数理解析研究所講究録
第 350 巻 1979 年 34-42

ある種の作用素半群について

茨城大 教養　　高野勝男

序、W^p ($p>1$) はルベーグ可測関数で $\int_{-\infty}^{\infty}|f(v)|^p(v^2+1)^{-p/2}dv<\infty$ であるような関数の全体とする。W^p は $\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f(v)|^p(v^2+1)^{-p/2}dv\right]^{1/p}=\|f\|_{W(p)}$ を norm とするとき Banach space となる。t が複素数かつ $\mathrm{Re}\,t>0$ のとき $p(t,v)=\frac{t}{\pi(v^2+t^2)}$ とする。このとき $f\in W^p$ に対して $P(0)f=f$, $(P(t)f)(v)=\int_{-\infty}^{\infty}p(t,v-u)f(u)\,du$ とする。ここでの目的は $\{P(t):0\leqq t<\infty\}$ が W^p から W^p 上への (C_0) 半群であること、また $t=r-is$ ($r>0$) で、$r\to+0$ とするとき、W^p から W^p への (C_0) 群 $\{P(-is):-\infty<s<\infty\}$ が存在することを示すことである。以下において $p>1$ とし $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ とする。

§1、W^p 上の (C_0) 半群

<u>Lemma 1.1.</u> $\mathrm{Re}\,t>0$ とする。$P(t)$ は W^p 上の有界線形作用素である。$\alpha>0$ かつ $\alpha\neq\mathrm{Re}\,t$ であれば

$$\|P(t)\|\leqq\left(\sup_{v\in R}\left|\frac{v-i\alpha}{v-i}\right|\right)\left(\sup_{v\in R}\left|\frac{v-i}{v-i\alpha+it}\right|+\sup_{v\in R}\left|\frac{v-i}{v-i\alpha-it}\right|\right)$$

$$\times \frac{1+M_p}{2} + \frac{|t|}{\pi}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}(v^2+1)^{-p/2}dv\Big]\Big[\int_{-\infty}^{\infty}|v-i\alpha-it|^{-p'}dv\Big]^{1/p'}$$

$$\times\Big(\sup_{v\in R}\Big|\frac{v-i\alpha}{v-i\alpha+it}\Big|\Big), \qquad (1,1)$$

ただし M_p は p のみに関係した定数.

<u>Proof</u> $\alpha>0$ かつ $\alpha \neq \mathrm{Re}\,t$ のとき

$$P(t, v-u) = \frac{1}{2\pi i}\Big\{-\frac{v-i\alpha}{(u-i\alpha+it)(u-v+it)} + \frac{v-i\alpha}{(u-i\alpha-it)(u-v-it)}$$
$$+\frac{2it}{(u-i\alpha-it)(u-i\alpha+it)}\Big\}. \qquad (1,2)$$

これより

$$(P(t)f)(v) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{-\frac{v-i\alpha}{(u-i\alpha+it)(u-v+it)} + \frac{v-i\alpha}{(u-i\alpha-it)(u-v-it)}$$
$$+\frac{2it}{(u-i\alpha-it)(u-i\alpha+it)}\Big\} f(u)\,du. \qquad (1,3)$$

簡単のために, $f(u;\alpha,t) = \frac{f(u)}{u-i\alpha+it}$ とおく。[6. Proof of Theorem 101] より

$$\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\Big|-\frac{1}{2\pi i}\frac{v-i\alpha}{v-i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u)}{(u-i\alpha+it)(u-v+it)}du\Big|^p dv\Big]^{1/p}$$
$$\leqq \Big(\sup_{v\in R}\Big|\frac{v-i\alpha}{v-i}\Big|\Big)\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}f(u;\alpha,t)\frac{1}{u-v+it}du\Big|^p du\Big]^{1/p}$$
$$\leqq \Big(\sup_{v\in R}\Big|\frac{v-i\alpha}{v-i}\Big|\Big)\frac{1+M_p}{2}\|f(\cdot;\alpha,t)\|_p. \qquad (1,4)$$

また次のことがいえる。

$$\|f(\cdot;\alpha,t)\|_p = \Big[\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\frac{f(u)}{u-i}\frac{u-i}{u-i\alpha+it}\Big|^p du\Big]^{1/p}$$
$$\leqq \Big(\sup_{v\in R}\Big|\frac{u-i}{u-i\alpha+it}\Big|\Big)\|f\|_{W(p)}. \qquad (1,5)$$

(1,4), (1,5) から

$$\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\Big|-\frac{1}{2\pi i}\frac{v-i\alpha}{v-i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u)}{(u-i\alpha+it)(u-v+it)}du\Big|^p dv\Big]^{1/p}$$
$$\leqq \Big(\sup_{v\in R}\Big|\frac{v-i\alpha}{v-i}\Big|\Big)\Big(\sup_{v\in R}\Big|\frac{v-i}{v-i\alpha+it}\Big|\Big)\frac{1+M_p}{2}\|f\|_{W(p)}. \qquad (1,6)$$

(1,6) を得た方法と同様にして, 次のことがわかる。

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{2\pi i}\,\frac{v-i\alpha}{v-i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u)}{(u-i\alpha-it)(u-v-it)}\,du\right|^{p}dv\right]^{1/p}$$
$$\leqq\left(\sup_{v\in R}\left|\frac{v-i\alpha}{v-i}\right|\right)\left(\sup_{v\in R}\left|\frac{v-i}{v-i\alpha-it}\right|\right)\frac{1+M_p}{2}\,\|f\|_{W(p)}\,. \qquad (1.7)$$

ヘルダーの不等式と(1.5)によって次がわかる。

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{2\pi i}\,2it\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u)}{(u-i\alpha-it)(u-i\alpha+it)}\,du\right|^{p}(v^2+1)^{-\frac{p}{2}}dv\right]^{1/p}$$
$$\leqq\frac{|t|}{\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u)}{(u-i\alpha-it)(u-i\alpha+it)}\,du\right|\left(\int_{-\infty}^{\infty}(v^2+1)^{-p/2}dv\right)^{1/p}$$
$$\leqq\frac{|t|}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(v^2+1)^{-p/2}dv\right)^{1/p}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u-i\alpha-it|^{-p'}du\right)^{1/p'}\left(\sup_{v\in R}\left|\frac{v-i}{v-i\alpha+it}\right|\right)$$
$$\times\|f\|_{W(p)}\,. \qquad (1.8)$$

(1.6), (1.7), (1.8) より、$P(t)f\in W^p$ であり、$P(t)$ は W^p より W^p への有界線形作用素であることがわかった。更に、(1.1) も得られた。 <終>

以下において

$$(Uf)(u)=\underset{a\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-a}^{a}\exp(-iwu)\,f(w)\,dw$$

ただし、$f\in L^2(\mathbb{R})$ とし、l.i.m は二乗平均収束の意味、とする。このとき、[1, Theorem 21, p.974] より次の結果を得る。

<u>Lemma 1.2.</u> $\mathrm{Re}\,t>0$ とする。$f\in L^2(\mathbb{R})$ とき、

$$(P(t)f)(v)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(iuv-t|u|)(Uf)(u)\,du.$$

$f\in L^p(\mathbb{R})$ のとき、f の Hilbert transform を Cf で表わす。すなわち

$$(\mathcal{C}f)(x) = \lim_{\varepsilon \mapsto +0} \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x+u) - f(x-u)}{u} du. \tag{1.9}$$

また，$D = \frac{d}{dx}$ とおく。$\lambda = r - iq$ $(r > 0)$ かつ $t > 0$ のとき，$(T(\lambda t)f)(v) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda t, v-u) f(u) du$，$(T(0)f)(v) = f(v)$ ただし $f \in L^p(\mathbb{R})$ とすると，[3] の結果より次のことがわかる。

Lemma 1.3. $\{T(\lambda t) : 0 \leqq t < \infty\}$ は $L^p(\mathbb{R})$ 上の (C_0) 半群である。その infinitesimal generator A_λ と domain $D(A_\lambda)$ は次のようなものである。

$D(A_\lambda) = \{ f \in L^p(\mathbb{R}) : (\mathcal{C}f)(x)$ is absolutely continuous and $D\mathcal{C}f \in L^p(\mathbb{R})\}$,

$f \in D(A_\lambda)$ のとき，$(A_\lambda f)(x) = \lambda(D\mathcal{C}f)(x)$. (1.10)

以下において簡単のために，$f \in W^p$ のとき $n(u) = \frac{f(u)}{u-i}$, $g(u) = \frac{f(u)}{(u-i)^2}$ とおくことにする。

Theorem 1. $\lambda = r - iq$ $(r > 0)$ とする。$\{P(\lambda t) : 0 \leqq t < \infty\}$ は W^p 上の (C_0) 半群である。その infinitesimal generator G_λ と domain $D(G_\lambda)$ は次のようなものである。

$D(G_\lambda) = \{ f \in W^p : (\mathcal{C}n)(x)$ is absolutely continuous and $D\mathcal{C}n \in L^p(\mathbb{R})\}$,

$f \in D(G_\lambda)$ とき，

$$(G_\lambda f)(x) = \lambda(x-i)(D\mathcal{C}n)(x) + \lambda(x-i)(\mathcal{C}g)(x) + \frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(u) du.$$

<u>Proof</u> I、 $P(\lambda t)P(\lambda s) = P(\lambda(t+s))$: $0<t,\ s<\infty$ とする。無限回微分可能，急減少な関数の全体を $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ とする。

$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ のとき，$P(\lambda s)f\in L^2(\mathbb{R})$ であり

$$\begin{aligned}P(\lambda t)P(\lambda s)f &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(iuv-\lambda t|u|)\,U(P(\lambda s)f)(u)\,du\\ &=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(iuv-\lambda t|u|)\exp(-\lambda s|u|)(Uf)(u)\,du\\ &=(P(\lambda(t+s))f)(v).\end{aligned}$$

$f\in W^p$ ときは，$f_n\longmapsto f$ as $n\longmapsto\infty$ であるような $f_n\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ をとることによって

$$\begin{aligned}&\|P(\lambda t)P(\lambda s)f-P(\lambda(t+s))f\|_{W(p)}\\ \leqq&\|P(\lambda t)P(\lambda s)f-P(\lambda t)P(\lambda s)f_n\|_{W(p)}+\|P(\lambda(t+s))f_n-P(\lambda(t+s))f\|_{W(p)}\\ &\longmapsto 0\ \text{as}\ n\longmapsto\infty.\end{aligned}$$

従って，すべての $f\in W^p$ について $P(\lambda t)P(\lambda s)f=P(\lambda(t+s))f$ である。

II、 $P(\lambda s)\longmapsto P(\lambda t)$ $(s\longmapsto t)$: [5, Lemma 1.3] によって，$f\in L^p(\mathbb{R})$ のとき L^p-norm の意味で $P(\lambda t)f\longmapsto f$ as $t\longmapsto +0$ がいえる。Lemma 1.1 から，$\|P(t)\|$ は $t=0$ の近傍で一様に有界である。従ってすべての $f\in W^p$ について，$\|P(\lambda t)f-f\|_{W(p)}\longmapsto 0$ as $t\longmapsto +0$ がいえる。

III、 Infinitesimal generator G_λ and its domain $D(G_\lambda)$: (1.3) より次のことがわかる。

$$t^{-1}(P(\lambda t)f-f)(v)=(v-i)t^{-1}\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u)\,du}{(u-i+it\lambda)(u-v+it\lambda)}\right.$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u)\,du}{(u-i-it\lambda)(u-v-it\lambda)}-\frac{f(v)}{v-i}\Big\}+\frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u)\,du}{(u-i-it\lambda)(u-i+it\lambda)}$$

$$=(v-i)t^{-1}\Big\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n(u)}{u-v+it\lambda}du+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n(u)}{u-v+it\lambda}du-n(v)\Big\}$$

$$+(v-i)t^{-1}\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\Big(\frac{1}{u-i}-\frac{1}{u-i+it\lambda}\Big)\frac{du}{u-v+it\lambda}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\Big(\frac{1}{u-i-it\lambda}-\frac{1}{u-i}\Big)\frac{du}{u-v-it\lambda}\Big\}$$

$$+\frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u)\,du}{(u-i-it\lambda)(u-i+it\lambda)}$$

$$=(v-i)t^{-1}\Big\{\int_{-\infty}^{\infty}p(\lambda t,v-u)\,n(u)\,du-n(v)\Big\}$$

$$+(v-i)\frac{i\lambda}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n(u)}{u-i+it\lambda}\frac{du}{u-v+it\lambda}+(v-i)\frac{i\lambda}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n(u)}{u-i-it\lambda}\frac{du}{u-v-it\lambda}$$

$$+\frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u)\,du}{(u-i-it\lambda)(u-i+it\lambda)}. \qquad (1.11)$$

次のことがわかる。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u)\,du}{(u-i-it\lambda)(u-i+it\lambda)}\longmapsto\int_{-\infty}^{\infty}g(u)\,du \quad \text{as } t\longmapsto+0. \qquad (1.12)$$

$g(t,u)=\dfrac{n(u)}{u-i+it\lambda}$ とおく。[6. Proof of Theorem 101]

より次のことがわかる。

$$\Big\{\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}g(t,u)\frac{du}{u-v+it\lambda}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}g(-t,u)\frac{du}{u-v-it\lambda}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}g(u)\frac{du}{u-v+it\lambda}-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}g(u)\frac{du}{u-v-it\lambda}\Big|^{p}dv\Big\}^{1/p}$$

$$\le\frac{1+M_p}{2}\{\|g(t,\cdot)-g\|_p+\|g(-t,\cdot)-g\|_p)\longmapsto 0 \quad \text{as } t$$

$$\longmapsto+0. \qquad (1.13)$$

一方、次のことが示せる。

$$\Big\{\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}g(u)\frac{du}{u-v+it\lambda}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}g(u)\frac{du}{u-v-it\lambda}+i(\mathcal{C}g)(v)\Big|^{p}dv\Big\}^{1/p}$$

$$=\Big\{\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}g(y-tq)\frac{dy}{y-v+itr}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}g(y+tq)\frac{dy}{y-v-itr}$$

$$+i(\mathcal{C}g)(v)\Big|^{p}dv\Big\}^{1/p}$$

$$\le\Big\{\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}g(y)\frac{y-v}{(y-v)^2+(tr)^2}dy+i(\mathcal{C}g)(v)\Big|^{p}dv\Big\}^{1/p}$$

$$+\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}(g(y-tq)-g(y))\frac{dy}{y-v+itr}\right|^p dv\right\}^{1/p}$$
$$+\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}(g(y+tq)-g(y))\frac{dy}{y-v-itr}\right|^p dv\right\}^{1/p}. \quad (1.14)$$

[6, Proof of Theorem 101] および [7, Example 19, P. 397] によって次のことがわかる。

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}g(y)\frac{y-v}{(y-v)^2+(tr)^2}+i(Cg)(v)\right|^p dv\right\}^{1/p}\longmapsto 0$$
as $t\longmapsto +0$, (1.15)

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}(g(y-tq)-g(y))\frac{dy}{y-v+itr}\right|^p dv\right\}^{1/p}$$
$$\leqq \frac{1+M_p}{2}\|g(\cdot-tq)-g\|_p \longmapsto 0 \text{ as } t\longmapsto +0. \quad (1.16)$$

そして

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}(g(y+tq)-g(y))\frac{dy}{y-v-itr}\right|^p dv\right\}^{1/p}$$
$$\leqq \frac{1+M_p}{2}\|g(\cdot+tq)-g\|_p \longmapsto 0 \text{ as } t\longmapsto +0. \quad (1.17)$$

故に、(1.13)－(1.17) より次がえられる。

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}g(t,u)\frac{du}{u-v+it}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}g(-t,u)\frac{du}{u-v-it}\longmapsto -i(Cg)(v)$$
as $t\longmapsto +0$. (1.18)

従って、(1.11), (1.12), (1.18) そして Lemma 1.3 より，定理の主張がえられた。 ＜終＞

§2. W^p 上の (C_0) 群

Lemma 1.1 より次の Lemma がえられる。

Lemma 2.1. $P(t)$ は複素右半平面上で，強連続かつ正則な作用素関数である。$t=\xi+is$, $(-\infty<s<\infty,\ \xi>0)$ とおくとき，$0<\xi\leqq 1$ かつ $|s|\leqq 1$ であれば $\|P(t)\|\leqq M$

がいえる。ただしMは定数.

以下において、(1.2) におけるαの値を1とすることにする。次の Lemma が得られる。

<u>Lemma 2.2.</u> $-\infty < s < \infty$とするとき

$$(P(is)f)(v) = \left\{ f(v-s) + i(v-i)\left(C\frac{f}{\cdot-i+s}\right)(v-s)\right\}\frac{1}{2}$$
$$+\left\{ f(v+s) - i(v-i)\left(C\frac{f}{\cdot-i-s}\right)(v+s)\right\}\frac{1}{2} + \frac{is}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u)\,du}{(u-i+s)(u-i-s)}$$

なるW^p上からW^pへの作用素$P(is)$を定義する。このときすべての$f \in W^p$について, norm 収束の意味で

$$\lim_{\xi \mapsto +0} P(\xi + is)f = P(is)f$$

が成立する。

Theorem 1, Lemma 2.1, Lemma 2.2 そして [2, Theorem 17. 9. 2] によって次の定理がえられる。

<u>Theorem 2.</u> $\{P(it) : -\infty < t < \infty\}$ はW^p上の(C_0)群である。その *infinitesimal generator* G_i と *domain* $D(G_i)$は次のようなものである。

$D(G_i) = \{ f \in W^p : (Cn)(x)$ *is absolutely continuous and* $DCn \in L^p(R)\}$,

$f \in D(G_i)$のとき

$$(G_i f)(x) = i(x-i)(DCn)(x) + i(x-i)(Cg)(x) + \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,du\,.$$

References

1. N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear operators, Part II: Spectral theory, Interscience, New York 1963.
2. E. Hille and E. S. Phillips, Functional analysis and semigroups, A. M. S. Colloq. Publ, vol. 31 (1957).
3. ——, On the generation of semigroups and the theory of conjugate functions, Proc. R. Physiogr. Soc. Lund, 21 : 14 (1951), 130–142.
4. S. Koizumi, On the singular integrals. V, Proc. Japan Acad., 35 (1959), 1–6.
5. K. Takano, An analogous method to Cameron and Storvick's function space integral and evolution systems, J. London Math. Soc. 16 (1977), 83–95.
6. E. C. Titchmarsh, Introduction to the theory of the Fourier integrals, Oxford Univ. Press, Second Edition. 1948.
7. ——, The Theory of Functions, Oxford Univ. Press, Second Edition, 1939.