数理解析研究所講究録
第351巻 1979年 1-13

特異性を持つPfaff系について

東大・理　　真島秀行

§.0. はじめに.

特異性を持つ常微分方程系の理論をPfaff系について拡張するという試みが近年行なわれている。以下で定義する単純特異性の場合はR.GERARD-A.H.LEVELT[1]及びK.TAKANO-M.YOSHIDA[2]によって研究された。残されていることは不確定特異性を持つ常微分方程式論に対応する理論を構築することである。本稿では、その一つの接近法を与える(著者はこのやり方がかなりよいものと信ずるが、もっと良い理論の構成の仕方があってよいように思う)。

§.1. 概説。

U (resp. U') を $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{C}^m$) の原点の近傍とし、Σ を $\mathbb{C}^n$ 内の原点を含む解析的集合とする。問題とするのは次のPfaff系である;

$$(S)_a \qquad dz = \sum_{i=1}^{n} a_i(x,z)\,dx_i \qquad z = {}^t(z_1, \cdots, z_m)$$

ここで, $a_i(x,z)$ は $(U\setminus\Sigma)\times U'$ で正則な函数で、次

の条件を満足しているものとする。

$(\mathrm{I.C})_a \quad \partial_i a_j + \partial_z a_j \cdot a_i = \partial_j a_i + \partial_z a_i \cdot a_j \quad i,j=1\cdots n$

$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial_z = (\frac{\partial}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_m})$ である。

我々がより強く興味を持つのは線型系の場合である i.e.、

$(S)_A \qquad dZ = (\sum_{i=1}^{n} A_i(x)\,dx_i)Z$

$(\mathrm{I.C})_A \quad \partial_i A_j + A_j A_i = \partial_j A_i + A_i A_j \quad i,j=1,\cdots,n$。

広中の定理により原理的には、Ξが正規交叉の場合を扱えばよいので、以下ではΞ$=\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i=0\}$と考える。この時、周知の如く次の命題が成立する。

命題1. $(S)_A$は原点で次のような形の基本解を持つ;

$$\Phi(x) = Q(x)\prod_{i=1}^{n} \exp(B_i \log x_i)$$

ここで, $B_i \in M(m,\mathbb{C})$, $[B_i, B_j] = 0$ そして $Q(x) \in GL(m, \mathcal{O}(U\setminus\Xi))$。

一般的仮定の下ではこの程度しかわからず、より一層良くPfaff系の解を把握するためには $A_i(x)$ の属する函数の範囲に制限を付けなくてはいけない。$\mathcal{M}(U;\Xi)$ をU上で、有理型で高々Ξにしか特異性のない函数の全体の集合とする; すなわち、

$$\mathcal{M}(U;\Xi) = \{f(x) \in \mathcal{O}(U\setminus\Xi);\ {}^{\exists}\alpha \in \mathbb{N}_0^n\ x^{\alpha}f(x) \in \mathcal{O}(U)\}$$

以下では、$A_i(x) \in M(m, \mathcal{M}(U;\Xi))$ とする。そうすると次のような多重指数 $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$ が定まる。

$$\beta = \min\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \,;\, x^{\alpha+1_i} A_i(x) \in M(m, \mathcal{O}(U)) \quad \forall i=1,\cdots,n\}$$

ここで $1_i = (0,\cdots,\underset{i\text{番目}}{1},\cdots 0)$ で、$\alpha \leqq \alpha' \Leftrightarrow \forall i \ \alpha_i \leqq \alpha'_i$ とした。この指数を $(S)_A$ の Poincaré rank といい、$\mathrm{rang}(S)_A$ 又は $\mathrm{rang}(A)$ で表わす。そうすると、$(S)_A$ は次のように書ける；

$$(S)_{B,\beta} \qquad x^\beta dz = \sum_{i=1}^n \frac{B_i(x)z}{x_i} dx_i \qquad B_i \in M(m, \mathcal{O}(U))$$

$B_i(x)$ は次の条件を満たすことになる；

$$(I.C)_{B,\beta} \qquad x^\beta(x_i\partial_i B_j - \beta_i B_j) + B_j B_i \qquad i,j = 1,\cdots,n$$
$$= x^\beta(x_j\partial_j B_i - \beta_j B_i) + B_i B_j$$

この形は少し奇妙かもしれないがうまく行く。尚、Poincaré rank は有理型変換に対しては不変ではないが、正則変換に対しては不変であることを注意しておく。

$\beta = \mathrm{rank}(A) = 0$ の場合を単純特異性を持つ場合というが、この場合は既に研究し尽くされている。非線型単純特異性の場合、すなわち、所謂、Briot-Bouquet 型のとき i.e.

$$(S)_{b,0} \qquad dz = \sum_{i=1}^n \frac{b_i(x,z)}{x_i} dx_i$$

これについても、K. KINOSHITA [3] による研究が進行中である。従って、$\alpha \neq 0$ に対して

$$(S)_{a,\alpha} \qquad x^\alpha dz = \sum_{i=1}^n \frac{a_i(x,z)}{x_i} dx_i$$

とくに

$$(S)_{A,\alpha} \qquad x^\alpha dz = \sum_{i=1}^n \frac{A_i(x)z}{x_i} dx_i$$

を以下で考える。パラメーター　$\varepsilon = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k)$を含む場合

$$(S)_{\mu,a,\alpha} \qquad \varepsilon^{\mu} x^{\alpha} d_x z = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(x,\varepsilon;z)}{x_i} dx_i$$

とくに

$$(S)_{\mu,A,\alpha} \qquad \varepsilon^{\mu} x^{\alpha} d_x z = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i(x,\varepsilon) z}{x_i} dx_i$$

も、かなりの程度に同様に議論を進められる。

§、2、形式的議論その1、

${}_{\varepsilon}\hat{\mathcal{O}} = \mathbb{C}[[\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_\mu]]$ で $\mathbb{C}$ 上の ε 変数形式巾級数環を表わし、${}_{\varepsilon}\hat{\mathcal{O}}_x$ で ${}_{\varepsilon}\hat{\mathcal{O}}$ 上の x 変数形式巾級数環を表わす。${}_{\varepsilon}\hat{m}_x$ は ${}_{\varepsilon}\hat{\mathcal{O}}_x$ の極大イデアルとする。

n 個の形式巾級数 $a_i(x,\varepsilon;z) = a_{i,0}(x,\varepsilon) + A_i(x,\varepsilon)z + \sum_{|\beta|=2}^{\infty} a_{i,\beta}(x,\varepsilon) z^{\beta}$
$i=1,\cdots,n$, $a_{i,\beta} \in \Gamma(m, {}_{\varepsilon}\hat{\mathcal{O}}_x) = {}_{\varepsilon}\hat{\mathcal{O}}_x^{\,m}$, $A_i \in M(m, {}_{\varepsilon}\hat{\mathcal{O}}_x)$ で、

$$(I.C)_{\mu,a,\alpha} \qquad \begin{aligned} &\varepsilon^{\mu} x^{\alpha} (x_i \partial_i a_j - \alpha_i a_j) + \partial_z a_j \cdot a_i \\ &= \varepsilon^{\mu} x^{\alpha} (x_j \partial_j a_i - \alpha_j a_i) + \partial_z a_i \cdot a_j \end{aligned} \qquad i,j=1,\cdots,n$$

を満たすものに対して

$$(S)_{\mu,a,\alpha} \qquad \varepsilon^{\mu} x^{\alpha} d_x z = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(x,\varepsilon;z)}{x_i} dx_i$$

を考える。$d_x z = \sum \partial_i z\, dx_i$ とした。この系について次の事柄が成立する。

命題2、$a_j(0,0) = 0$ $\forall j=1,\cdots,n$ とする。或る i に対して、$A_i(0,0) = \partial_z a_i(0,0)$ が可逆ならば、$(S)_{\mu,a,\alpha}$ は形式解 $\hat{\varphi}(x,\varepsilon) \in {}_{\varepsilon}\hat{\mathcal{O}}_x$ を持つ。$\varphi(0,0)=0$ なるものは唯一つである。

命題3、$(S)_{\mu,a,\alpha}$ が形式解を持つ必要十分条件は、この系が未知函数の一次変換によって、未知函数に関して0次の項がない系に変換出来ることである。そのような Pfaff 系は、

未知函数について一次の部分だけを取り出してみたとき，やはり (C.I.C) を満たす Pfaff 系になっている。

命題4．(C.I.C) をみたす $a_i(x)$ については特に次のことが云える；$[\partial_z a_i(0.0), \partial_z a_j(0.0)] = 0 \quad i, j = 1, \cdots, n$。

命題5．$(S)_{\mu, a, \alpha}$ が形式解を持つならば，適当な $P \in GL(m, \mathbb{C})$ があって，$P^{-1} \partial_z a_i(0.0) P^{-1} = \alpha_i \Lambda + N_i$ と書ける。ここで，$\Lambda = (\lambda_1 I_{m_1} \oplus \cdots \oplus \lambda_s I_{m_s})_{\lambda_p \neq \lambda_q}$ $\sum_{p=1}^{p} m_p = m$，I_{m_p} は m_p 次単位行列。$N_i = N_{i,1} \oplus \cdots \oplus N_{i,s}$ $N_{i,p} \in M(m_p, \mathbb{C})$ で上三角巾零行列である。特に $(S)_{\mu, A, \alpha}$ に対して，このような P が存在する。

命題6．$(S)_{\mu, A, \alpha}$ は塊対角化出来る。すなわち，命題5の Λ の形に応じて，次のような $P(x, \varepsilon) = I - (p_{ij}(x)) \in GL(m, {}_\varepsilon\hat{\mathcal{O}}_x)$ が存在する。

i) $p_{ij} \in M(m_i \times m_j, {}_\varepsilon\hat{m}_x)$

ii)
$$B_i(x, \varepsilon) = P^{-1}(A_i(x, \varepsilon) P - \varepsilon^\mu x^{\alpha + 1_i} \partial_i P)$$
$$= B_{i,1}(x, \varepsilon) \oplus \cdots \oplus B_{i,s}(x, \varepsilon)$$
$$B_{i,p}(0,0) = \alpha_i \lambda_p I_{m_p} + N_{i,p}$$

iii)
$$\varepsilon^\mu x^{\alpha + 1_i} \partial_i P_{jk} = -A_{jk} + \sum_{r \neq j} P_{jr} A_{i,rk} - A_{i,jj} P_{jk} + \sum_{r \neq j} P_{jr} A_{i,rj} P_{jk}$$
$$B_{i,j} = A_{i,jj} - \sum_{r \neq j} P_{jr} A_{i,rj}$$

ここで，$A_i = (A_{i,jk})$ と塊に分けた。

注意 7．上の命題において、

$$A_{i,rq}(x,\varepsilon) = \varepsilon^{\mu} x^{\alpha+1_i} A'_{i,rq}(x,\varepsilon) + A''_{i,rq}(x,\varepsilon)$$

$$B_{i,r}(x,\varepsilon) = \varepsilon^{\mu} x^{\alpha+1_i} B'_{i,r}(x,\varepsilon) + B''_{i,r}(x,\varepsilon)$$

$$P_{rq}(x,\varepsilon) = \varepsilon^{\mu} x^{\alpha+1_i} P'_{rq}(x,\varepsilon) + P''_{rq}(x,\varepsilon)$$

と書くとき、$B''_{i,r}$, P''_{rq} は次の系をみたしている

$$C''_{i,r} = A''_{i,rr} - \left\{ \left(\Sigma_{r \neq q} P_{qr} A_{i,rq} \right) \text{の } \varepsilon^{\mu} x^{\alpha+1_i} \text{ による割り算の余り} \right\}$$

$$0 = A_{i,rq} + \left\{ A''_{i,rr} P''_{rq} - \Sigma_{p \neq r} P''_{rp} \left(A''_{i,pq} + A''_{i,pr} P''_{rq} \right) \right\}$$

この事は、A が正則のとき重要で、そのとき、$B''_{i,r}$ が正則にとれることがわかる。

最後にパラメーターを含まない場合について付言しよう。

$$(S)_{a,\alpha} \quad x^{\alpha} dz = \Sigma_{i=1}^{n} \frac{a_i(x)}{x_i} z\, dx_i$$

$$(I.C)_{a,\alpha} \quad x_i \partial_i a_j - \alpha_i a_j = x_j \partial_j a_i - \alpha_j a_i$$

という単独 Pfaff 系を考える。

命題 8．上の系に対して次のような $p(x) \in \hat{\mathcal{O}}_x$ が存在する；$\{1-p(x)\}^{-1}\{a_i(x)(1-p(x)) + x^{\alpha+1_i}\partial_i p\} = a''_i(x)$

ここで、$a''_i(x) = a_i(x) - x^{\alpha+1_i} a'_i(x)$。

命題 9．$(S)_{A,\alpha}$ において、或る $A_i(0)$（従って全ての $A_i(0)$）が m 個の相異なる固有値を持つならば、次のような $P(x) \in GL(m, \hat{\mathcal{O}}_x)$ が存在する；

$z = P(x) y$ なる変換によって $(S)_{A,\alpha}$ は、

$$(S)_{B,\alpha} \quad x^{\alpha} dy = \Sigma_{i=1}^{n} \frac{B_i(x) y}{x_i} dx_i$$

$$B_i(x) = b_{i,1}(x) \oplus \cdots \oplus b_{i,m}(x)$$

$$b_{i,p}(x) = \sum_{|\beta|=0}^{\infty} b_{i,p,\beta}\, x^{\beta} \qquad b_{i,p,\beta} = 0 \quad \beta \geqq \alpha + 1_i 。$$

§. 3、解析的議論。

$\tilde{X}$ を $X = \mathbb{C} - \{0\}$ の普遍被覆空間とし、それを次のように $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ と同一視する；

$$\tilde{X} \ni \tilde{x} \xmapsto{\pi_r \times \pi_\theta} (|\tilde{x}|, \arg x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

同様に $\tilde{X}^n$ を $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^n$ と同一視する。

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 $\tilde{C}$ と $r = (r_1, \cdots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$ に対して

$$\tilde{S}(\tilde{C}; r) = \{\tilde{x} \in \tilde{X};\ (\arg \tilde{x}_1, \cdots, \arg \tilde{x}_n) \in \tilde{C},\ 0 < |\tilde{x}_i| < r_i\}$$

と置く。

$\omega \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n \setminus \{0\}$ を取る。$\mathbb{R}^n$ の連結部分集合 $\tilde{C}$ が、ω と α に関して固有であるというのは、$\tilde{C} \cap \{\theta \in \mathbb{R}^n; \cos(\omega - \alpha\theta) \leqq 0\}$ が唯一つの連結成分しか持たないとき。$\tilde{S} \subset \tilde{X}$ が ω と α に関して固有であるというのは、$\pi_\theta(\tilde{S})$ がそうであるときを云う。$\tilde{C}$ が ω と α に関して固有ならば、$\tilde{S}(\tilde{C}; r)$ はそうである。(~~注意~~、$\alpha\theta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \theta_i$ である。)

さて、$(S)_{a,\alpha}$ を考える。ここで $a_i(x,z)$ は $D_x(r_0) \times D_z(\delta_0)$ (各々 $x=0$, $z=0$ に於ける多重円板) で正則とする。このとき、次の定理を得る。

定理10、$\partial_z a_i(0,0)$ が可逆であるとする。~~$\tilde{C}_n$ を~~ λ_n をその固有値とする。$\tilde{C}_n$ を $\arg \lambda_n$ と α に関する固有集合とし

$\tilde{C}=\bigcap_{h=1}^{n}\tilde{C}_h$ と置く。r が十分小ならば、$\hat{S}(\tilde{C},r)$ で正則な m 次元ベクター $\varphi(x)$ で、$(S)_{a,\alpha}$ の解となっていて、その形式解（命題２を見よ）に強漸近的であるものが存在する。ここで強漸近的とは次のことを意味する；

$f(x)\in\mathcal{O}(\hat{S}(\tilde{C};r))$ が $\hat{f}=\sum f_\beta x^\beta\in\hat{\mathcal{O}}_x$ に漸近的であるとは、$^\forall N\in\mathbb{N}$ $^\forall\tilde{C}'$ 閉矩形 $\subset\tilde{C}$ $^\exists r'$ $^\exists C_{N,r'}$ $\hat{S}(\tilde{C}',r')$ 上で

$$|f(x)-\sum_{|\beta|\leq N}f_\beta x^\beta|\leq C_{N,r}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^{N+1}$$

が成立することをいい、強漸近的とは、$^\forall\gamma\in\mathbb{N}^n$ に対して、$\partial^\gamma f$ が $\partial^\gamma\hat{f}$ に漸近的であることを意味する。

注意11、$^\forall i$ に対して $\alpha_i>0$ のときには、上のような、$(S)_{a,\alpha}$ の解の自由度が次の数で与えられる。＃は濃度を表わす。

$$\#\{\text{i};\{\theta\in R^n;\cos(\omega-\alpha\theta)\leq 0\}\cap C_h=\phi\}$$

或る i について $\alpha_i=0$ のときには、断言出来ぬが、確定特異性的に解が一意にどこの固有集合上でも決まってしまうと考えられる。

上のような定理を得るには、$a_i(x,z)$ が x について原点で正則である必要はなく強漸近展開を持つという仮定の下で証明出来る

定理12．$S_x(a,b;r_0)$ を $\tilde{X}$ 中の多重扇形とする。$a_i(x,z)$ は $S_x(a,b;r_0)\times D_z(\delta_0)$ で正則で、

$$a_i(x,z)=a_{i,0}(x)+A_i(x)z+\sum_{|\beta|\geq 2}a_{i,\beta}(x)z^\beta$$

と展開したとき，$a_{i,0}, A_i, a_{i,\beta}$ は $S(a,b;r)$ で強漸近展開を持つとする。かつ $\lim_{x\to 0} A_i(x) = A_i(0)$ が可逆であるとする。この仮定の下で、定理10に相当することが成立する。

同様に $(S)_{\mu,a,\alpha}$ についても次の仮定の下に定理を得る；

1)″ $a_i(x,\varepsilon;z)$ は $D_x(r_0)\times\tilde{S}(\tilde{C}_0;\rho_0)\times D_z(\delta_0)$ で正則。

2)″ $a_i(x,\varepsilon;z)$ は $D_x(r_0)\times D_z(\delta_0)$ で一様なεに関する漸近展開を持つ。

3)″ $a_i(x,\varepsilon;z) = a_{i,0}(x,\varepsilon) + A_i(x,\varepsilon)z + \sum_{|\gamma|\ge 2} a_{i,\gamma}(x,\varepsilon)z^{\gamma}$ と展開するとき、$A_i(x,\varepsilon)$, $a_{i\gamma}(x,\varepsilon)$ が $D_x(r_0)\times\tilde{S}_\varepsilon(\tilde{C}_0,\rho_0)$ で正則で強漸近展開を持つ。

定理13、上の仮定及び、$A_i(0,0)$ が可逆という条件の下で、定理10と同様のことが成立する。

この種の非線型Pfaff系に関する定理を確立しておくと、§2で行なった塊対角化に対して解析的な意味を付することが出来る。

定理14.(cf.15) $A_i(x)$ を原点で正則(resp. 多重扇形で正則かつ強漸近展開を持つ)とする。$\tilde{C}_{p,q}$ を $\arg(\lambda_p-\lambda_q)$ とαに関する固有集合とする、ただし $\alpha_i\lambda_p$ は $A_i(0)$ の固有値とする。$\tilde{C}=\bigcap_{p\neq q}\tilde{C}_{p,q}$ とおくとき、$\tilde{S}(\tilde{C},r)$ 上での正則変換で $(S)_{A,\alpha}$ は塊対角化出来る。

定理16、$A_i(0)$ が n 個の相異なる固有値を持つならば、唯一つに決まる原点で正則な~~函~~複行列係数のPfaff系に、あらゆる $\widetilde{S}(\widetilde{C}, r)$ (r 十分小) 上で、そこで決まるそれ上の正則変換によって $(S)_{A,\alpha}$ は塊対~~角~~角化され、n 個の単独系となる。

定理17. $(S)_{\mu,A,\alpha}$ についても、$\widetilde{S}_x(\widetilde{C}, r) \times \widetilde{S}(\widetilde{C}_0', \rho_0')$ で塊対角化が正則な範囲で出来る。$C_0' \subset \widetilde{C}_0$, $\rho_0' < \rho_0$。

§. 4. 一般にPfaff系 $(S)_{A,\alpha}$ を考えるとき、その解がどのような形をしているか、すぐにはわからない。Malmquist-福原-Turritin が(常微分方程式論で)行ったように、方程式をより簡単な系に還元して理解するのが著者にはもっともよいと思われる。この方向で得た結果を示そう。

用いる変換は次の通り。

変換a) 0次係数行列正準化 (命題5)

変換b) 塊対角化 $\begin{cases} \text{形式的なもの (命題6)} \\ \text{解析的なもの (　定理14, 15)} \end{cases}$

変換c) mod $x^{\alpha+1}$ 消滅 (命題8)

変換d) $z = \exp\left(\frac{A}{x^\alpha}\right) y$ 型

変換e) 単独高階化 (或る変数については単独高階方程式系とする。)

変換f) Shearing i.e. $z = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & x^\alpha & \\ & & \ddots \\ & & & x^{m\alpha-m} \end{pmatrix} y$ 型の変換

変換*) blow up $x_i = t_i$ $i \neq j$, $x_j = t_k t_j$ $\exists k \neq \exists j$

変換**) 巾 $x_i = t_i^{p_i}$ $p_i \in N$

この中で a)〜f)は未知函数に関するもの、*)**)は独立変数に関するものである(これはPfaff系を独立変数空間の被覆空間上で考えるために作られるのである。)

注意18. 常微分方程式のときに比べて *)が余計にふえているが、これは次の理由に依ると考えられる。

$X = \mathbb{C} - \{0\}$ の有限被覆は、$x = t^p$ で与えられるが、

$X^n = \mathbb{C}^n - \cup\{x_i = 0\}$ の有限被覆は、$x_i = \prod t_j^{\sigma_{ij}}$ $\det \sigma_{ij} \neq 0$ で与えられ、また次のことが知られる

「任意のX^nの有限被覆Uで $\sigma_{ij} > 0$ なるものに対して、$\exists X^n$及びUの有限被覆$\tilde{U}$で、$X^n \longleftrightarrow \tilde{U}$ が*)と**)で分解するようなものがある。」

このことは著者が成立すると考えたものとは違うが、堀川氏により上のように定式化され、斎藤恭司氏が証明してくれた。

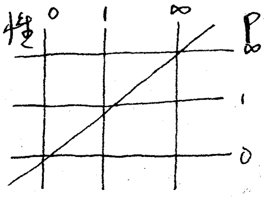
定理19. 上記の8つの変換を用いることにより $(S)_{A,\alpha}$ は単純特異性を持つ方程式系に分解する。*)を用いるときは、あらゆる方向において行なう。

うまい言い方が出来ないので例によって理解して置こう。

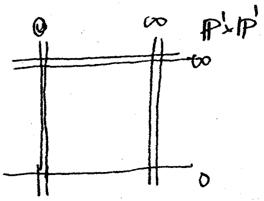
例20. Appell の超幾何函数 F_1 から合流型を作って得

られる函数 Φ_3 の (∞,∞) における還元の仕方。

F_1の特異性



→ Φ_3の特異性

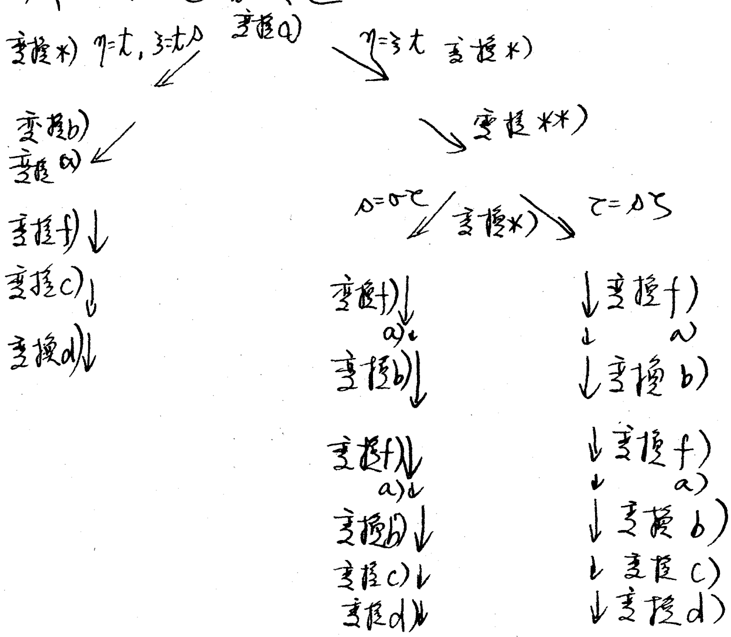


最初のPfaff系は

$$dZ=\left\{\frac{1}{\xi^2\eta}\begin{pmatrix}-\eta-(1-\gamma)\xi\eta+\xi^2, & -\beta\xi\eta, & -\beta\eta\\ -\xi^2, & \beta\xi\eta, & 0\\ -\xi\eta, & 0, & 0\end{pmatrix}d\xi\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\xi\eta^2}\begin{pmatrix}-\xi^2, & \beta\xi\eta, & 0\\ \xi^2, & (\gamma-\beta-1)\xi\eta, & -\xi\\ 0, & -\xi\eta, & 0\end{pmatrix}d\eta\right\}Z$$

である。フローチャートを書くと



と云うような具合に操作をして単純特異性の方程式に還元出

来る。 以上。

文献

[1] R. GERARD – A. H. LEVELT Funk. Ekva (1976)

[2] K. TAKANO – M. YOSHIDA. Funk. Ekva (1976)

[3] K. KINOSHITA 東大紀要 (1977)

[4] R. GERARD – Y. SIBUYA compte-rendue

[5] K. TAKANO 東大紀要 (1977)

[6] MALMQUIST acta. Math.

[7] M. HUKUHARA 北大紀要

[8] 〃 九大紀要

[9] H.L. TURRITTIN Amer. Math. Soc. 107 (1963) 485～507

[10] Y. SIBUYA Funk. Ekva. 4 (1962) 29～56

など、

手下に文献がないので完備することが出来ませんでした。