,dx, \quad \forall g \in H^p \cap C_0^\infty $$

で与えられる．差が k 次以下の多項式である f は同一視する．(cf. [9])

<u>(4) 補間定理.</u> ([3], [6].)

$\{T_z\}$ は単関数族上で定義された線型作用素の族で，任意の単関数 f と g に対して，

$$ z \longmapsto \int (T_z f(x))\, g(x)\,dx $$

が $0 < \mathrm{Re}\, z < 1$ で正則 $0 \le \mathrm{Re}\, z \le 1$ で連続であり，更に，ある定数 $C = C_f$ と $b = b_f < \pi$ とがあって

$$ \log \|T_z f\|_{L^1} \le C e^{b|\mathrm{Im}\, z|}, \quad 0 \le \mathrm{Re}\, z \le 1, $$

が成りたつとする。$0 < p_0 < 1 < p_1 < \infty$ とし，$\{T_z\}$ に対して 2つの評価

$$ \|T_{iy} f\|_{L^{p_0}} \le A_0(y) \|f\|_{H^{p_0}}, \quad f \in H^{p_0} \cap \{\text{単関数}\} $$

$$ \|T_{1+iy} f\|_{L^{p_1}} \le A_1(y) \|f\|_{H^{p_1}}, \quad f \in H^{p_1} \cap \{\text{単関数}\} $$

$$ \log A_0(y) \le C_0 e^{b_0|y|}, \quad \log A_1(y) \le C_1 e^{b_1|y|} $$

$$ b_0 < \pi, \quad b_1 < \pi $$

が成りたつならば，$0\le\theta\le 1$ なる θ について，T_θ は次の評価を持つ：

$$\|T_\theta f\|_{L^{p_\theta}} \le C\|f\|_{H^{p_\theta}}, \quad f\in H^{p_\theta}\cap\{\text{単関数}\},$$

$$\frac{1}{p_\theta}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}.$$

(5) $H^p(\mathbb{T})$ について．$0<p\le 1$ とする．

$$X^p=\left\{ f \;\middle|\; \begin{array}{l} f(z)\ \text{は}\ |z|<1\ \text{で正則},\ f(0)\in\mathbb{R} \\ \|f\|_{X^p}=\sup\limits_{0<r<1}\left(\int_0^{2\pi}|f(re^{ix})|^p\,dx\right)^{1/p}<\infty \end{array}\right\}$$

とし，$\mathrm{Re}\,H^p(\mathbb{T})$ を $\mathbb{T}$ 上の distribution の部分集合として

$$\mathrm{Re}\,H^p(\mathbb{T})=\left\{g\in\mathcal{D}'(\mathbb{T}) \;\middle|\; g=\lim_{r\uparrow 1}\mathrm{Re}\,f(re^{ix}),\ f\in X^p\right\}$$

で定義する．$g=\lim\limits_{r\uparrow 1}\mathrm{Re}\,f(re^{ix})$ のとき $\|g\|_{H^p(\mathbb{T})}\underset{def}{=}\|f\|_{X^p}$ とする。$H^p(\mathbb{T})$ は次のように定義する：

$$H^p(\mathbb{T})=\{f\in\mathcal{D}'(\mathbb{T}) \mid \mathrm{Re}\,f\in\mathrm{Re}\,H^p(\mathbb{T}),\ \mathrm{Im}\,f\in\mathrm{Re}\,H^p(\mathbb{T})\},$$

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{T})}=\left(\|\mathrm{Re}\,f\|^p_{H^p(\mathbb{T})}+\|\mathrm{Im}\,f\|^p_{H^p(\mathbb{T})}\right)^{1/p}.$$

このように定義した $H^p(\mathbb{T})$ $(0<p\le 1)$ に対して，$H^p(\mathbb{R}^n)$ に対すると同様のことが成り立つ．定理 A では，(ii)，(iii) をそれぞれ次の (ii)′，(iii)′ でおきかえればよい：

(ii)′ $\int\varphi(x)\,dx\neq 0$ なるある $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して

$$f^+(x)=\sup_{0<t<\infty}|\tilde{\varphi}_t * f(x)|\in L^p(\mathbb{T});$$

(iii)' $\quad f^*(x) = \sup_{0<\delta<1} \sup_{\phi \in \mathcal{A}_\delta} \sup_{|y-x|<\delta} |f*\phi(y)| \in L^p(\mathbb{T})$.

ただし，(ii)' で $\tilde{\varphi}_t$ と書いたのは，

$$\tilde{\varphi}_t(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t}\varphi\left(\frac{x+2k\pi}{t}\right)$$

で定義される $\mathbb{T}$ 上の関数（$\mathbb{R}$ 上の周期 2π の関数），(iii)' の $\mathcal{A}_\delta$ は次で定義される関数の集合である：

$$\mathcal{A}_\delta = \left\{ \phi \in C^\infty(\mathbb{T}) \,\middle|\, \int_{-\pi}^{\pi} \left(1+\frac{|x|}{\delta}\right)^N \sum_{\ell=0}^{N} \delta^\ell \left|\frac{d^\ell \phi(x)}{dx^\ell}\right| dx \leq 1 \right\}.$$

上の N は p のみに依存して決まる整数である．定理 B では，Riesz 変換 $R_{j_1\cdots j_k}f$ を共役関数 $\tilde{f}$ でおきかえて，主張を，

$$f \in L^2(\mathbb{T}) \cap H^p(\mathbb{T}) \iff f \in L^2(\mathbb{T}) \cap L^p(\mathbb{T}) \text{ かつ } \tilde{f} \in L^2(\mathbb{T}) \cap L^p(\mathbb{T}),$$

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{T})} \approx \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{T})}$$

とすればよい。ここで，$\tilde{f}$ は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \text{ のとき } \tilde{f}(x) = \sum_{n\neq 0} c_n(-i \operatorname{sign} n)\, e^{inx}$$

で定義されるものである。定理 C では，球 $B \subset \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{T}$ 上の区間でおきかえて p-atom を定義しておけば，$f \in H^p(\mathbb{T})$ が

$$f = g_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j g_j$$

$$\lambda_j \in \mathbb{C}, \quad g_j : p\text{-atom}, \quad g_0 \in L^\infty(\mathbb{T})$$

$$\|g_0\|_{L^\infty} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p\right)^{1/p} \leq C\|f\|_{H^p(\mathbb{T})}$$

のように分解される，という形で定理が成りたつ。（$H^p(\mathbb{T})$ に対する p-atom を定義するには，多項式を三角多項式でおきかえてもよいが，おきかえなくてもよい。）$H^p(\mathbb{T})$ $(0<p\leq 1)$ の双対空間は，

$$\mathcal{L}_\alpha = \left\{ f \in L^1(\mathbb{T}) \;\middle|\; \|f\|_{\mathcal{L}_\alpha} < \infty \right\}, \quad \alpha = \frac{1}{p} - 1$$

$$\|f\|_{\mathcal{L}_\alpha} = \sup_{\substack{a\leq b \\ b-a<2\pi}} \ \inf_{\substack{P:\text{多項式} \\ \deg P \leq [\alpha]}} \left\{ (b-a)^{-\alpha-1} \int_a^b |f(e^{ix}) - P(x)|\, dx \right\}$$

になる。$(H^p(\mathbb{T}))' \ni u \longleftrightarrow f \in \mathcal{L}_{1/p-1}$ の対応は，

$$_{H^p}\langle g, u \rangle_{(H^p)'} = \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{ix}) f(e^{ix})\, dx, \quad \forall g \in C^\infty(\mathbb{T}),$$

$$\|u\|_{(H^p)'} \approx \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} + \|f\|_{\mathcal{L}_{1/p-1}}$$

で与えられる．$H^p(\mathbb{T})$ と $L^p(\mathbb{T})$ においても補間定理が成りたつ．

II. Fourier 掛算作用素について.

定理1. (i) $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $0<p_0<2$, $na(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{2})=b$, $k=\max\{[n(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{2})]+1, [\frac{n}{2}]+1\}$ とする. もしも $m \in C^k(\mathbb{R}^n)$ が,

$$m(\xi)=0 \quad \text{if } |\xi| \leqq 1$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha m(\xi)\right| \leqq |\xi|^{-b+(a-1)|\alpha|}, \quad |\alpha| \leqq k$$

を満たすならば, $2 \geqq p \geqq p_0$ なる p について $m \in \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^n))$.

(ii) $c \geqq 0$, $d \geqq 0$, $0<p_0<2$, $nd(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{2})=c$, $k=\max\{[n(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{2})]+1, [\frac{n}{2}]+1\}$ とする. もしも $m \in C^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ が,

$$m(\xi)=0 \quad \text{if } |\xi| \geqq 1$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha m(\xi)\right| \leqq |\xi|^{c-(1+d)|\alpha|}, \quad |\alpha| \leqq k$$

を満たすならば, $2 \geqq p \geqq p_0$ なる p について $m \in \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^n))$.

証明の概略. $p=p_0<1$ のときについてまず示す. 定理Bと定理Cによれば,

$$\| R_{j_1 \cdots j_k} T_m f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqq C, \quad f: p\text{-atom}$$

が示されればよい. この評価は, $m(\xi)$ を

$$m(\xi)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} m(\xi)\psi\left(\frac{\xi}{2^j}\right)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} m_j(\xi),$$

$$\left(\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ \text{support}\,\psi \subset \{\tfrac{1}{2} \leqq |\xi| \leqq 2\},\ \sum_{-\infty}^{\infty}\psi\left(\frac{\xi}{2^j}\right)=1\right)$$

のように分割して，$T_{m_j}f$ を評価することによって得られる．$p=p_0<1$ の場合に定理が示されたならば，

$$m_z(\xi)=|\xi|^{-b\varepsilon+b(1+\varepsilon)z}\,m(\xi),\quad \varepsilon>0$$

なる族 $\{m_z \mid z\in\mathbb{C},\ 0\le \mathrm{Re}\,z\le 1\}$ を考え，(4) の補間定理を利用すれば，$p_0\ge 1$ のときにも $p=p_0$ について定理が示される．最後に $m_z(\xi)\equiv m(\xi)$ について $p=p_0$ と $p=2$ の間で補間定理を使えば $m\in\mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^n))$ が $2\ge p\ge p_0$ について言える．□

この定理は，次の例が示すように，sharp である．$\Phi(\xi)$ を

$$\Phi(\xi)=0 \text{ if } |\xi|\le 1,\quad \Phi(\xi)=1 \text{ if } |\xi|\ge 2$$

なるなめらかな $\mathbb{R}^n$ 上の関数とする．

$m(\xi)=\Phi(\xi)|\xi|^{-b}e^{i|\xi|^a}$ は定理1(i) の仮定を満たすが，$b\ge 0$，$a>0$，$a\ne 1$ のときには $0<p<p_0$ なる p について $m\notin\mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^n))$；

$m(\xi)=(1-\Phi(2\xi))|\xi|^c e^{i|\xi|^{-d}}$ は定理1(ii) の仮定を満たすが，$c\ge 0$，$d>0$ のとき $0<p<p_0$ なる p については $m\notin\mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^n))$.

([8], [10], [11])

定理1の応用として，次のことが言える：

$$\| (1+|\xi|^2)^{-b/2} e^{it|\xi|^2} \|_{\mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^n))} \leq C(1+|t|)^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})},$$

$$0 \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \leq \frac{b}{2n}.$$

このことは，Schrödinger 方程式

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

の解 $u = u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|^2}\mathcal{F}f(\xi))$ に対して，

$$\| u(\cdot,t) \|_{W^{p,s}(\mathbb{R}^n)} \leq C(1+|t|)^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \|f\|_{W^{p,s+b}(\mathbb{R}^n)}$$

$$0 \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \leq \frac{b}{2n}$$

$$\|f\|_{W^{p,s}(\mathbb{R}^n)} = \| \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}f(\xi)) \|_{H^p(\mathbb{R}^n)}$$

なる評価が成りたつことを示している。(cf. [1], [8])

$(H^1)' = BMO$, $(H^p)' = \mathcal{L}_{n/p-n}$ なる関係を使えば，定理1の仮定を満たす Fourier 掛算作用素の BMO-ノルム，$\mathcal{L}_\alpha$-ノルムに関する評価が得られる。

次に $H^p(\mathbb{T})$ の Fourier 掛算作用素について述べる。$H^p(\mathbb{T})$ の atom 分解を使えば，次の命題が示される：

<u>命題 1.</u> ϕ を $\mathbb{T}$ 上の関数とするとき，

$$\|\phi f\|_{H^1(\mathbb{T})} \leq C\left(\|\phi\|_{L^\infty} + \|\phi\|_*\right)\|f\|_{H^1(\mathbb{T})},$$

$$\|\phi f\|_{H^p(\mathbb{T})} \leq C_p\left(\|\phi\|_{L^\infty} + \|\phi\|_{*,p}\right)\|f\|_{H^p(\mathbb{T})}, \quad 0<p<1,$$

$$\|\phi\|_* = \sup_I \left\{ |I|^{-1} \log|I|^{-1} \inf_{c\in\mathbb{C}} \int_I |\phi(x)-c|\,dx \right\},$$

$$\|\phi\|_{*,p} = \sup_I \left\{ |I|^{-1/p} \inf_{\substack{\deg P \leq [\frac{1}{p}-1] \\ P:\text{多項式}}} \int_I |\phi(x)-P(x)|\,dx \right\}.$$

ただし I は区間，$|I|$ は区間の長さをあらわす．——

この命題を用いて，次の評価が得られる：

命題 2.
$$\|e^{-inx}\cdot\|_{H^1(\mathbb{T})\to H^1(\mathbb{T})} \approx \log|n| \quad (|n|\to\infty)$$

$$\|e^{-inx}\cdot\|_{H^p(\mathbb{T})\to H^p(\mathbb{T})} \approx |n|^{\frac{1}{p}-1} \quad (|n|\to\infty),\ 0<p<1.$$

ただし $e^{-inx}\cdot$ は掛算作用素 $f \longmapsto e^{-inx}f(x)$ をあらわす．——

共役関数をとる変換（Hilbert 変換）$f \longmapsto \tilde{f}$ を H であらわすと，

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} -i\,\mathrm{sign}(k-n)\,\hat{f}(k)\,e^{ikx} = e^{inx} H\left(e^{-inx} f(x)\right)$$

の関係があるから，H が $H^p(\mathbb{T})$ $(0<p\leq 1)$ で有界作用素であることと，

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{T})} \approx \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|Hf\|_{L^p(\mathbb{T})}$$

なる関係を使えば，$\overbrace{\text{次}}^{\text{命題2から}}$の評価が得られる：

<u>命題3.</u> $|n|\to\infty$ のとき，$\| -i\,\mathrm{sign}(\cdot - n) \|_{\mathcal{M}(H^p(\mathbb{T}))} \approx \begin{cases} \log|n| & p=1 \\ |n|^{\frac{1}{p}-1} & 0<p<1. \end{cases}$

この評価から，

$$\chi_{[k,\infty)}(k) = \begin{cases} 1 & k \geq n \\ 0 & k<n \end{cases}$$

なる Fourier multiplier に対しても，同じく

$$\|\chi_{[n,\infty)}\|_{\mathcal{M}(H^p(\mathbb{T}))} \approx \begin{cases} \log|n| & p=1 \\ |n|^{\frac{1}{p}-1} & 0<p<1 \end{cases} \quad (|n|\to\infty)$$

という評価が得られる。一般の $\mathbb{Z}$ 上の関数 $m(n)$ を，

$$\begin{aligned} m(n) &= \sum_{k=-\infty}^{n} \big(m(k)-m(k-1)\big) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \big(m(k)-m(k-1)\big)\,\chi_{[k,\infty)}(n) \end{aligned}$$

とあわせれば，次の定理が得られる：

<u>定理2.</u> $\displaystyle\sum_n |m(n)-m(n-1)|\log|n| < \infty \implies m\in\mathcal{M}(H^1(\mathbb{T})).$

$0<p<1$ のとき，$\displaystyle\sum_n |m(n)-m(n-1)|^p |n|^{1-p} < \infty \implies m\in\mathcal{M}(H^p(\mathbb{T})).$

References

[1] Brenner, P., The Cauchy problem for systems in L_p and $L_{p,\alpha}$, Ark. Mat. 2, no.1 (1973), 75-101.

[2] Calderón, A. P., and Zygmund, A., On higher gradients of harmonic functions, Studia Math. 24 (1964), 211-226.

[3] Calderón, A. P., and Torchinsky, A., Parabolic maximal functions associated with a distribution, II, Advances in Math. 24 (1977), 101-171.

[4] Carleson, L., Two remarks on H^1 and BMO, Advances in Math. 22 (1976), 269-277.

[5] Coifman, R. R., A real variable characterization of H^p, Studia Math. 51 (1974), 269-274.

[6] Coifman, R. R., and Weiss, G., Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), 569-645.

[7] Fefferman, C., and Stein, E. M., H^p spaces of several variables, Acta Math. 129 (1972), 137-193.

[8] Ishii, H., On some Fourier multipliers and partial differential equations, Mathematica Japonicae 19 (1974), 139-163.

[9] Latter, R. H., A characterization of $H^p(R^n)$ in terms of atoms, Studia Math. 62 (1978), 93-101.

[10] Sjöstrand, S., On the Riesz means of the solutions of the Schrödinger equation, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 24 (1970), 331-348.

[11] Wainger, S., Special trigonometric series in k-dimensions, Mem. Amer. Math. Soc. no. 59, 1965.