数理解析研究所講究録
第352巻 1979年 51-61

(M,g) の Laplacian の固有値について

東北大 理　丹野 修吉

膜の振動 $F(x,t)$ は本来双曲型の方程式で与られるが、pure tone については $F(x,t)=U(x)e^{i\omega t}$ であって、U は Laplacian Δ の固有関数である。従って Riemann 多様体 (M,g) 又はその領域 D について（境界条件 $U=0$）、Δ の固有値、固有関数についての研究は"音"と"形"という Bers-Kac による興味ある表現の下に進展があり、"固有値"と"M 又は D の幾何的構造"との関係についての分野には現在幾多の知識が蓄積されつつある。

歴史的には物理学者 Lorentz による予想"E^2 の領域 D の λ 以下の Δ の固有値の数 $N(\lambda)$ と λ の比の $\lambda\to\infty$ のときの極限値は D の面積によって決まる。"そして Weyl によるその肯定的証明が第一歩とされている。つまり音としての $\mathrm{Spec}(D)$ から形としての面積が読みとれたわけである。

$N(\lambda)$ と λ についての比の $\lambda\to\infty$ での動きは Tauberian 定理

〜〜 Abel型定理により、$\{\lambda_k\} = \mathrm{Spec}(M)$ or $\mathrm{Spec}(D)$ に対し、$Z(t) = \sum e^{-\lambda_k t}$ の $t \downarrow 0$ での動きに反映される。Mckean−Singer の一定理の特別な場合として"E^3の有向曲面Mの領域Dがr個の穴をもち境界∂Dは滑らかとするとき

$$Z(t) \sim |D|/4\pi t - |\partial D|/4\sqrt{4\pi t} + (1/16\pi)\int_D S + (1-r)/12 \qquad t \downarrow 0$$

が成立つ。" このことはMが特にE^2なら、$\mathrm{Spec}(D)$から、面積周長、穴の数が読みとれることを示している。

次にMがコンパクトの場合 "$\mathrm{Spec}(M) = \mathrm{Spec}(S^m(1)$, 定曲率 $1)$ なら $(M,g) = (S^m(1))$ か？" は $m \leq 6$ なら正しいが、$m \geq 7$ については現在不明で私にとっては最も基本的な問題である。$\mathrm{Spec}(S^m(1))$ の特性をどこに求めるかはいろんな理由で複雑らしく、例えば $S^m(1)$ の第一固有値の重複度は $m+1$ で十分多いのだが、重複度が $m+1$ より大なる例もある。

Hersch の定理は S^2 の任意の計量 h に対し (S^2, h) の第一固有値 $\lambda_1(h)$ と体積の積について $\lambda_1(h)\,\mathrm{Vol}(S^2, h) \leq 8\pi$（等号成立 $\rightleftarrows h$: 定曲率）を示し、この m次元化（一般化）$\lambda_1(h)\,\mathrm{Vol}(M, h)^{2/m} \leq k(M)$（$=M$から定まる定数）が問題となったが、あるコンパクト Lie 群での浦川による反例により一般には不成立となった。$M = S^{2n+1}$ に限ってもそのような $k(M)$ は存在しない。この情況について具体的に説明したい。

§1. 命題A.

(S^m, g_0) を定曲率計量 g_0 をもつ m 次元球面とする。

問題(*). (M, g)をコンパクト Riemann 多様体とするとき、$Spec(M, g) = Spec(S^m, g_0)$ なら (M, g) は (S^m, g_0) に等長的であるか？

Spectrum の数学としての重要性は明らかとして、微分幾何学 proper としての重要さに関して、一つのバロメータ的意味をこの問題はもっている.

今までの部分的解答は次の通りである。

(i) (M, g) が Einstein なら (*) は正しい。〈Obata, Sakai〉

(ii) $m \leq 6$ なら (*) は正しい。〈Berger; $m=2,3$, Tanno, $m=4,5,6$〉

(iii) (M, g) が共形的平坦かつスカラー曲率 S が一定なら (*) は正しい。

今回の話の中心は次の命題の証明のメカニックを簡単に説明することである。S-foliated 多様体は §2 で定義するが、これは奇数次元球面を含むある Riemann 多様体の class に属するものである。

命題A. (M, g) をコンパクトな S-foliated 多様体とする。もし次元 $m \leq 13$ なら (*) は正しい。

§2. S-foliated 多様体.

Tを(M,g)での curvature-like テンソルとする、つまりTは$(1,3)$型で、曲率テンソルRのみたす基本関係式(オ一Bianchi の式を含む)と同じ形の式をみたすものである。基本的な例は、kを実数として

$$Z=Z_k: \quad Z(X,Y)W=R(X,Y)W-k\big(g(Y,W)X-g(X,W)Y\big)$$

なるものである。 nullity 理論はTについての理論であるが、ここでは $T=Z_k$ についてのみ話をする。

(M,g)のベクトル場Wがk-nullity ベクトル場とは

$$Z_k(X,Y)W=0, \quad \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M)$$

をみたすことである。幾何学的には、Wから見て(M,g)は定曲率kの空間のように見えることを意味している。

$$N_p=\{Y\in M_p\ ;\ Z_k(X,Y)=0,\ \forall X\in M_p\}$$

はMの点pでの接空間M_pの線形部分空間であり、$p\to N_p$はk-nullity 分布と呼ばれる〈Chern-Kuiper-Otsuki〉。

$p\to\dim N_p=\nu(p)$ は上半連続で

$$G=\{p\in M\ ;\ \nu(p)=\min\nu\}$$

は open in M で nullity 理論上重要な役割をもっている。

定義. (M,g)が S-foliated 多様体とは(M,g)に一次元の foliation があって

(i) 十分小なる各開集合Uに対し、foliation に接する単

位ベクトル場 W_U on U が Killing ベクトル場なること、

(ii) その W_U は 1-nullity ベクトル場であること。

奇数次元球面 (S^{2n+1}, g_0) は Hopf fibration から決まる foliation について S-foliated 多様体である。

一般に佐々木多様体はすべて S-foliated 多様体である。特に、すべての leaf が同じ長さをもち、商空間 M/(leaf) が可符号なら、M は Hodge 多様体上の自然な S^1-主バンドルである。

尚、S-foliated 多様体は常に奇数次元である。

§3. 証明の outline

$\mathrm{Spec}(M, g) = \{0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots\}$ に対する Minakshisundaram-Pleijel の漸近展開式

$$\sum e^{-\lambda_i t} \sim (4\pi t)^{-m/2}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots) \qquad t \downarrow 0$$

において、$m \leq 11$ なら a_2 まで、$m = 13$ のときは a_3 まで必要である：

$$a_0 = \mathrm{Vol}(M, g),$$

$$a_1 = (1/6)\int S,$$

$$a_2 = (1/6!)\int [2|R|^2 - |Ric|^2 + 5S^2].$$

ここに、Ric は Ricci テンソルを表し、$|R|^2 = R_{ijkl}R^{ijkl}$。

要点は g, R, Ric, S を用いて M 上の関数 B, G を非負：

$$B = B(g, R, Ric; S) \geq 0,$$
$$G = G(g, R, Ric, S) \geq 0$$

なるように定義し、B, G は $(M, g) = (S^{2n+1}, g_0)$ のとき、特別な値、例えば 0、をとり、かつ、a_2 の $\int$ の中が B, G, S で表わしきれるようにすることである。結局

$$B = |R|^2 - (8/(n+2))|Ric|^2 + (2/(n+1)(n+2))(S+2n)^2$$
$$+ 16(S+2n) - 28n^2 - 28n,$$
$$G = |Ric|^2 - (1/2n)(S+2n)^2 + 4(S+2n) - 4n^2 - 8n$$

と定めればよいことがわかる。これらの式はMの局所的な fibering からきめられる意味で自然なものである。

つまり、$a_2(M) = a_2(S^{2n+1})$ は

$$\int_M \left[2B + \frac{2(6-n)}{n+2} G + (S の 2 次式) \right] = \int_{S^m} [S_0 の 2 次式]$$

となる。これは、(S^{2n+1}, g_0) のとき $B_0 = G_0 = 0$ なるからである。同じ体積をもつこと $(a_0(M) = a_0(S^{2n+1}))$ と $\int S = \int S_0$、更に、Schwarz の不等式から $B = G = 0$ on M が $6 < n$ のとき示され、従って $m \leq 11$ のとき (M, g) は定曲率 1 なることがわかる。

$n = 6$ のときは $B = 0$ のみわかり、更に a_3 についての処理が必要である。

また $m \geq 15$ では $6 - n < 0$ のため G の係数が負で a_2 からの deta は無力である。

§4. (S^{2n+1}, g_0) での D-相合変形

$(S^{2n+1}, g_0$, 定曲率 1) での自然な接触構造を η とする。t を助変数として

$$g(t) = t^{-1} g_0 + (t^{m-1} - t^{-1})\, \eta \otimes \eta \quad , \qquad m = 2n+1.$$

なる $g_0 = g(1)$ の変形を考えると §3 での証明法は同じ形で

命題 B. $2n+1 \leq 13$ のとき、S-foliated 多様体の class の中で $(S^{2n+1}, g(t))$, $t^m \neq \frac{2}{17}$, は Spectrum によって特徴づけられる。

が示される。

尚、$g(t)$ は $Vol(S^{2n+1}, g(t))$ = 一定 = $Vol(S^{2n+1}, g_0)$ なるように補正してある。

命題 B については、$Spec(S^m, g(t))$ がわからなければ、命題としての意味はあまりない。それで、その Spec の構造を §5 で示しておく。

§5 $Spec(S^{2n+1}, g(t))$.

$Spec(S^m, g_0) = \{$ ここでは $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \}$ とし、λ_i に対する固有空間を $V(\lambda_i)$ とするとき、$V(\lambda_i)$ は次のように分解する：

$$V(\lambda_1) = V_1(\lambda_1),$$

$$V(\lambda_2) = V_2(\lambda_2) + V_0(\lambda_2),$$

$$V(\lambda_3) = V_3(\lambda_3) + V_1(\lambda_3),$$

$$V(\lambda_4) = V_4(\lambda_4) + V_2(\lambda_4) + V_0(\lambda_4),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ここに、例えば $V(\lambda_4)$ は E^{2n+2} での4次の斉次調和多項式の S^m への制限でできているものであるが、$V_2(\lambda_4)$ とはそのうち、S^{2n+1} の Hopf fibration での各 leaf 上で2次のように変化するもの，$V_0(\lambda_4)$ とは各 leaf 上0次、つまり定数のように見えるものである。　従って $V_0(\lambda_2)$, $V_0(\lambda_4)$ は複素射影空間 CP^n の第1、第2固有値に対する固有空間とそれぞれ同一視できるものである。

$V_1(\lambda_1)$ での固有値は

$$(m-1)t + t^{1-m} \qquad (\text{重複度} \quad m+1)$$

$$V_2(\lambda_2) \qquad 〃 \qquad 2(m-1)t + t^{1-m} \qquad \left(〃 \quad \binom{m+2}{2} - \binom{n+1}{1}^2\right)$$

$$V_0(\lambda_2) \qquad 〃 \qquad 2(m+1)t \qquad \left(〃 \quad \binom{n+1}{1}^2 - 1\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

t と固有値との関係を表わすグラフは次頁のようになっている。特に $(S^{2n+1}, g(t))$ の第1固有値 $\lambda_1(t)$ は

$$\lambda_1(t) = \begin{cases} (2n + t^{-m})\,t & t^{-m} \leq m+3 \\ 4(n+1)\,t & t^{-m} \geq m+3 \end{cases}$$

であり、従って

$$\lambda_1(t) \to 0 \qquad \text{as } t \to 0$$

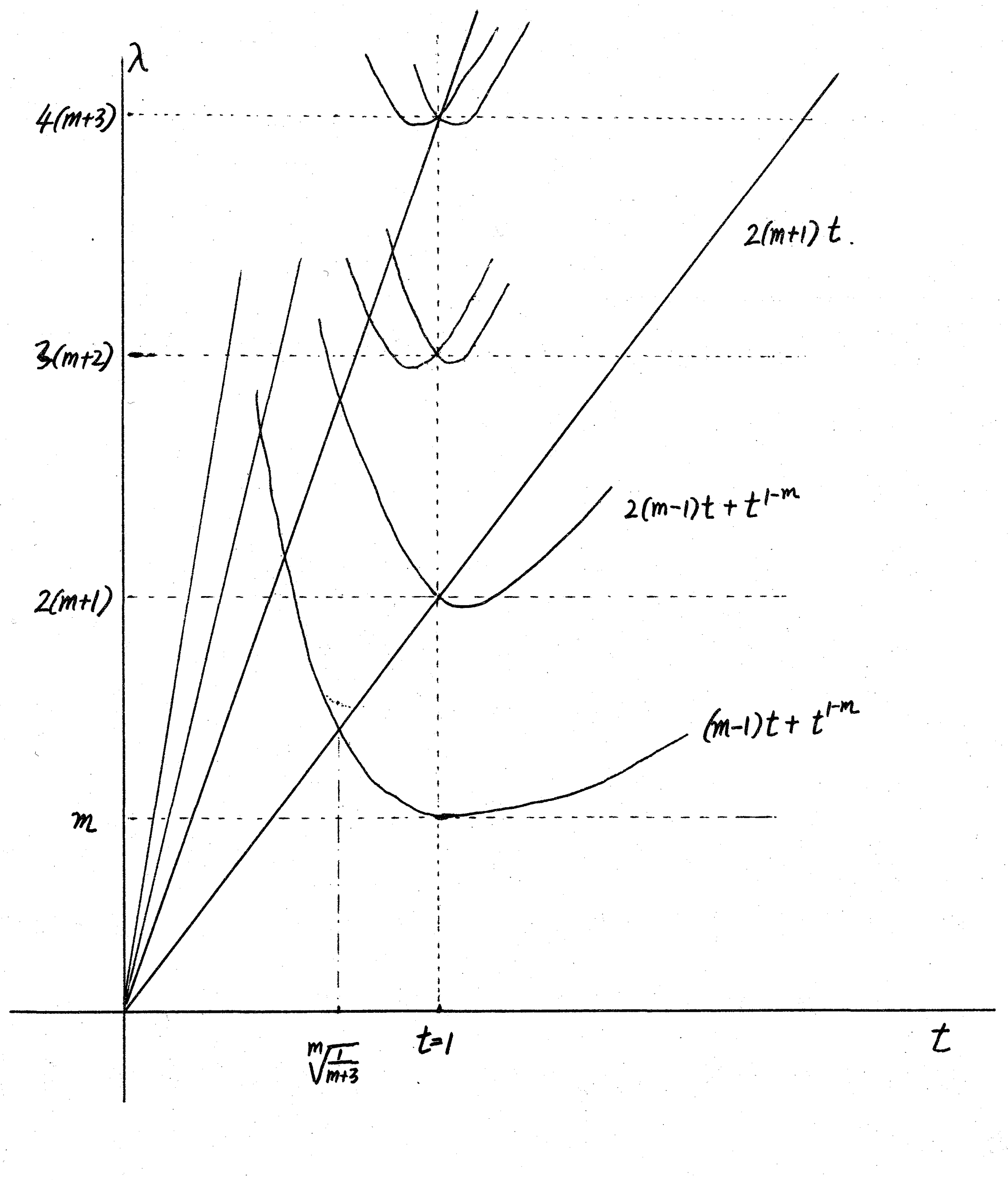
$$\lambda_1(t) \to \infty \qquad \text{as } t \to \infty$$

が成立つ。このことは Hersch 型の定理が S^{2n+1} については成立たないことを示している。

また、第1固有値の重複度は $t^{-m}=m+3$ のとき

$$(m^2+6m+1)/4$$

で、これは $t=1$ のときの $m+1$ よりずっと大きい。



実射影空間 $(RP^{2n+1}, g(t))$ での Laplacian の固有空間は、$(S^{2n+1}, g(t))$ での $V(\lambda_i)$ のうち偶関数なるものだから

$$V_2(\lambda_2),\ V_0(\lambda_2),\ V_4(\lambda_4),\ V_2(\lambda_4),\ V_0(\lambda_4),\ \cdots$$

であって、オ一固有値 $\lambda_1(t)$ は

$$\lambda_1(t) = \begin{cases} 2(m-1)t + 4t^{1-m} & 1 \leq t \\ 2(m+1)t & 1 \geq t \end{cases}$$

となり、$\lambda_1(t) \to 0$ (as $t \to 0$), $\lambda_1(t) \to \infty$ (as $t \to \infty$) である。

§6. (S^m, g_0) での固有関数

(S^m, g_0) での λ_k に対する固有関数を f とするとき、各 $k = 1, 2, 3$ に対し、(S^m, g_0) 上

$\langle 1 \rangle$ $\quad f_{ij} = -f g_{ij}$,

$\langle 2 \rangle$ $\quad f_{ijk} = -(2f_k g_{ij} + f_i g_{jk} + f_j g_{ik})$,

$\langle 3 \rangle$ $\quad f_{ijkl} = -(3f_{kl} g_{ij} + 2f_{jk} g_{ik} + 2f_{il} g_{jk} + f_{ij} g_{kl} + f_{jk} g_{il} + f_{ik} g_{jl}) - 3f(g_{ij} g_{kl} + g_{il} g_{jk} + g_{jl} g_{ik})$

なる微分方程式をみたす。ここに f_{ijk} とは $\nabla_k \nabla_j \nabla_i f$ を表わす。

同じタイプの微分方程式を一般の (M, g) 上で考えることにして、non-trivial な解 f があるとすれば

(1). $\langle 1 \rangle$ の場合、$F = \mathrm{grad} f$ は (M, g) 上で無限小共形変換であり、

(2). 〈2〉の場合、Fは無限小射影変換である。

(3). 〈3〉の場合、Fは $L_F Z_1 = 0$ をみたす。ここに L_F はFによる Lie 微分を表わす。(M, g) 上もし f が critical point をもてば、Fは 1-nullity ベクトル場になる。

このように (S^m, g_0) での Δ の固有関数のみたす微分方程式を一般の Riemann 多様体 (M, g) で考えると、それをみたす関数は幾何学的に面白い性質をもっている。

ここでの話は主に

[1], Tanno; The first eigenvalue of the Laplacian on spheres (to appear),

[2] Tanno; S-foliated manifolds with the same spectrum as unit spheres (メモ).

によるものである。