数理解析研究所講究録
第 350 巻 1979 年 134-147

作用素環上の dynamical semi-groups について

新潟大・理・ 渡辺誠治

§1. 序

非可換な作用素環の order structure を解明するには，単なる positive linear map のみを考えたのでは，あまりにも一般的すぎてその深い性質を十分にとらえることができず，そのような状況における自然な対象として completely positive linear map. (C.P. map.) が注目されてきている。さらに C.P. map. は作用素環の本質的な構造理論においても重要な役割りを果すことが明らかになってきている。

一方ある種の C.P. map. の one-parameter semi-group (dynamical semi-group) が，非可逆過程の時間発展を記述するための自然な設定として物理の人々により取り上げられて研究されるようになってきた。

しかしながらそのような直接的，具体的な物理的背景を考えなくても，*-automorphism の one-parameter group を

種々の性質と対比させてみると興味深い。例えば infinitesimal generator に関して云えば norm continuous *-automorphism group の場合は有界な*-derivation になるが、unital C.P. map. の norm continuous one-parameter semi-group のそれはどのようにして特徴づけられるか, derivation とのずれがどのような形であらわれるか? が問題となる。

Dynamical semi-group については種々の面から多くの研究がなされているが, 以下では §2. で norm continuous dynamical semi-group の infinitesimal generator の構造について述べ, §3 では ultraweakly continuous dynamical semi-group に対する種々の ergodic Theorems について述べる。

まずはじめに dynamical semi-group の定義をのべる。

[定義]. M を Von Neumann algebra, M_* を M の predual とする。このとき M 上の operator の one-parameter semi-group $\alpha = \{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ は次の (1) (2) (3) をみたすとき M 上の dynamical semi-group という。

(1) 各 α_t は M 上の unital normal C.P. map

(2) $\alpha_0 = I$. (M 上の identity map)

(3) α : ultraweakly continuous
(即ち $t \to \phi(\alpha_t(A))$: continuous $\forall \phi \in M_*$ $\forall A \in M$)

§. 2. Infinitesimal generator の構造

この§. では Von Neumann algebra M 上の dynamical semi-group $\alpha = \{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ が norm continuous のときを考える。このとき $\alpha = \{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ の generator (M上の bounded linear operator) を特徴づけるため次の定義をおく。[8]

[定義] Von Neumann algebra M上の linear map L は次の(1)(2)をみたすとき M上の dissipation という。

(1) $L(1) = 0, \quad L(A)^* = L(A^*) \qquad (A \in M)$

(2) $L(A^*A) \geqq L(A^*)A + A^*L(A) \qquad (A \in M)$

このとき, dissipation は常に bounded であることが Kishimoto [5] により示されている。
次に $M_n(M)$ を M上の $n \times n$ matrix algebra とするとき, 任意の $n \geq 1$ に対して

$$L_n : M_n(M) \longrightarrow M_n(M)$$
$$(A_{ij}) \qquad\qquad (L(A_{ij}))$$

が dissipation ならば L を completely dissipation (C.D.) と云う。

このとき norm continuous dynamical semi-group の generator の特徴づけが得られる。

[定理] (G. Lindblad [8])

$\alpha = \{e^{tL}\}_{t \geqq 0}$ が M 上の norm continuous dynamical semi-group なのは L が M 上の ultraweakly continuous completely dissipation のときに限る。

そこで次に completely dissipation L がどのような構造をしているかが問題になる。

さて $\{e^{tL}\}_{t \in \mathbb{R}}$ が unital C.P. map の norm continuous one-parameter ~~semi~~-gr. なのは L と $-L$ が C.D. のとき，即ち L が $*$-derivation のときに限る。そしてこれは $\{e^{tL}\}_{t \in \mathbb{R}}$ が norm cont. $*$-auto. gr. の時に他ならない。

一方 M 上の C.P. map Φ に対して $L_\Phi(X) \doteqdot \Phi(X) - \frac{1}{2}\{\Phi(1)X + X\Phi(1)\}$ $(X \in M)$ とすると L_Φ は C.D. となり，$*$-derivation D に対して $L \equiv D + L_\Phi$ とおくと L は M 上の C.D. となる。逆に次のことが問題になる。即ち

[問題㊟] Von Neumann algebra M 上の任意の C.D. L に対して M 上の C.P. map Φ と $*$-derivation D が存在して $L = L_\Phi + D$ とできるか？

問題㊉に対して，Gorini，Kossakowski，Sudarshan [11] が $M = M_n$（matrix algebra）に対して，Lindblad [8] が separable Hilbert space 上の hyperfinite factor M 上の ultraweakly continuous C.D. に対して肯定的に解決した。さらに Thompson [12] は semi-finite V.N. algebra M 上の ultraweakly continuous C.D. に対してやはり肯定的に解決した。又 Lindblad [9]，Evans－Lewis [4]，Christensen [1] が問題㊉より少し弱い形の分解定理を得ている。そしてついに Christensen－Evans [2] は問題㊉が一般の V.N. algebra M に対して肯定的であることを示した。実は彼らはもっと一般的な次の定理を証明した。

［定理］

$\mathcal{A}$ を Hilbert space H 上で作用している C^*-algebra とする。このとき $\{e^{tL}\}_{t \geqq 0}$ を $\mathcal{A}$ 上の unital C.P. map の norm continuous one-parameter semi-group とすると L は次の形にかける。

$$L(A) = L_{\Phi}(A) + i[H, A] \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

ここで Φ は $\mathcal{A}$ から $\overline{\mathcal{A}}$（$\mathcal{A}$ の weak closure）への C.P. map かつ $H \in \overline{\mathcal{A}}$，$H = H^*$ にとれる。

［証明の方針］

$$D(X, Y, Z) = L(XYZ) + XL(Y)Z - L(XY)Z - XL(YZ)$$

$$(X, Y, Z \in \mathcal{A})$$

とおくと

$$\sum_{1}^{n}(D(X_i^*, Y_i^* Y_j, X_j)\xi_j, \xi_i) \geqq 0 \quad {}^\forall X_1 \cdots X_n \in \mathcal{A}, \ {}^\forall \xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n \in H$$

である。このことから Stinespring の表現定理と同様にして次の(1)(2)(3)をみたす表現 $\pi : \mathcal{A} \to B(K)$ と bdd. l. map $V : \mathcal{A} \to B(H, K)$ が構成できる。

(1) $D(X, Y, Z) = V(X^*)^* \pi(Y) V(Z) \qquad (X, Y, Z \in \mathcal{A})$

(2) $V(XY) = \pi(X)V(Y) + \pi(Y)V(Z) \qquad (X, Y \in \mathcal{A})$

(3) $K = [\pi(X)V(Y)h \,;\, h \in H, X, Y \in \mathcal{A}]$

ここで [ ] は closed linear span をあらわす。

次に $H \oplus K$ への $\mathcal{A}$ の表現 $Id \oplus \pi$ を考え、derivation δ を $\delta(X \oplus \pi(X)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V(X) & 0 \end{pmatrix}$ により定義する。そしてこの δ をくわしくしらべることにより次の(1)′(2)′をみたす $\gamma \in B(H, K)$ が存在することがわかる。

(1)′ $\gamma \in [V(X)B \,;\, X \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A}]$

[ ] は ultraweakly closed linear span をあらわす。

(2)′ $V(X) = \gamma X - \pi(X)\gamma \qquad ({}^\forall X \in \mathcal{A})$

このとき $\Phi(X) = \gamma^* \pi(X) \gamma$, $D(X) = L(X) - L_\Phi(X) \quad (X \in \mathcal{A})$ とおくと Φ は $\mathcal{A}$ から $\bar{\mathcal{A}}$ への C.P. map., D は $\mathcal{A}$ から $\bar{\mathcal{A}}$ への $*$-derivation となる。$\lrcorner$

[注] norm continuous でない場合の generator は unbdd.

dissipation として特徴づけられるが，しかし unbdd. dissipation のくわしい構造は知られていない。［cf. 3］。

§3. Ergodic theorems

この§.では dynamical semi-gr. に対する種々の ergodic theorems ~~を~~ について述べる。

まずはじめに V.N. algebra M 上の dynamical semi-group $\alpha=\{\alpha_t\}_{t\geqq 0}$ に対して積分 $\int_0^T \alpha_t(A)\,dt \quad (A\in M,\ T>0)$ を

$$<\int_0^T \alpha_t(A)\,dt,\ \phi> = \int_0^T <\alpha_t(A),\phi>dt \qquad (\phi\in M_*)$$

により定義する。即ち ultraweak topology での積分を考える。又各 α_t は normal だから其の preadjoint を α_{t*} とすると，$\alpha_*\equiv\{\alpha_{t*} \mid t\geqq 0\}$ は M_* 上の positive contraction の strongly continuous one-parameter semi-group となる。

非可換作用素環上の automorphism gr. に対する mean ergodic theorems は Kovács - Szücs [6] 以来多くの人々により，種々の観点から，研究されている。又 non-commutative individual ergodic theorem については最近 E.C. Lance [7]，Y.G. Sinai - V.V. Anshelvich [10] が，それぞれ discrete automorphism gr. と quasi-local observal algebra

上の translations の group に対して示している。これら二つの ergodic theorems の他に local ergodic theorem も合せて、dynamical semi-group に対して、以下のように formulate される。[13]。

[定理1]（平均エルゴード定理）

M, M_* をそれぞれ V.N. algebra とその predual, $\alpha = \{\alpha_t\}_{t \geqq 0}$ を M 上の dynamical semi-group とし、M 上の α-invariant faithful normal state ρ が存在するとする。このとき

(1) 任意の $A \in M$ に対して、ultrastrong $\underset{T \to +\infty}{\text{limit}} \frac{1}{T}\int_0^T \alpha_t(A)dt$ ($\equiv \mathcal{E}(A)$ とおく) が存在し、$\mathcal{E}: M \to M$ は α の fixed points algebra M^α への faithful normal α-invariant norm one projection となる。

(2) 任意の $\phi \in M_*$ に対して norm $\underset{T \to +\infty}{\text{limit}} \frac{1}{T}\int_0^T \alpha_{t*}(\phi)dt$ が存在して $\mathcal{E}_*(\phi)$ に等しい。ここで $\mathcal{E}_*$ は $\mathcal{E}$ の preadjoint map. をあらわす。

[定理2]（個別エルゴード定理）

M, $\alpha = \{\alpha_t\}_{t \geqq 0}$, ρ, $\mathcal{E}$ を定理1におけるものと同じとする。このとき $M \ni A$ と正数 $\delta > 0$ に対して、M の projection E が存在して、$\rho(1-E) < \delta$, $\lim_{T \to +\infty} \| (\frac{1}{T}\int_0^T \alpha_t(A)dt - \mathcal{E}(A))E \| = 0$ とできる。

[定理3] (局所エルゴード定理)

M, $\alpha = \{\alpha_t\}_{t \geqq 0}$, ρ を定理1におけるものと同じとする。
このとき $M \ni A$ と正数 $\delta > 0$ に対して M の projection E が存在して $\rho(1-E) < \delta$, $\lim_{T \to +\infty} \|(\frac{1}{T}\int_0^T \alpha_t(A)dt - A)E\| = 0$ とできる。

[定理1の略証]

ρ に対する GNS representation により Hilbert sp. 上の contraction operators の strongly continuous one-parameter semi-gr. の mean ergodic theorem に帰着させる.
$(\pi_\rho, H_\rho, \xi_\rho)$ を ρ に associate する GNS representation とする。
このとき α_t は Schwarz inequality を満たすことより,
$T_t \pi_\rho(A)\xi_\rho = \pi_\rho(\alpha_t(A))\xi_\rho$ により H_ρ 上の contraction op's の strongly cont. one-para. semi-gr. $\{T_t\}_{t \geqq 0}$ が定義できる。
E を $\{x \in H_\rho ;\ T_t x = x \quad {}^\forall t \geqq 0\}$ への projection とすると,
$\{T_t\}_{t \geqq 0}$ に対する mean ergodic th. より

$$\pi_\rho\left(\frac{1}{T}\int_0^T \alpha_t(A)dt\right)\xi_\rho \longrightarrow E\pi_\rho(A)\xi_\rho \quad (T \to +\infty)$$

従って

$$\langle X_1\xi_\rho, X_2\xi_\rho\rangle \fallingdotseq (E\pi_\rho(A)\xi_\rho, X_1^* X_2 \xi_\rho) \quad (X_1, X_2 \in \pi_\rho(M))$$

は $\pi_\rho(M)'\xi_\rho$ (H_ρ の dense subsp.) 上の bdd. sesqui-linear form になる。故に $\langle X_1\xi_\rho, X_2\xi_\rho\rangle = (YX_1\xi_\rho, X_2\xi_\rho)$ なる $Y\in B(H_\rho)$ が存在する。このときさらに $Y\in\pi_\rho(M)$ が示せる。故に $Y=\pi_\rho(A_0)$ なる A_0 を $\mathcal{E}(A)$ とおくと $\mathcal{E}$ が求める norm one projection になる。

又 ultrastrong $\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\alpha_t(A)dt = \mathcal{E}(A)$ も示せる。

(2) についてはまず $\phi(A) = (\pi_\rho(A)X_1\xi_\rho, X_2\xi_\rho)$ $(X_1, X_2\in\pi_\rho(M)')$ なる ϕ に対して示して、次に ρ が faithful であることにより、このような形の ϕ が M_* で norm dense なることよりわかる。

[定理２の略証]

まず $f\in L^1(R^+)$ と $A\in M$ に対し convolution $f*_\alpha A$ を

$$f*_\alpha A = \int_0^\infty f(t)\alpha_t(A)dt$$

により定義する。ここで積分は前と同じように ultraweak topology で考える。

[Lemma 1]

関数 $f_k(t) \equiv \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(\frac{\frac{1}{k}}{(\frac{1}{k})^2+t^2} - \frac{k}{k^2+t^2}\right) & t\geqq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$

を考え、$A_k = f_k *_\alpha A + \mathcal{E}(A)$ ($\mathcal{E}$ は定理１における norm one proj.) とおくと $\|A_k\|\leqq 3\|A\|$, $A_k \xrightarrow[k\to\infty]{} A$ (st*), かつ $\lim_{T\to+\infty}\left\|\frac{1}{T}\int_0^T\alpha_t(A_k)dt - \mathcal{E}(A_k)\right\| = 0$

[略証]

最後の主張は A_k に f_k を代入して直接に計算すればよい。

$A_k \to A$ (St^*−) を示すため $(\pi_\rho, H_\rho, \xi_\rho)$ を ρ に associate する GNS rep-resentation とする。このとき E を定理1の証明における projection とすると，

$$\pi_\rho(A_k)\xi_\rho = \int_0^\infty f_k(t) T_t(\pi_\rho(A)\xi_\rho)dt + E\pi_\rho(A)\xi_\rho$$

ここで $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を $\{T_t\}_{t\geqq 0}$ の $K \supseteq H$ への unitary dilation とし，

$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dE_\lambda$ を $\{U_t\}$ の spectral representation とすると，

$$\pi_\rho(A_k)\xi_\rho = P_H \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^\infty f_k(t) e^{it\lambda} dt\right] dE_\lambda\, \pi_\rho(A)\xi_\rho$$

となることがわかり，Fourier transf. の性質より

$$\begin{aligned}\pi_\rho(A_k)\xi_\rho &\to P_H(\pi_\rho(A)\xi_\rho - (E_0 - E_{0-0})\pi_\rho(A)\xi_\rho) \\ &= E\pi_\rho(A)\xi_\rho\end{aligned}$$

となることがわかる。

さらに π_ρ : faithful, ξ_ρ : cyclic for $\pi_\rho(M)'$ であることより $A_k \to A$ (St^*−) がわかる ⌟

次に証明の key point である次の Lemma 2 が必要である。これは本質的には E. C. Lance [7] による。又これは non-commutative maximal ergodic theorem とみなせる。

[Lemma 2]

Φ を V.N. algebra M 上の normal C.P. map，ρ を M 上の Φ−invariant faithful normal state とすると，$M \ni {}^\forall B \geqq 0$ $\|B\| = 1$ に対して $M \ni C \geqq 0$，が存在して $\|C\| \leqq 2$，$\rho(C) \leqq 4\rho(B)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{n}(B + \cdots + \Phi^{(n-1)}(B)) \leqq C \quad (\forall n \geq 1)$ とできる。

証明は [7] における Theorem 2.1, Lemma 5.1 Lemma 5.2 と同様の方法でできる。又この Lemma から次の Lemma が直ちに得られる。

[Lemma 3] M, α, ρ を定理２におけるものとする。このとき $M \ni \forall B \geqq 0$, $\|B\| = 1$ に対して $M \ni C \geqq 0$ が存在して $\|C\| \leqq 2$, $\rho(C) \leqq 4\rho(B)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{T}\int_0^T \alpha_t(B)dt \leqq C + \frac{1}{T}1 \quad (\forall T \geq 1)$ とできる。

[定理２] の略証

$M \ni \forall A$ に対し Lemma 1 における A_k を考える。このとき $A_k \to A$ (st*-) かつ $\{A_k\}$ は bdd. であるから、非可換エルゴード定理と Lemma 3 より求める projection E が得られる。

[定理３の略証]

定理３の証明の方針も定理２の場合と同様で，Lemma 1, Lemma 2 に対応する次の Lemmas が示されればよい。

[Lemma 4] M, α, ρ を定理１におけるものとする。

$$f_k(t) = \begin{cases} k & 0 \leqq t \leqq \frac{1}{k} \\ 0 & 0 > t, \quad t > \frac{1}{k} \end{cases}$$ とおく。

このとき

$M \ni \forall A$ に対して $A_k = f_k *_\alpha A$ とおくと. $\|A_k\| \leqq \|A\| \quad (k=1,2,\cdots)$

$A_k \to A$ (st^*) かつ $\lim_{T\to+0} \| \frac{1}{T}\int_0^T \alpha_t(A_k)dt - A_k \| = 0$

[Lemma 5] M, α, ρを定理1におけるものとする。
このとき $M \ni {}^\forall B \geqq 0$, $\|B\|=1$ に対して $M \ni C \geqq 0$ が存在して
$\|C\| \leqq 2$, $\rho(C) \leqq 4\rho(B)^{\frac{1}{2}}$ かつ $\frac{1}{T}\int_0^T \alpha_t(B)dt \leqq C$
$({}^\forall T \in (0,1])$ とできる。

[注] [定理1, 2, 3] の証明をくわしく check すれば
わかるように, dynamical semi-gr. が c.p. map の semi-gr. ということは本質的に用いていない。即ち各 α_t が Schwarz inequality を満せば証明は通用する。
従って定理1, 2, 3 は unital normal 2-positive map の ultraweakly cont. semi-gr. に対しても成立する。
又定理1に対しては単なる positive map の semi-gr. に対しても, 弱い形の定理を示すことができる。[13]

参考文献

[1] E. Christensen, Generators of semi-groups of completely positive maps, Preprint.

[2] E. Christensen and D.E. Evans, Cohomology of operator algebras and quantum dynamical semi-groups, Prprint (1978).

[3] D.E. Evans, Irreducible quantum dynamical semi-groups,

Comm.Math.Phys. 54, 293 - 297 (1977).

[4] D.E. Evans - J.T. Lewis, Dilations of irreversible evolutions in algebraic quantum theory, Comm. Dubl.Inst. Adv. Stud. Ser. A 24 (1977).

[5] A. Kishimoto, Dessipation and derivations, Comm. Math. Phys. 47, 25 - 32, (1976).

[6] I. Kovács - J. Szücs, Ergodic theorems in Von Neumann algebras, Acta. Sci. Math. 27, 233 - 246 (1966).

[7] E.C. Lance, Ergodic theorems for convex sets and operator algebras, Inv. Math. 37, 201 - 214 (1976).

[8] G. Lindblad, On the generators of quantum dynamical semigroups, Comm. Math. Phys. 48, 119 - 130 (1976).

[9] G. Lindblad, Dissipative operators and cohomology of operator algebras, Letters Math. Phys. 1, 219 - 224 (1976).

[10] Y.G. Sinai - V.V. Anshelvich , Some problems of non-commutative ergodic theory, Russian Math. Surveys, 31-4, 157 - 174 (1976).

[11] E.C.G. Sudarshan, A. Kossakowski and V. Gorini, Completely positive dynamical semi-groups of N-level systems, J. Math. Phys. 17, 821 - 825 (1976).

[12] C.W. Thompson, Dissipations on Von Neumann algebras , Comm. Math. Phys. 62, 71 - 78 (1978).

[13] S. Watanabe, Ergodic thorems for dynamical semi-groups on operator algebras, Preprint.