数理解析研究所講究録
第 350 巻 1979 年 74-88

非可換Hardy空間の最近の結果

新潟大　理　　斉藤　吉助

§1. 序.　今まで、関数環の理論を作用素環に導入する試みが数例くなされ、作用素環の研究に寄与している。1967年、Arveson[1]は w*-Dirichlet 環の非可換化として、subdiagonal 環を定義したが、最近、河村-富山[6], Loebl-Muhly[5], Zsidó[13]によって, von Neumann 環上の flow によって定義される非負なスペクトラムをもつ集合が subdiagonal 環になることから、その構造やそれに関する不変部分空間の研究が、なされている。([6, 7, 8, 10, 12 etc])。

このような研究において，関数環の概念、特に Beurling's Th. などの不変部分空間についての理論を作用素環に導入したとき、それがいかなる位置にあるのか、元来の作用素環の概念とどんなふうに結びつくのか，さらに、関数環の理論を作用素環の立場から、見直すことができるかというような点で、興味深い。

そこで、本講演では、特に、flow によって与えられる非可

換Hardy空間についての今までの結果を紹介するのが目的である。Mをvon Neumann環，Gをtotally ordered dual Γをもつlocally compact abelian group. $\Gamma_+ = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \geq 0\}$. $\{\alpha_g\}_{g\in G}$をM上のσ-弱連続1径数同型群とするとき，$x \in M$のspectrumを$Sp_\alpha(x)$とすると，$H^\infty(\alpha) = \{x \in M : Sp_\alpha(x) \subset \Gamma_+\}$として，定義される。このとき，$G = \mathbb{T}$(単位円)のときの$H^\infty(\alpha)$の構造，$G = \mathbb{R}$の場合の不変部分空間の形の決定，特に，Mがfaithful normal normalized traceをもつときについて示す。最後に接合積の中に定義される$H^\infty(\alpha)$についてBeurling's Theoremが成り立つための必要十分条件，σ-弱部分環としての$H^\infty(\alpha)$の極大性などについて述べる。

§2. MをHilbert空間H上のvon Neumann環，Gを局所コンパクト可換群で$\Gamma = \hat{G}$（Gの双対）でtotally orderedとする。$\Gamma_+ = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \geq 0\}$とおく。$\{\alpha_g\}_{g\in G}$をM上の$\sigma$-弱連続一径数同型群とする。しかも$\{\alpha_g\}_{g\in G}$はtrivialでないとする。
任意の$f \in L^1(G)$，$x \in M$に対して

$$\alpha(f)x = \int_G \alpha_g(x) f(g)\, d\mu(g) \quad (\mu : G\text{の Haar measure})$$

としてfとxのconvolutionを定義する。$J(x) = \{f \in L^1(G) : \alpha(f)x = 0\}$とすると，$J(x)$は$L^1(G)$の閉イデアルになるので，xのスペクトラムとして，

$$\mathrm{Sp}_\alpha(x) = \text{hull of } J(x) = \bigcap_{f\in J(x)} \{\gamma \in \Gamma : \hat{f}(\gamma) = 0\}$$

のように定義する。但し、$\hat{f}(\gamma) = \int_G \langle g, \gamma \rangle f(g)\,d\mu(g)$ とする。今 E を Γ の部分集合とするとき flow の spectral subspace を

$$M^\alpha(E) = \{x \in M : \mathrm{Sp}_\alpha(x) \subset E\}$$

と定義する。このとき、$M^\alpha(E)$ は M の部分空間になる。E が Γ の閉集合ならば、$M^\alpha(E)$ は M の σ-弱閉部分空間になる。そこで特に、$H^\infty(\alpha) = M^\alpha(\Gamma_+)$, $H^\infty_0(\alpha)$ を $M^\alpha(\Gamma_+ \setminus \{0\})$ の σ-弱閉包とする。この $H^\infty(\alpha)$ を我々は flow $\{\alpha_g\}_{g\in G}$ によって与えられる非可換Hardy空間という。

Proposition 1. 1) $H^\infty(\alpha)$ は M の非共役な σ-弱閉部分環である。

2). $H^\infty_0(\alpha)$ は $H^\infty(\alpha)$ の 2-sided ideal である。

3). $H^\infty(\alpha) + H^\infty(\alpha)^*$ は M で σ-弱稠密である。 //

さらに $M(\alpha) \equiv H^\infty(\alpha) \cap H^\infty(\alpha)^*$ とおくと

$$M(\alpha) = \{x \in M : \alpha_g(x) = x \ (\forall g \in G)\} = M^\alpha(\{0\})$$

となる。そこで、この $H^\infty(\alpha)$ の構造を調べるために次の定義を述べる。

定義 1. D を M の von Neumann 部分環とする。Φ を M から D の上への σ-weakly continuous linear map とする。このとき、Φ が normal expectation とは $\|\Phi\| = 1$ で $\Phi|D$ が identity map のときをいう。Φ が faithful とは $\Phi(x^*x) = 0$ をみたす $x \in M$ は 0 に限るときをいう。

定義2. AをMのσ−弱閉部分環で1∈Aとする。ΦをMからA∩A*の上へのfaithful normal expectationとする。今AがΦに関してsubdiagonal環とは次のことが成立するときにいう。

(1). A + A*はMでσ−弱稠密

(2) ΦはA上乗法的. i.e. ∀x, y ∈ Aに対して Φ(xy) = Φ(x)Φ(y) をみたす。

さらにAがmaximalとはAを含むproperなΦに関してMのsubdiagonal環が存在しないときをいう。Aがfiniteとは, Mにfaithful normal finite trace τが存在して, τ∘Φ = τをみたすときにいう。

定理1.([4, 5, 13]) Mから$M(\alpha)$の上へのfaithful normal expectation Φで, $\Phi\circ\alpha_g = \Phi$ $(\forall g \in G)$なるものが存在するとすれば, $H^\infty(\alpha)$はΦに関して, maximal subdiagonal環になる。しかも, このとき, $H_0^\infty(\alpha) = \{x \in H^\infty(\alpha) : \Phi(x) = 0\}$が成り立つ。

この定理の条件は, α_g-invariant normal stateが十分たくさん($M_+-\{0\}$と0を分離する)あることと必要十分条件である。この条件はG-finiteという条件でよく知られている。

今GをCompactとする。∀x∈M, ∀γ∈Γに対して,

$$\mathcal{E}_\gamma(x) = \int_G \overline{\langle g, \gamma \rangle}\, \alpha_g(x)\, d\mu(g)$$

と定義する。今 $M_\gamma = \{x \in M : \alpha_g(x) = \langle g, \gamma \rangle x\}$ とおくと、

$$\mathcal{E}_\gamma(M) = M_\gamma = M^\alpha(\{\gamma\})$$

が成り立つ。特に、$\mathcal{E}_0$ は M から $M(\alpha)$ の上への faithful normal expectation で $\mathcal{E}_0 \circ \alpha_g = \mathcal{E}_0$ をみたす。しかも $\forall x \in M$ に対して、$Sp_\alpha(x) = \{\gamma \in \Gamma : \mathcal{E}_\gamma(x) \neq 0\}$ より、

$$H^\infty(\alpha) = \{x \in M : \mathcal{E}_\gamma(x) = 0 \ (\forall \gamma < 0)\}$$

をみたす。このことから $\{\mathcal{E}_\gamma(x)\}_{\gamma \in \Gamma}$ は x の Fourier 係数と考えてよい。特に $M = L^\infty(\mathbb{T})$ ($\mathbb{T}$：単位円) とする。$\forall f \in L^\infty(\mathbb{T})$ に対して、$\alpha_{e^{it}} f(e^{is}) = f(e^{i(t+s)})$ とすると、$\{\alpha_{e^{it}}\}_{e^{it} \in \mathbb{T}}$ は $L^\infty(\mathbb{T})$ 上の σ-弱連続一径数同型群で、periodic, eragodic である。しかも

$$H^\infty(\mathbb{T}) = \{f \in L^\infty(\mathbb{T}) : \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(e^{it})\, dt = 0 \ (\forall n < 0)\}$$

とおくと、$\mathcal{E}_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\, dt$ で、$H^\infty(\alpha) = H^\infty(\mathbb{T})$ が成り立つ。これが、$H^\infty(\alpha)$ が非可換 Hardy 空間といわれる理由である。ここで注目すべきことは、$H^\infty(\mathbb{T})$ は $L^\infty(\mathbb{T})$ の中で σ-weakly closed subalgebra として maximal になる。そこで、一般の $H^\infty(\alpha)$ に対して Th. 1 から、$H^\infty(\alpha)$ は subdiagonal 環としての maximality がわかっているが、$H^\infty(\alpha)$ はどんなときに M の σ-weakly closed subalgebra として maximal になるか、ということが一つの興味がある。また $H^\infty(\mathbb{T})$ の場合は $L^2(\mathbb{T})$ の不変部分空間のすべての形が決定されていることから、$H^\infty(\alpha)$ においても、不変部分空間の形はどうなるかという興味

がある。これらのことを次節以下で研究結果を述べる。

§3. M を Hilbert 空間 H 上の von Neumann 環とする。$G=\mathbb{R}$. したがって、$\Gamma=\mathbb{R}$ とする。このとき、$\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を M 上で考える。今、$H^\infty(\alpha)$ に関して不変な H の閉部分空間について、調べる。

定義3. $\mathfrak{M}$ を H の閉部分空間で $H^\infty(\alpha)\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}$ とする。

(1) $\mathfrak{M}$ が reducing $\Leftrightarrow$ $H^\infty(\alpha)^*\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}$.

(2) $\mathfrak{M}$: left-normalized $\Leftrightarrow$ $\bigwedge_{t<0}\{M^\alpha([t,\infty))\mathfrak{M}\}^{cl}=\mathfrak{M}$.

(3) $\mathfrak{M}$: right-normalized $\Leftrightarrow$ $\bigvee_{t>0}\{M^\alpha([t,\infty))\mathfrak{M}\}^{cl}=\mathfrak{M}$.

Proposition 1 (3) により、$H^\infty(\alpha)+H^\infty(\alpha)^*$ は M で σ-弱稠密であるから、$\mathfrak{M}$: reducing subspace $\Leftrightarrow$ $M\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}$.

$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{M}=pH$ をみたす M' の projection p がある.

そこで、non-reducing subspace に対して、考察する。今 p を M' の projection とする。$\pi_p(x)=x|_{pH}$ $(x\in M)$ として定義する。このとき、Loebl-Muhly [5] によって、次の定理が得られた。

定理2 ([5, Theorem 5.2]). $\mathfrak{M}$ を H の non-reducing subspace とする。$\mathfrak{M}$ が left-normalized ならば、M' の projection P_1, P_2 $(P_1\lneqq P_2)$

と PH 上の強連続 unitary 群 $U=\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ が存在して,

$$\pi_p(\alpha_t(x)) = U_t \pi_p(x) U_t^* \qquad (*)$$

$$\mathfrak{M} = \{F([0,\infty))pH\} \oplus P_1 H \qquad (**)$$

をみたす。但し. F は PH 上の U_t の spectral measure, $P=P_2-P_1$ とする。$\mathfrak{M}$ が right-normalized ならば $(*)$ で $\mathfrak{M}=\{F([0,\infty))PH\}\oplus E_1 H$ をみたす $\{U_t\}$ と P_1, P_2 がある。

この定理を $\mathfrak{M}$ の Wold decomposition という。

定義4. $\mathfrak{A}$ を $B(H)$ の部分環とする。$\mathfrak{A}$ が reductive とは $\mathfrak{A}\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}$ なる H の任意の closed subspace $\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{A}^*\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}$ をみたす。

このとき. weakly closed non-self-adjoint reductive algebra は存在するかという問題は Reductive algebra question として、知られているが, ここでは. 定理2より σ-weakly closed non-self-adjoint reductive algebra は存在することを示す。

定理3. M を II_∞-factor で M' は II_1-factor とする。τ を M 上の faithful normal semi-finite trace で $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を $\tau\circ\alpha_t=e^{\lambda t}\tau$ $(\lambda>0)$ をみたす M 上の σ-弱連続な flow とする。このとき.

$H^\infty(\alpha)$ は non-self-adjoint σ-weakly closed reductive algebra で $H^\infty(\alpha)$ は M で weakly dense になる。

この定理3によって、Reductive algebra question は解決されない。しかし、non-self-adjoint subalgebra において、weak topology と σ-weak topology の違いを示しているように思いる。

§4. この節では finite trace が存在する von Neumann 環に対して、$H^p(\alpha)$ を定義し、Wiener Theorem や Beurling theorem として知られている定理の一般化を考えることによって、不変部分空間の形を決定するのを目的とする。

M を Hilbert 空間 H 上の von Neumann 環で τ を M 上の faithful normal finite trace で $\tau(1)=1$ とする。今 $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を $\tau\circ\alpha_t=\tau$ をみたす M 上の σ-weakly continuous flow とする。このとき、τ の α_t-invariant によって、M から $M(\alpha)$ の上の faithful normal expectation Φ で $\Phi\circ\alpha_t=\Phi$ をみたすものが存在する。このとき、$H^\infty(\alpha)$ は Φ に関する finite, maximal, subdiagonal 環になる。今 x を H の closed operator (必ずしも有界でない) とする。x が可測 (measurable) とは a と x が可換 (任意の $a\in M'$ に対して) とする。$1\leq p<\infty$ に対して、

$$L^p(M,\tau)=\{x:\text{measurable},\ \tau(|x|^p)=\int_0^\infty \lambda^p\,d\tau(e_\lambda)<\infty\}$$

但し．$|x|=(x^*x)^{\frac{1}{2}}$ で $|x|=\int_0^\infty \lambda\, de_\lambda$ とする。このとき．L_p－ノルム $\|x\|_p=\tau(|x|^p)^{\frac{1}{p}}$ とすると，$L^p(M,\tau)$ は Banach 空間になる。$S\subset L^p(M,\tau)$ に対して、$[S]_p$ を $L^p(M,\tau)$ における S の L^p－ノルム閉包とする。また $p=\infty$ のときは $L^\infty(M,\tau)=M$ とする。$1\leq p<\infty$ に対して．$\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ は $L^p(M,\tau)$ 上の isometry からなる $\mathbb{R}$ の強連続表現に一意に拡張できる（[cf. [10, Proposition 2.2]）ので．これから $L^p(M,\tau)$ 上においても．flow の spectral subspace が定義できる。そこで．$H^p(\alpha)$ を $\{x\in L^p(M,\tau): Sp_\alpha(x)\subset[0,\infty)\}$ とする また $H_0^p(\alpha)=$ L^p-norm closure of $\{x\in L^p(M,\tau): Sp_\alpha(x)\subset(0,\infty)\}$ とする。このとき．

Proposition 2. $1\leq p\leqq\infty$, $1/p+1/q=1$ で $x\in L^p(M,\tau)$ とする。このとき次のことは同値．

(1). $x\in H^p(\alpha)$.

(2) $\forall y\in L^q(M,\tau)$ に対して $t\longrightarrow\tau(x\alpha_t(y))$ は $H^\infty(\mathbb{R})$ に属する。

(3) $\forall y\in H_0^q(\alpha)$ に対して．$\tau(xy)=0$.

(4) $\forall y\in H_0^\infty(\alpha)$ に対して．$\tau(xy)=0$.

Proposition 3. $1\leq p<\infty$ とする。

(1) Φ は $L^p(M,\tau)$ から $[M(\alpha)]_p$ の上への norm 1 の projection Φ_p に一意に拡張できる。

(2) $H_0^p(\alpha)=\{x\in H^p(\alpha): \Phi_p(x)=0\}$.

(3) $H^p(\alpha)=[H^\infty(\alpha)]_p$. $H^p_0(\alpha)=[H^\infty_0(\alpha)]_p$.

定理4. $\mathfrak{M}$を$L^p(M,\tau)$のclosed subspaceで$H^\infty(\alpha)\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}$とする。

(1) $(H^\infty(\alpha)+H^\infty(\alpha)^*)\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}$であることと$\mathfrak{M}=L^p(M,\tau)e$をみたすMのprojection eが存在することは同値。

(2). $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$がergodic. すなわち、$M(\alpha)=\mathbb{C}$ならば$[H^\infty_0(\alpha)\mathfrak{M}]_p\subsetneq\mathfrak{M}$であることと$\mathfrak{M}=H^p(\alpha)u$をみたすMのunitary operator uが存在することは同値。

しかしながら、すべての不変部分空間を決定するには、かなり一般的に思いる。そこで、この特別の場合として、接合積によって定義される非可換Hardy空間を次の節で考察する。

§5. Mをfaithful normal finite traceをもつvon Neumann環とする。$\tau(1)=1$とする。$L^2(M,\tau)$を§4における空間とする。αをM上の任意の$*$-automorphismで$\tau\circ\alpha=\tau$とする。このとき、$\alpha(x)=uxu^*$をみたす$L^2(M,\tau)$上のunitary operator uがある。今

$$\mathfrak{L}^2=\{f:\mathbb{Z}\longrightarrow L^2(M,\tau):\sum_{n=-\infty}^{\infty}\|f(n)\|^2<\infty\}$$

とおく。$\forall x\in M$, $\forall f\in\mathfrak{L}^2$に対して

$$(L_xf)(n)=xf(n)$$

$$(R_xf)(n)=f(n)\alpha^n(x).$$

$$(L_\delta f)(n) = u\, f(n-1).$$
$$(R_\delta f)(n) = f(n-1).$$

と定義すると．$L_x, R_x, L_\delta, R_\delta$ は L^2 上の有界線形作用素になる。$\{L_x\}_{x\in M} \equiv L(M)$, $\{R_x\}_{x\in M} \equiv R(M)$ とおく。$\mathcal{L}$ を $L(M)$ と L_δ によって生成された von Neumann 環，$\mathcal{R}$ を $R(M)$ と R_δ によって生成された von Neumann 環とする。このとき．$\mathcal{L}' = \mathcal{R}$, $\mathcal{R}' = \mathcal{L}$ が成り立つ。さらに．$\mathcal{L}_+$ を $L(M)$ と L_δ によって生成された $\mathcal{L}$ の σ-弱部分環，$\mathcal{R}_+$ を $R(M)$ と R_δ によって生成された $\mathcal{R}$ の σ-弱部分環とする。$(W_t f)(n) = e^{int} f(n)$．とおくと $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ は L^2 上の unitary 群になるので．$\forall x \in \mathcal{L}$ に対して，$\beta_t(x) = W_t x W_t^*$ によって $\mathcal{L}$ 上の σ-weakly continuous flow を定義する。このとき $\{\beta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ は period 2π の flow になるので $\mathbb{T}$（単位円）上の flow と考えてよい。しかも $\mathcal{L}_+ = H^\infty(\beta)$ が成り立つ。

定義 5. $\mathfrak{M}$ を L^2 の closed subspace とする。

(1) $\mathfrak{M}$: left-invariant $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}_+\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{M}$.

(2) $\mathfrak{M}$: right-invariant $\Leftrightarrow$ $\mathcal{R}_+\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{M}$.

(3) $\mathfrak{M}$: 2-sided invariant $\Leftrightarrow$ $(\mathcal{L}_+ + \mathcal{R}_+)\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{M}$.

(4) $\mathfrak{M}$: pure $\Leftrightarrow$ $\bigcap_{n>0} L_\delta^n \mathfrak{M} = \{0\}$.

(5) $\mathfrak{M}$: full $\Leftrightarrow$ $[\bigvee_{n<0} L_\delta^n \mathfrak{M}]_2 = \mathfrak{M}$.

今 $H^2 = \{f \in L^2 : f(n) = 0 \ (\forall n < 0)\}$ とおく。このとき、$H^2 = [\mathcal{L}_+]_2 = [\mathcal{R}_+]_2$ で H^2は pure かつfull 2-sided invariant subspace である。そこで、不変部分空間の研究として、次の条件を考える。Beurling's Theorem が成立するとは、L^2のすべての pure left-invariant subspace は VH^2 (V は$\mathcal{R}$の partial isometry)にかけることをいう。このとき、

定理5. αがMの center 上で trivial であることと Beurling's Theorem が成り立つことは同値である。

このために、次の Lemma が必要である。

Lemma. $\mathfrak{M}_i$をL^2の pure left-invariant subspace とする。($i = 1, 2$). P_iをL^2から$\mathfrak{M}_i \ominus L_\delta \mathfrak{M}_i$ の上への projection とする。このとき $P_i \in L(M)'$。もしも $L(M)'$において $P_2 \precsim P_1$ ならば、$\mathfrak{M}_2 = V\mathfrak{M}_1$をみたす$\mathcal{R}$の partial isometry Vがある。

定理5の証明 ($\Rightarrow$) αがMの center $\mathfrak{Z}(M)$上で trivial であるとする。$\mathfrak{M}$をL^2の pure left-invariant subspace とする。PをL^2から$\mathfrak{M} \ominus L_\delta \mathfrak{M}$の上への projection、$P_0$を$L^2$から$H^2 \ominus L_\delta H^2 = [M\alpha]_2$ の上への projection とする。$P, P_0 \in L(M)'$故 Comparability theorem を用い

て、$L_z P \gtrsim L_z P_0$ かつ $(1-L_z)P \precsim (1-L_z)P_0$ をみたす projection $z \in \mathfrak{Z}(M)$ が存在する。α が $\mathfrak{Z}(M)$ 上 trivial 故 $L_z \in \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$。$L_z\mathfrak{M}$, L_zH^2 は pure left-invariant subspace 故、Lemma から、$L_zH^2 = V_1 L_z\mathfrak{M}$ をみたす $\mathcal{R}$ の partial isometry V_1 がある。同様にして、$(1-L_z)\mathfrak{M} = V_2(1-L_z)H^2$ をみたす $\mathcal{R}$ の partial isometry V_2 がある。ところが H^2 が full であることから、$V_1V_1^* = L_z$ がわかり、M の finiteness より、$V_1^*V_1 = L_z$。そこで $L_z\mathfrak{M} = V_1^*L_zH^2$。従って $V = V_1^*L_z + V_2(1-L_z)$ とおくと V は $\mathcal{R}$ の partial isometry で $\mathfrak{M} = VH^2$.

($\Leftarrow$) 今 α が $\mathfrak{Z}(M)$ 上で trivial でないとすると、$\alpha(e)e = 0$ をみたす $\mathfrak{Z}(M)$ の projection $e\,(\neq 0)$ がある。今 $\mathfrak{M} = \{f \in L^2 : f(n) = 0\ (\forall n \leq -2),\ ef(-1) = f(-1)\}$ とおくと $\mathfrak{M}$ は pure full left-invariant subspace で さらに $L_eL_\delta^*\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$ である。今 $\mathfrak{M} = VH^2$ (V は $\mathcal{R}$ の partial isometry) の形にかけたとすると $\mathfrak{M}$ は full 故 V は unitary operator。そこで

$$L_eL_\delta^* H^2 = L_eL_\delta^* V^*\mathfrak{M} = V^*L_eL_\delta^*\mathfrak{M} \subset V^*\mathfrak{M} = H^2.$$

これは $L_eL_\delta^* \in \mathcal{L}_+$ を示すが、これは矛盾。 //

次に M が factor と $\mathcal{L}_+$ の maximality, と不変部分空間の形についての関係を示す。

定理6. 次のことは同値.

(1). Mは factor である。

(2). $\mathcal{L}_+$ は $\mathcal{L}$ の maximal σ-weakly closed subalgebra である。

(3). L^2 のすべての $\mathcal{L}\mathfrak{M} \subsetneqq \mathfrak{M}$ なる 2-sided invariant subspace は $VH^2 = WH^2$ (V は $\mathcal{R}$ の unitary operator, W は $\mathcal{L}$ の unitary operator) とかける。

(4) H^2 のすべての 2-sided invariant subspace は full かつ pure。

(5) Beurling's theorem が成り立ちかつ $L(M)\cap(\mathcal{L}\cap\mathcal{L}') = \mathbb{C}$ をみたす。

以上のことより不変部分空間の形は α が $\mathfrak{Z}(M)$ 上で trivial でないときが複雑であるがまた興味深い。定理6の証明は[6]にゆずることにする。

そこで次に $M = L^\infty(X)$ (X: standard Borel space) の場合を考える。$\tilde{\alpha}$ を $X \to X$ の measure preserving transformation で、$\{\tilde{\alpha}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は無限群とする。このとき、$\tilde{\alpha}$ は M 上の $*$-automorphism α に induce される。今 $\tilde{\alpha}$ を ergodic と仮定する。このとき $\{\alpha^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は freely acting になるから、$\mathcal{L}$ と $\mathcal{R}$ は factor になる。また、L^2 と $L^2(\mathbb{Z}\times X)$ を同一視することができるので部分空間は $L^2(\mathbb{Z}\times X)$ で考えることにする。このとき、L_δ と R_δ から、次のような $\mathbb{Z}\times X \to \mathbb{Z}\times X$ への変換が induce される。$\lambda(n,x) = (n+1, \tilde{\alpha}(x))$, $\rho(x,x) = (n+1, x)$ によって、定義される。このとき

定理7. $\mathfrak{M}$が$L^2(\mathbb{Z}\times X)$の2-sided invariant subspaceであることと$\lambda(B)\subseteq B$, $\rho(B)\subseteq B$, $\mathfrak{M}=L^2(B)$をみたす$B\subset\mathbb{Z}\times X$が存在する。

この結果はMcAsey[6]の中にある。さらに、多くの結果が[6]において、精力的に研究されている。

注 参考文献はこの講究録の"非可換Hardy空間における分解定理とその応用"を見ること。