数理解析研究所講究録
第 352 巻 1979 年 116-125

定常軸対称 Einstein 方程式の厳密解と積分可能性

阪大 理　　田中 俊一

Einstein 方程式の厳密解の大きな族としては富松－佐藤解（[11]）があるがその数学的構造はまだ明らかにされていない．最近対称性をもつ Einstein 方程式の積分可能性に関連すると思はれる論文がいくつかあらわれたのでこの問題の概観を試みたい．

g_{jk} は符号が $(+\,-\,-\,-)$ の4次元（不定）Riemann 計量とする．Ricci テンソルが0，すなわち

(1)　　$R_{jk}=0$,

を g_{jk} に対する微分方程式とみたものを Einstein 方程式という．

とくに g_{jk} が $x^1=t$，$x^2=\varphi$ に無関係のときに定常軸対称であるという．

微分方程式(1)の研究は一般相対論の中心をなしている（一般相対論の数学的な教科書としては[1]を見よ）．(1)

の厳密解（exact solution）は多く知られているが，定常軸対称なものとしてはKerr解（［1，7章］），富松-佐藤解がある．Kerr解は重力崩壊した星の最終時空構造を（裸の特異点がないという付加条件の下で）あらわす解として数学的特徴づけがなされている．

豊富な厳密解をもつ定常軸対称Einstein方程式はそれ自身特別な構造をもつことが期待される．それにふれる前に最近ソリトンの理論として発展した非線形微分方程式の積分可能性のいくつかの観点を列挙しておく．

1．Liouvilleの意味での積分可能性：自由度NのHamilton系で互に可換な積分がN個見出される場合．$\mathbb{R}^N$が解の空間に（局所的に）作用する．もとの形または無限自由度に対する類似の形で多くの例がある．［2，付録13］に簡潔な解説がある．

2．Lax表示の存在：非線形方程式が線形方程式系の積分可能条件としてあらわされる場合．ただしそのような場合すべてが可積分であるとは限らない．曲面論のGauss-Codazziの方程式は（線形な）Gauss-Weingarten方程式の積分可能条件であるが解けるのはSine-Gordon方程式とその拡張（［8］）に限られるようである．

3．Bäcklund変換の存在：解を解にうつす変換でSine-

Gordon方程式に対しては古くから知られていた（たとえば[10]参照）．

4. Prolongation structure の存在： Wahlquist-Estabrook [12] はKdV方程式を外微分形式系に書きなおしそのprolongationを求めることを問題にした．解曲面は対応する接続の曲率を制限したとき0になる二次元部分多様体として特徴づけられる．彼等の見出したprolongationにはBäcklund 変換やLax表示に関連するものが含まれている． Sine-Gordon その他の方程式に対しても同様の事実があるが，その幾何学的意味等まだ解明されていないようである．

定常軸対称な線素は

$$(2)\qquad ds^2 = f_{AB}\,dx^A dx^B - e^{2\Gamma}\delta_{MN}\,dx^M dx^N$$

$$A, B = 1, 2\ ;\quad M, N = 3, 4$$

とあらわされる．ここに f_{AB}，Γ は x^3，x^4 のみの関数である．ϵ^{AB} は $\epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0$，$\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1$ で定義される量とする．添字 A，B の上げ下げは ϵ^{AB} で行なう．例えば

$$f^A{}_B = \epsilon^{AX} f_{XB}.$$

$\det(f_{AB}) < 0$ であるから，

$$\rho^2 = -\det(f_{AB})$$

とおく．あきらかに

$$(3)\qquad f^{AB} f_{BC} = -\rho^2 \delta^A{}_C.$$

線素（2）に対しては Einstein方程式は

(4) $$\nabla\cdot(\rho^{-1}f^{AB}\nabla f_{BC})=0$$

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x^3},\frac{\partial}{\partial x^4}\right)$$

となる．f_{AB}が求まれば Γは 線形 方程式 を解いて 求められる．

$$(\nabla\cdot\nabla\rho)\delta^A{}_C$$
$$=\frac{1}{2}(\nabla\cdot\rho^{-1}\nabla\rho^2)\delta^A{}_C$$
$$=-\frac{1}{2}(\nabla\cdot\rho^{-1}\nabla f^{AB}f_{BC})$$

であるが右辺は（4）より 0．したがって ρは調和関数である．

$$\tilde{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x^4},-\frac{\partial}{\partial x^3}\right)$$

とおく．

$$\underset{\sim}{v}=\nabla f$$

とあらわされる条件は

$$\tilde{\nabla}\cdot\underset{\sim}{v}=0$$

となることである．

（4）より $\psi^A{}_B$が存在して

(5) $$\tilde{\nabla}\psi^A{}_B=\rho^{-1}f^{AX}\nabla f_{XB}$$

となる．（3）を用いて

(6) $$\nabla f_{AB}=\rho f_A{}^X\nabla\psi_{XB}.$$

（5）は

(5)′ $\tilde{\nabla}\psi_{AB} = -\rho^{-1} f_A{}^{X} \nabla f_{XB}$

となるから複素ポテンシャルとよばれる

$$\mathcal{E}_{AB} = f_{AB} + i\psi_{AB}$$

は(6),(5)′を合せた式

(7) $\nabla \mathcal{E}_{AB} = -i\rho^{-1} f_A{}^{X} \tilde{\nabla} \mathcal{E}_{XB}$

をみたす。この式が以下の議論の基礎になる([6],[7])。

ここで以前の文献とくにErnst[3]の定式化との関連を述べよう。線素は

$$f_{11} = f, \quad f_{12} = -f\omega, \quad f_{22} = f\omega^2 - \rho^2 f^{-1}$$

という形で与えられる。$\psi = \psi_{11}$ と f から ω は定められる。したがって複素ポテンシャル(またはErnstポテンシャル) $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{11} = f + i\psi$ から線素が定まる。$\mathcal{E}$ は式

(8) $(\mathrm{Re}\,\mathcal{E})\rho^{-1}\nabla\cdot(\rho\nabla\mathcal{E}) = \nabla\mathcal{E}\cdot\nabla\mathcal{E}$

をみたすことがわかる。

3次元線素を

$$ds_3{}^2 = dx^{3\,2} + dx^{4\,2} + \rho^2 d\varphi^2$$

とおくと対応するdivergence作用素 ∇_3 は $\underset{\sim}{v}$ が x^3, x^4 のみの二成分ベクトルのとき

$$\nabla_3\cdot\underset{\sim}{v} = \rho^{-1}\nabla\cdot(\rho\,\underset{\sim}{v})$$

とあらわされる。したがって(8)はErnst方程式とよばれる

(9) $(\mathrm{Re}\,\mathcal{E})\nabla_3{}^2\mathcal{E} = \nabla_3\mathcal{E}\cdot\nabla_3\mathcal{E}$

になる．

$$\mathcal{E} = \frac{\xi - 1}{\xi + 1}$$

とおくと（9）は

（10）　$(\xi\xi^* - 1)\nabla_3{}^2\xi = 2\xi^*\nabla_3\xi\cdot\nabla_3\xi$

と変形される．

$\mathcal{E}$，ξ が実数値の場合は

$$\mathcal{E} = e^{2\psi}, \quad \xi = -\coth\psi$$

とおくと（9），（10）は

$$\nabla_3{}^2\psi = 0$$

となる．対応する線素を Weyl 解という．

（9），（10）の興味ある解を見出すためにこれまで任意であった座標 x^3, x^4 を具体的にとる必要がある．ρ は調和であったので Z を

（11）　$\nabla Z = -\tilde{\nabla}\rho$

で定義される共役調和関数とする．$x^3=\rho$，$x^4=Z$ ととることが多い．さらに円柱座標 ρ, Z から関係式

$$\rho^2 = (x^2-1)(1-y^2), \quad z = xy$$

で楕円体座標 x, y を定義する．δ を自然数として

$$\mathcal{E} = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^\delta, \quad \psi = \frac{\delta}{2}\log\frac{x-1}{x+1}$$

で与えられる線素を δ 次の Weyl 解という．$\delta=1$ とすると $\xi = x$ で線素は Schwarzschild解である．

未知関数 ξ と楕円体座標を用いると Kerr 解も

$$\xi = x\cos\lambda + iy\sin\lambda \qquad (\lambda\text{；実パラメーター})$$

ときわめて簡潔に表示される（[3]）．

Kerr 解は 1 次の Weyl 解に回転を与えたものであるが，富松－佐藤解は $\delta = 2, 3, \cdots$ 次の Weyl 解に回転を与えたものである．

次に基本的関係式（7）に関係する二つの補題を述べる．

補題 1．

$$\nabla H_{AB} = -i\rho^{-1} f_A{}^X \tilde{\nabla} H_{XB}$$

$$\nabla H'_{AB} = -i\rho^{-1} f_A{}^X \tilde{\nabla} H'_{XB}$$

が成立するならば

$$\nabla N_{AB} = \overset{*}{H}_{XA} \nabla H'^X{}_B$$

となる N_{AB} が存在する．

補題 2．N_{AB} は $H_{AB} = \varepsilon_{AB}$，$H'_{AB}$ に対して前補題から定めたものとする．

$$P_{AB} = N_{AB} + \varepsilon_{AX} H'^X{}_B$$

とおくと

$$\nabla P_{AB} = -i\rho^{-1} f_A{}^X \tilde{\nabla} P_{XB}$$

が成立する．

証明は簡単である（[7, II]）．

補題1，2より次の式で定義される系列 $\overset{n}{\mathcal{E}}_{AB}$, $\overset{n}{N}_{AB}$ が存在する：

$$\nabla \overset{n}{N}_{AB} = \mathcal{E}^{*}{}_{XA} \nabla \overset{n}{\mathcal{E}}{}^{X}{}_{B}$$

$$\overset{n+1}{\mathcal{E}}_{AB} = i(\overset{n}{N}_{AB} + \mathcal{E}_{AX} \overset{n}{\mathcal{E}}{}^{X}{}_{B}),$$

ただし

$$\overset{1}{\mathcal{E}}_{AB} = \mathcal{E}_{AB}.$$

さらに

$$\nabla \overset{mn}{N}_{AB} = \overset{m}{\mathcal{E}}{}^{*}{}_{XA} \nabla \overset{n}{\mathcal{E}}{}^{X}{}_{B}$$

から定まる $\overset{mn}{N}_{AB}$ も存在する，ただし

$$\overset{1n}{N}_{AB} = \overset{n}{N}_{AB}.$$

さらに

$$\overset{0n}{N}_{AB} = -i \overset{n}{\mathcal{E}}_{AB}$$

と規約しておく.

Kinnersley - Chitre は(先行する Geroch [4] の結果を拡張して) 定常，軸対称時空の変換群を構成した. その作用は(微小変換の形で) $\overset{mn}{N}_{AB}$ によりあらわされる. さらに漸近的平坦(asymptotically flat) 性をたもつ変換は可換群をなすこととその具体的な形をも見出した([7, VI]). 結果は複雑でこれらの群の正体はよくわからないが計算例としてKerr解，富松佐藤解($\delta=2$)を対応するWeyl解を変換して求めている.

漸近的平坦 定常軸対称な時空に作用する無限次元の可換群があることは方程式の完全積分可能性に由来しているに違いない． Lax表示の類似のあることを示した[9]，Wahlquist-Estabrook型のprolongation structureの存在を示した[5]も積分可能性を支持しているといえよう． 積分可能性をより明確な形で示すことが望まれる。

References

[1] R. Adler, M. Bazin, and M. Schiffer, Introduction to general relativity, McGraw-Hill, second edition 1975.

[2] V. I. Arnold, Mathematical methods of classical mechanics, Springer-Verlag, New York (1978).

[3] F.J. Ernst, New formulation of the axially symmetric gravitational field problem, Phys. Rev. 167 (1968), 1175-1178.

[4] R. Geroch, A method for generating new solutions of Einstein's equation. II , J.Math. Phys. 13 (1972), 394-404.

[5] B.K. Harrison, Bäcklund transformation for the Ernst equation of general relativity, Phys. Rev. Lett. 41 (1978), 1197-1200.

[6] W. Kinnersley, Symmetries of the stationary Einstein-Maxwell field eauations. I , J.Math. Phys. 18 (1977), 1529-1537.

[7] W. Kinnersley and D.M. Chitre, Symmetries of the stationary Einstein-Maxwell field equations, J. Math. Phys. II 18 (1977), 1538-1542; III 19 (1978), 1926-1931; IV 19 (1978), 2037-2042.

[8] F. Lund and T. Regge, Unified approach to strings and vortices with soliton solutions, Phys. Rev. D 14 (1976), 1524-1535.

[9] D. Maison, Are the stationary, axially symmetric Einstein eqations completely integrable?, Phys. Rev. Lett. 41 (1978) 521-522.

[10] R.M. Miura (ed.), Bäcklund transformations, the inverse scattering method, solitons, and their applications, Lect. Note.in Math. 515, Springer, 1976.

[11] A. Tomimatsu and H. Sato, New series of exact solutions for gravitational fields of spinning masses, Prog. Theor. Phys. 50 (1973), 95-110.

[12] H.D. Wahlquist and F.B. Estabrook, Prolongation structures of nonlinear evolution equations, J. Math. Phys. 16 (1975), 1-7.