数理解析研究所講究録
第352巻 1979年 126-135



# Yang-Mills' instantons.

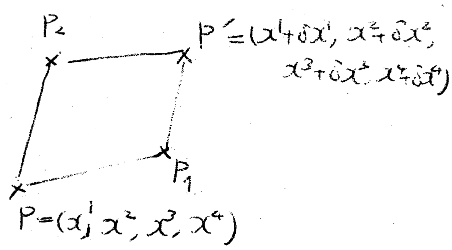
京大 理数 上野 健爾

## §1. H. Weylの理論

この節ではゲージ理論の源となったH. Weylの重力場と電磁場に関する統一場理論について簡単に述べる。Weylは Gravitation und Elektrizität, Sitzungsber. der Preuss. Akad. der Wissensch. 1918, 465−480 (全集II 29−42) に於て，アフィン接続，共形(conformal)接続の概念を導入し，ゲージ不変性に注目して統一場理論を提出した。これは物理学者からの承認は得られなかったが，後述するようにゲージ理論として発展して行った。一方数学的には，E. Cartanによる接続の理論に発展して行った。今日のゲージ理論，特にYang-Mills理論の研究は，こうして別々に発展して行ったものを再び結びつけようとする試みであるということもできよう。そうした点から，このWeyl理論を復習してみることにする。

Mを実4次元微分可能多様体, $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ を符号が $(+---)$ なるM上の距離とする。さて相対論に於ては零測地線 $ds^2=0$ は光(もっと一般に静止質量0の粒子)の軌跡としての意味を持っている。しかし相対論では剛体の概念が存在しない以上, 距離 $ds^2$ は各点では正確には定まらないのではないかというのがWeylの出発点であった。従って物理則は $\lambda(x)$ なるM上の $C^\infty$ 正値函数をとって $\lambda(x)ds^2$ なる距離で考えても不変, 共形不変性(conformal invariant)を有していると考えた方が自然であろう。

まずアフィン接続を導入する。




これは

1) $p\in M$ の十分近くの点 $p'$ に対して

$$T_pM \longrightarrow T_{p'}M$$

なる線型写像で与えられ,

2) この写像は $T_pM \to T_{p_1}M \to T_{p'}M$, $T_pM \to T_{p_2}M \to T_{p'}M$ と異なる2点 $p_1, p_2$ を経由しても同じである。即ち接続は捩じれを持たないと仮定する。

座標を使って表現すると,

$$p=(x^1, x^2, x^3, x^4), \quad p'=(x^1+\delta x^1, x^2+\delta x^2, x^3+\delta x^3, x^4+\delta x^4)$$

とおき, 1)の線型写像を

$$T_pM \ni (\xi^i) \longrightarrow (\xi^i+\delta\xi^i) \in T_{p'}M$$

と書くと，1)より

(1.1) $\delta\xi^i = -\sum_{r=1}^{4}\delta\gamma_r^i\xi^r$ ,  $i=1, 2, 3, 4.$

と書くことができる。更に

(1.2) $\delta\gamma_r^i = \sum_s \Gamma_{rs}^i\,\delta x^s$

と書くと，2)によって

$$\Gamma_{rs}^i = \Gamma_{sr}^i.$$

さて上述のように，距離自体は明確な意味はないとしているので，接続によってベクトルの長さが保たれるという保証はない。しかし $P'$ は $P$ に十分近いから長さの変化はそれ程大きくはないと考えられる。そこで $(\xi^i), (\eta^i) \in T_pM$ に対して

(1.3) $(1+\delta\varphi)\,g_{ij}\xi^i\eta^j = (g_{ij}+\delta g_{ij})(\xi^i+\delta\xi^i)(\eta^j+\delta\eta^j)$

が成立しているとしてよい。これより(1.1)を使うと

(1.3') $\delta\varphi\, g_{ij} = \delta g_{ij} - \delta\gamma_{ji} - \delta\gamma_{ij}$ ,  $\delta\gamma_{ij} = g_{ik}\,\delta\gamma_j^k$

となる。 $\delta\varphi = \varphi_i\,\delta x^i$ とおくと (1.2)より (1.3')は

(1.4) $\Gamma_{ir}^m g_{mj} + \Gamma_{jr}^n g_{in} = \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x_r} - g_{ij}\varphi_r$

と書き直すことができる。通常の距離接続 (metric connection) では(1.4)の右辺の第2項が0となっている。相対論では $\Gamma_{ir}^m$ は重力と見られるので，(1.4) は共形接続を考えたために重力場と何ものかが相互作用をしていることを表していると考えられる。この何ものかが実は電磁場に他ならない。

それを示すためには，上の考察では距離 $ds^2$ をもとにしている。$ds^2$ のかわりに $\lambda ds^2$ を考えても同様の理論ができ，(1.3) に対応して　$\delta\varphi' = \varphi'_i \delta x^i$ が定まる。そこで

$$\omega = \varphi_i dx^i \qquad \omega' = \varphi'_i dx^i$$

なる 1-form を考えると，その間には

(1.5)　$\omega' = \omega + d\log\lambda$

なる関係がある。物理的には (1.5) なる変換で不変な量が意味をもつ。それには

$$d\omega = \frac{1}{2} F_{ik}\, dx^i \wedge dx^k$$

を考えればよい。$d\omega = d\omega'$ であり，

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i}$$

は

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} = 0$$

を満足し，これは Maxwell の方程式で 4 元電流保存則に対応するものである。かくして電磁場が現われた。Weyl はこのあと，共形不変な Lagrangean を構成して重力場と電磁場の相互作用の方程式を導いた。

このWeylの論文に対して Einstein は反論をのせ（Weyl 全集 II 40～41）Weyl 理論は数学的には極めて美しいが，物理的に共形不変性はおかしいことを指摘した。相対論によれば $ds$ は固有時間という意味をもつ，Weyl の理論が正しければ

様々な場所から出た水素のスペクトル線の波長は違っており，その波長の比のみが場所にかかわらず一定であるとしか言えないからである。この反論に対してWeylは再び剛体の概念が存在しないことを根拠に反論を加えている。（全集II P41～42）。しかしWeylの反論は不徹底であって，量子論的世界まで考えれば，距離の存在さえ問題になって来る。我々の世界の時空構造に関しては現在活発な議論が行われている。

## §2 ゲージ理論

Weylの理論は不評であり，Weyl自身も後に自説を放棄しているが，ゲージ不変性によって新しい場が導入できるという考えは，後に大きな影響を与えた。量子力学では波動関数$\varphi$を$e^{i\theta}\varphi$に変えても物理的意味は変らない。このことに着目してWeyl理論を再び浮上させたのはLondon（1927）であり，Weylも1929年にElektron and Gravitationと題する論文でこのことを論じている。更に1954年にYangとMillsは陽子と中性子の作るアイソスピン空間（Minkowski空間上のSU(2)束と考えられる）でSU(2)ゲージ不変性を考える理論を構成した。これがnon-abelianゲージ理論と呼ばれる理論の誕生であったが，奇妙なことにそこで展開されているのがファイバー束の接続の理論であることが，物理学者の

間にかなり長い間認識されなかった。

この節では極めて一般的に，ゲージ不変性を Lagrangean を使って定式化してみる。

G を $n$ 次元連結実リー群とし，G の表現 $\rho: G \longrightarrow GL(N, \mathbb{R})$ が与えられているとする。M を微分可能多様体，$(Q^A(x))_{A=1,2,\cdots,N}$ は物理的な場を表わしており，それらは写像 $\rho$ に附随した M 上の自明な G－束の切断で与えられているとする。更に

$$Q^A_{,\mu}(x) = \frac{\partial Q^A(x)}{\partial x^\mu}$$

とおく。（以下，簡単にするため M 上に大極的に座標が入っていると仮定して議論する。）Lagrangean $\mathcal{L}^{(0)}(x)$ は

$$\mathcal{L}^{(0)}(x) = \mathcal{L}^{(0)}(Q^A(x), Q^A_{,\mu}(x))$$

と表されていると仮定する。従って運動方程式は

$$(2,1) \qquad \frac{\partial \mathcal{L}^{(0)}}{\partial Q^A} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}^{(0)}}{\partial Q^A_{,\mu}}\right) = 0$$

さて，$\mathcal{L}^{(0)}$ は G－不変であると仮定する。即ち G は $\rho$ によって $(Q^A(x))$ に作用しており，その作用によって $\mathcal{L}^{(0)}$ は不変である。これは大域的 G－不変性と呼ばれる。これより更に強い不変性を考えよう。M 上の G への $C^\infty$ 切断の作る層を $\mathcal{D}(G)$ とすると $\Gamma(M, \mathcal{D}(G))$ も $(Q^A(x))$ に作用している。$\Gamma(M, \mathcal{D}(G))$ の作用による不変性を局所 G－不変性という。$\mathcal{L}^{(0)}(x)$ は大域的 G－不変であっても局所 G－不変ではない。そこで $\mathcal{L}^{(0)}$ よ

り出発して局所G－不変な Lagrangean $\mathcal{L}^{(1)}(x)$ を構成することを考える。この時必然的に新しい場が現われることになる。これは§1で $\lambda$ を定数から正値 $C^\infty$ 函数と考えることによって電磁場が見出されることの一般化である。

$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\,G$, $\mathfrak{g}$ の $\mathbb{R}$－底を $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とし、
$d\rho(X_a) = T_a$ , $[T_a]^A_B$ を $M(N,\mathbb{R}) = \mathrm{Lie}\,GL(N,\mathbb{R})$ の $(A,B)$ 成分とする。Infinitesimal に考えて、$1+\varepsilon^a(x)X_a$ (但し $\varepsilon^a(x)$ は infinitesimal パラメータ。$x$ の函数と考える.) の作用によって

$$Q^A(x) \longrightarrow Q'^A(x) = Q^A(x) + \delta' Q^A(x)$$
$$Q^A_{,\mu}(x) \longrightarrow Q'^A_{,\mu}(x) = Q^A_{,\mu}(x) + \delta' Q^A_{,\mu}(x)$$

となったとすると、

$$\delta' Q^A(x) = \varepsilon^a(x)\,[T_a]^A_B\,Q^B(x)$$
$$\delta' Q^A_{,\mu}(x) = \varepsilon^a(x)\,[T_a]^A_B\,Q^B_{,\mu}(x) + \partial_\mu \varepsilon^a(x)\,[T_a]^A_B\,Q^B(x)$$

従って Lagrangean 自身は $\mathcal{L}^{(0)} \to \mathcal{L}^{(0)} + \delta'\mathcal{L}^{(0)}$ とすると

(2.2) $$\delta'\mathcal{L}^{(0)}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}^{(0)}}{\partial Q^A_{,\mu}(x)}\,[T_a]^A_B\,Q^B(x)\,\partial_\mu \varepsilon^a(x)$$

となる。((2.1)を使った.) そこで $\underset{a=1,2,\cdots,n}{A^a_\mu(x)}$ なる場を導入して $\mathcal{L}'(Q^A(x), Q^A_{,\mu}(x), A^a_\mu(x))$ なる Lagrangean (但し $\mathcal{L}'(Q^A(x), Q^A_{,\mu}(x), 0) = \mathcal{L}^{(0)}(Q^A(x), Q^A_{,\mu}(x))$ ) で局所G－不変にできるかどうか考える。再び上の無限小変換 $1+\varepsilon^a(x)X_a$ を考えると、簡単な計算によって $\mathcal{L}'$ 内には $A^a_\mu$ は

(2.3) $$D_\mu Q^A = Q^A_{,\mu} - A^a_\mu(x)\,[T_a]^A_B\,Q^B(x)$$

なる形で含まれなければならないことが分かる。(2.3) は形からも分かるように共変外微分の形をしている。更に場 $Q^A(x)$ の共変外微分 $D_\mu Q^A$ の infinitesimal な変化は

$$\delta' D_\mu Q^A(x) = \varepsilon^a(x)[T_a]^A_B D_\mu^B(x)$$

であると仮定すると Lagrangean $\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}^{(0)}(Q^A(x), D_\mu Q^A(x))$ は局所 G－不変であることが分かる。所で新たに導入された場 $A^a_\mu$ に関する Lagrangean はどのような形をすべきであろうか。電磁場とのアナロジーを考えるならば（Yang－Mills の考案は電磁場からの類推であった）F を (2.3) より定まる接続の曲率型式とする時

(2.4) $\qquad \mathcal{L}^{(F)} = \mathrm{const}\cdot \mathrm{tr}\, F\wedge * F$

なる形をとるとするのが自然であろう。ここで $*$ は Hodge の $*$ 作用素であり，M をリーマン多様体であると仮定した。すると 場 $(Q^A)$ と 場 $(A^a_\mu)$ との相互作用を表わす Lagrangean は $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}'(x) + \mathcal{L}^{(F)}(x)$ であり，場 $(A^a_\mu)$ の運動は変分原理によって $\delta\int_M \mathcal{L}^{(F)}(x) = 0$ で与えられることになる。

## §3 Yang－Mills' instanton

M をリーマン多様体，G を実リー群とする時 M 上の G principle bundle 上の connection で対応する曲率型式 F に対して Lagrangean (2.4) を M 上で積分した変分が 0

$$\delta \int_M \mathrm{tr}\, F \wedge *F$$

であることは，積分の収束などを忘れて形式的に考えれば

$$D*F=0$$

と同値である。ここでDは共変外微分を表わす。またFは曲率型式であるので Bianchi の等式

$$DF=0$$

が成立する．

$$(3.1)\qquad \begin{cases} DF=0 \\ D*F=0 \end{cases}$$

は丁度 Maxwell の方程式に対応している。G = SU(1) の時が Maxwell の方程式である。一般のGに対しては (3.1) を満足する connection を見出すことは，non-linear な問題となる。

さて今迄の話は準古典的なものであった。Mをミンコフスキー空間としてその量子化が考えられる。この時 Feynman path integral の方法を使う（これは数学的に正当かされているわけではないが）と $-\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{tr}\, F \wedge *F$ （$\mathbb{R}^4$ の距離は正定値）なる積分がでてくる。この積分が収束しかつ connection も $S^4$ まで拡張できているとするならば

$$(3.2)\qquad -\int_{S^4} \mathrm{tr}\, F \wedge *F$$

で考えた方が数学的に取り扱いやすい。というわけで，通常の正定値リーマン多様体 $S^4$ 上で方程式 (3.1) を考えることに

意味が出て来る。また　$*F=F$　（この時 self-dualと言う）$*F=-F$（anti-self-dual）であれば自動的に(3.1)を満たし(3.2)の積分の極値を与えている。一方 $S^4$ 上のG-束の特性類は曲率型式Fを使って計算され，特に $\int_{S^4} \mathrm{tr}\, F\wedge F$ は G-束のみで定まる位相不変量である。また簡単な計算で

$$\left| \int_{S^4} \mathrm{tr}\, F\wedge *F \right| \leq \left| \int_{S^4} \mathrm{tr}\, F\wedge F \right|$$

となり，$\int_{S^4} \mathrm{tr}\, F\wedge F$ を定めれば (3.2) の積分は self-dual, anti-self-dual でのみ最大又は最小値をとることになる。Feynman path integral では実は $e^{-\int_{S^4} \mathrm{tr}\, F\wedge *F}$ をすべてのconnectionの空間で積分する必要があり，そのために(3.2)の最大値の所でのみ積分することは意味があると思われる。かくして self-dual もしくは anti self-dual な instantons ((3.1)の解)をすべて見出すことが大切で，$G=SU(n)$の場合はかかるinstanton と $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ 上の rank $n$ の代数的ベクトル束のある種の族と対応づけることができる。特に $n=2$ の時は，Atiyah, Hitchin, Drinfeld, Manin らによって詳しい結果が得られている。