数理解析研究所講究録
第352巻 1979年 148-164

複素多様体の退化

東北大 理　小田忠雄

1. 序

ここで考える対象は，高々次のような簡単な特異点しか持たない解析空間Xである．すなわち，各点の適当な近傍が解析的に

$$\{z=(z_1,\cdots,z_r)\in\mathbb{C}^r \mid z_1^{\varepsilon_{i1}}z_2^{\varepsilon_{i2}}\cdots z_r^{\varepsilon_{ir}}=0,\ i=1,\cdots,s\}$$

（ただし ε_{ij} は0又は1）の開集合に同型となるようなものである．このようなXの中で，更に代数的，幾何的，位相的あるいは解析的な種々の事情から，充すことが望ましいと思われる性質を充すもののみを取出し，最終的に「退化多様体」の理論を構成出来ればと考えている．今のところ，代数的な部分はほぼ目途がついたと思う．これはHochster, Reisner, 渡辺敬一，後藤四郎，中村郁の各氏の仕事に引続いて，石田正典氏と講演者が共同で行った仕事である．

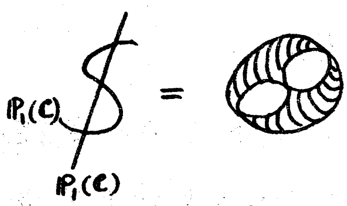
まず最初に，何故このような退化多様体を考えるに到った

かの経緯を，種々の幾何学的例によって紹介し，次に石田氏の仕事および氏と講演者との共同の仕事を簡単に紹介する．

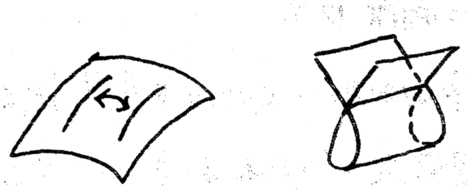
2. 例

まず1次元の場合には，我々の考えるXは局所的に次のような特異点を持ちうる．

(1-i) $\{z=(z_1, z_2)\in\mathbb{C}^2 \mid z_1z_2=0\}$，すなわち通常二重点．たとえば2本の射影直線 $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ の3点を同一視して得られる「弗」印の代数曲線Xは，この形の特異点しか持っていない．



(1-i)



(2-i)

(1-ii) $\{z=(z_1, z_2, z_3)\in\mathbb{C}^3 \mid z_1z_2=z_2z_3=z_3z_1=0\}$，すなわち z_1軸，z_2軸，z_3軸 の和であり，通常三重点．

2次元の場合には次のような例がある．

(2-i) $\{z=(z_1, z_2, z_3)\in\mathbb{C}^3 \mid z_1z_2=0\}$，すなわち (z_1, z_3)-平面と (z_2, z_3)-平面との和である．たとえば非特異複素曲面上の互いに同型な2本の曲線を同一視して得られる複素曲面Xは，この型の特異点しか持っていない．

(2-ii) $\{z=(z_1, z_2, z_3)\in\mathbb{C}^3 \mid z_1z_2z_3=0\}$，すなわち (z_1, z_2)-平面，(z_2, z_3)-平面，(z_3, z_1)-平面の和である．

(2-iii) $\{z=(z_1, z_2, z_3, z_4)\in\mathbb{C}^4 \mid z_1z_3=z_2z_4=0\}$，すなわち1次元の通常二重点を持つものの直積である．

(2-iv) $r\geqq 5$ のとき，$\{z=(z_1, \cdots, z_r)\in\mathbb{C}^r \mid z_iz_j=0,\ j\neq i-1, i, i+1 \pmod r\}$，すなわち (z_1, z_2)-平面，(z_2, z_3)-平面，…，(z_{r-1}, z_r)-平面，(z_r, z_1)-平面の和である．

これらのうちで (1-i)，(2-i)，(2-ii)，あるいは一般に $l\leqq r$ に対して

$$\{z=(z_1, \cdots, z_r)\in\mathbb{C}^r \mid z_1z_2\cdots z_l=0\}$$

は正規交叉と呼ばれるものである．しかしこれらのみを特異点として許すものを退化多様体と考えるとどうしても不自由である事情は以下で明らかになると思う．

ついでながら，正規交叉および (2-iii) は完全交叉と呼ばれるものの特別な場合であるが，(2-iv) は完全交叉ではない。

3. 退化多様体の必然性

$D=\{s\in\mathbb{C} \mid |s|<1\}$ を単位円板，$D^*=D\setminus\{0\}$ とする．このとき

(1) D 上の<u>退化の問題</u>とは，D^* でパラメーターづけられた

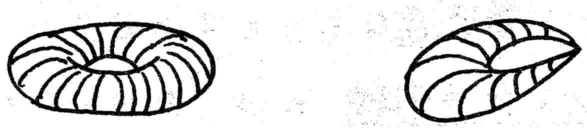
コンパクト（非特異）複素多様体 X_s （$s \in D^*$）の族 $\mathfrak{X}^* \longrightarrow D^*$ が与えられた時，これをD上の族 $\mathfrak{X} \longrightarrow D$ に延長するためには，$s=0$ 上の多様体 X_0 にどの程度の特異性を許す必要があるか，又そのときどれ程違った X_0 の可能性があるか，というものである．これには $\mathfrak{X}^* \longrightarrow D^*$ のモノドロミーや Picard - Fuchs の微分方程式が関係する．

(ロ) 一方，D上の変形の問題とは，逆にある程度の特異性を持ったコンパクト解析空間 X_0 を与えた時，それを0上のファイバーとする族 $\mathfrak{X} \longrightarrow D$ であって，D^* の各点上のファイバーはコンパクト複素多様体であるように出来るか，又出来る時には X_s （$s \in D^*$）としてどんなものが現われるか，というものである．

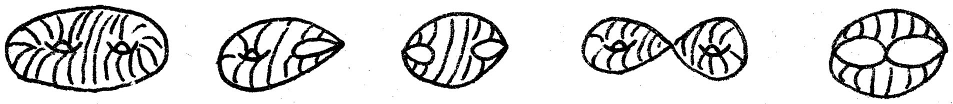
(ハ) モジュライ空間Mとは，たとえばある型を決め，その型の複素多様体の同型類全体の集合Mに「自然な」複素構造を入れたものである．ここで自然とは，たとえば D^* 上の族 $\mathfrak{X}^* \longrightarrow D^*$ であって各 $s \in D^*$ に対して X_s が今考えている型の多様体となるものが与えられたとき，s に X_s の同型類を対応させる写像 $D^* \longrightarrow M$ が解析的であり，かつそのような構造の中で一番普遍なものと考えてよい．モジュライ空間のコンパクト化の問題とは，Mのコンパクト化であって，上のような $D^* \longrightarrow M$ が解析的写像 $D \longrightarrow \overline{M}$ にいつも延

長出来るようなものを見付けることである。この際出来れば$\overline{M}$は、ある程度の特異性を許した解析空間X_0をも込めて(同型に近い同値関係で)分類した同値類の集合$\overline{M}$に自然な複素構造を入れたものであることが望ましい。そうすればMと$\overline{M}$との関係がより明瞭になる。そもそも$\overline{M}$を考えるのは、Mの性質を調べるのにまずコンパクトで扱い易い$\overline{M}$に埋込み、その中の開集合としてMを調べるためである。

たとえば1次元複素トーラスのモジュライ空間Mを考える。この場合には、良く知られた楕円関数のj-不変量によって、同型写像 $j : M \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ を得る。しかも右辺の普通の複素構造がMの自然な複素構造に対応している。さて右辺の自然なコンパクト化は複素射影直線$\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$である。これをそのままMのコンパクト化$\overline{M}$と見れば、無限遠点は通常二重点を唯一つ持つ有理曲線に対応すると考えるのが自然である。それは例えば$\{[z_0, z_1, z_2] \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) \mid z_0 z_2^2 = z_1^2(z_1 - z_0)\}$の形で与えられる。結局$\overline{M}$は、通常二重点をも許した算術的種数1(穴の数が1)の基点付コンパクト代数曲線のモジュライ空間となっている。



種数 $g \geqq 2$ の場合にも，コンパクト・リーマン面のモジュライ空間Mは $3g-3$ 次元の解析空間であり，Mのある自然なコンパクト化 $\overline{M}$ が，算術的種数 g の安定な代数曲線のモジュライ空間になっていることが Deligne−Mumford によって示された．ここで安定な代数曲線とは，高々通常二重点の特異性しか持たないコンパクト代数曲線であって，自己同型群が有限なもののことである．$g=2$ の場合の例を図示すると次の通りである．

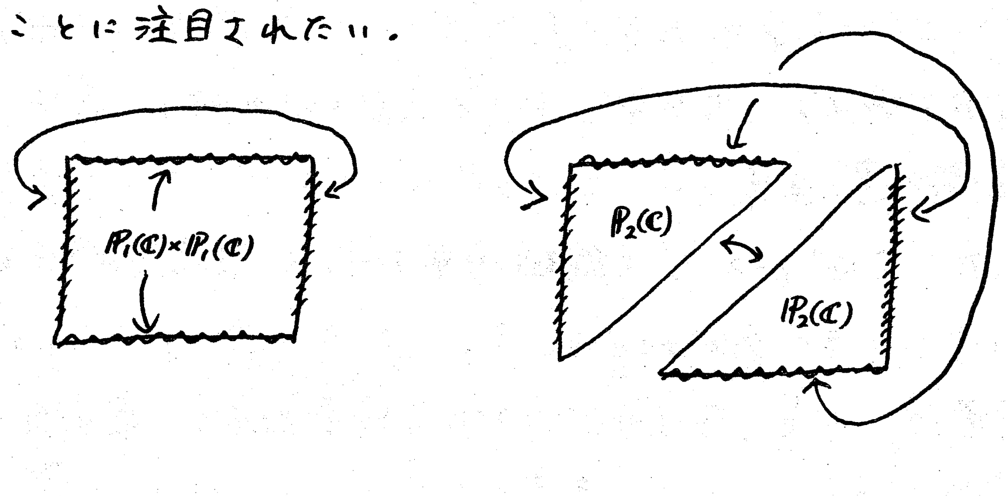


これらの例で注目に価する点は，退化したものには前節(1−i)の通常二重点の特異性のみを考えれば十分であって，(1−ii)が不要であることである．従って特に正規交叉で十分である．しかしこれは1次元の特殊性で，高次元では事情が違って来る．

たとえば g-次元主偏極複素トーラス $\mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g+\tau\mathbb{Z}^g)$ のモジュライ空間Mを考える．ここに τ は Siegel 上半平面 $\mathfrak{S}_g$ の点，すなわち g 次対称複素行列で，虚数部分が正定値である．このとき良く知られたように $M=\mathfrak{S}_g/Sp_g(\mathbb{Z})$

となる。 Mのコンパクト化としては，以前から佐武コンパクト化およびその井草モノイダル変換が知られていた。浪川幸彦氏は，より扱い易いVoronoiコンパクト化$\overline{M}$を構成した。 境界$\overline{M}\setminus M$の点には，退化した主偏極複素トーラス（いわゆるSQAV）が対応する。

例えば$g=2$の場合には次のような退化多様体が現われる。$\mathbb{P}_1(\mathbb{C})\times\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$で二組の直線$\{0\times\mathbb{P}_1(\mathbb{C}),\ \infty\times\mathbb{P}_1(\mathbb{C})\}$および$\{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})\times 0,\ \mathbb{P}_1(\mathbb{C})\times\infty\}$の各組を適当な同型でそれぞれ同一視したものを$X$と考えると，$X$の特異点には前節の(2-i)の型のものと(2-ii)の型のものとがある。 一方二枚の射影平面$\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$のx-軸，y-軸，無限遠直線をそれぞれ同一視して得られるものをX'とすると，X'の特異点には，(2-i)の型のものと(2-iv)で$v=6$の型のものとが現われる。 これらのX, X'には正規交叉でない特異性が現われていることに注目されたい。



2次元の退化の例は，他にもK3曲面，Hopf曲面，井上曲面，超楕円曲面等の場合に知られている．

一般に，退化 $\mathfrak{X} \to D$ が与えられたとき，パラメーターに分岐拡大 $s = t^m$ を許したうえで更に $\mathfrak{X}$ にモノイダル変換を何回か施すといつも X_0 を正規交叉であるものに取換え可能であることが知られている．Grothendieck-Mumford等による半安定縮約定理である．しかし最初に与えられた $\mathfrak{X} \to D$ からこのようなものに到達する操作は複雑であることが多い．しかもこの取換えがかえって不自然である場合がある．

たとえば種数 g のコンパクト・リーマン面の退化 $\mathcal{C} \to D$ が与えられている時，各 $s \in D^*$ に対し C_s のJacobi多様体 $J_s = \mathbb{C}^g/$(第一種abel積分の周期) を考えると，新しい族 $\mathcal{J}^* = \{J_s\}_{s \in D^*} \to D^*$ が出来る．Seshadri，石田両氏と講演者は，これの延長 $\mathcal{J} \to D$ がほぼ自然に構成出来ることを証明した．この際 J_0 は，必ずしも正規交叉ではない特異性を有する（前節の意味での）退化多様体になっている．しかしこの場合，複雑な操作で $\mathcal{J} \to D$ を，正規交叉のみを持つものに取換えると，元の $\mathcal{C} \to D$ との関係が失われてしまう．

ともかく色々の例から判ることは，非特異多様体 X_s が退

化して、退化多様体 X_0 になったとすると、X_0 の各既約成分は元の X_a よりも簡単な構造を持つが、その代りにそれを補うために、既約成分同志のからみ具合は相当組合せ的に複雑になることである。従って退化多様体を一般に記述するためには、組合せ的情報を相当能率よく使い易い形に定式化しておく必要がありそうである。高次元では、局所的にも既に相当組合せ的情報が豊富であることは、以下で明らかになると思う。

4. 対数的極を持つ微分型式

$\{1, 2, \cdots, r\}$ の部分集合 ξ に対して $|\xi|$ を ξ の元の個数とする。ξ に対して

$$V_\xi = \{ z=(z_1, \cdots, z_r) \in \mathbb{C}^r \mid z_j = 0 \quad \forall j \notin \xi \}$$

と定義する。すなわち ξ に属する座標のみを動かして出来る部分空間である。又 V_ξ の余次元 1 の解析的部分集合 D_ξ を

$$D_\xi = \cup_\eta V_\eta = \{ z=(z_1, \cdots, z_r) \in V_\xi \mid \textstyle\prod_{j\in\xi} z_j = 0 \}$$

で定義する。ただし η は ξ の部分集合であって差集合 $\xi \setminus \eta$ が 1 点のみからなるものすべてに亘って動くものとする。

このとき D_ξ に沿って対数的極を持つ V_ξ 上の微分 1-型式

の層を

$$\Omega^1_{V_\xi}(\log D_\xi) = \bigoplus_{i\in\xi} \mathcal{O}_{V_\xi}(dz_i/z_i)$$

とする. これの p 次の外積を $\Omega^p_{V_\xi}(\log D_\xi)$ と書く. 特に $p=|\xi|$ のときの外積を ω_{V_ξ} と書く. すなわち $\xi=\{i_1,\cdots,i_p\}$ のとき

$$\omega_{V_\xi} = \Omega^p_{V_\xi}(\log D_\xi) = \mathcal{O}_{V_\xi}(dz_{i_1}/z_{i_1})\wedge\cdots\wedge(dz_{i_p}/z_{i_p})$$

である.

ξ の部分集合 η が $|\xi\setminus\eta|=1$ を充すとき, Poincaré の留数写像

$$\omega_{V_\xi}\longrightarrow \omega_{V_\eta}$$

が定義出来る. これは $\xi=\{i_1<\cdots<i_p\}$, $\xi\setminus\eta=\{i_j\}$ のとき $f(dz_{i_1}/z_{i_1})\wedge\cdots\wedge(dz_{i_p}/z_{i_p})$ を $(f|V_\eta)(-1)^{j-1}(dz_{i_1}/z_{i_1})\wedge\cdots\overset{j}{\vee}\cdots\wedge(dz_{i_p}/z_{i_p})$ に写す写像である.

さて第一節冒頭で考えた $\mathbb{C}^r$ の解析集合

$$\{z=(z_1,\cdots,z_r)\in\mathbb{C}^r \mid z_1^{\varepsilon_{i1}}z_2^{\varepsilon_{i2}}\cdots z_r^{\varepsilon_{ir}}=0,\ i=1,\cdots,s\}$$

(ただし ε_{ij} は 0 又は 1) は上記の V_ξ を使うことによって次のようにもっと扱い易い形に表わせる. すなわち $\{1,\cdots,r\}$ の部分集合の複体 Ξ (つまり $\Xi\ni\xi$ かつ $\xi\supset\eta$ ならば必ず $\Xi\ni\eta$ を充すもの) をとるとそれに対して

$$Y = Y_{\Xi} = \bigcup_{\xi \in \Xi} V_{\xi}$$
$$= \left\{ z = (z_1, \cdots, z_r) \in \mathbb{C}^r \;\middle|\; \prod_{i \in \lambda} z_i = 0 , \quad \forall \lambda \subset \{1, \cdots, r\},\ \lambda \notin \Xi \right\}$$

である．

このとき Y 上の $\mathcal{O}_Y$－加群の層の複体

$$K_\bullet(Y, \Lambda_0) = (0 \to K_d \xrightarrow{\partial} K_{d-1} \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} K_0 \to 0)$$

を次のように定義する．ただし $d = \dim Y$ である．

$$K_p(Y, \Lambda_0) = \bigoplus_{\substack{\xi \in \Xi \\ |\xi| = p}} \omega_{V_\xi} \xrightarrow{\partial} K_{p-1}(Y, \Lambda_0) = \bigoplus_{\substack{\eta \in \Xi \\ |\eta| = p-1}} \omega_{V_\eta} .$$

ここに ∂ の (ξ, η)－成分は，$\xi \not\supset \eta$ のとき 0，$\xi \supset \eta$ のときは上記の Poincaré 留数写像である．$\partial \circ \partial = 0$ は容易に判る．

次の結果は基本的な役割を果す．

<u>定理</u>（石田）　上記の Y が Cohen－Macaulay 多様体であるための必要十分条件は，層複体 $K_\bullet(Y, \Lambda_0)$ の $d = \dim Y$ 次元以外のホモロジー層がすべて 0 となることである．このとき d 次元のホモロジー層

$$\omega_Y = \mathcal{H}_d(K_\bullet(Y, \Lambda_0))$$

は Y の双対化層である．Y が Gorenstein 多様体であるための必要十分条件は，Y が Cohen－Macaulay かつ ω_Y が $\mathcal{O}_Y$－可逆となることである．

Cohen-Macaulay および Gorenstein 多様体の定義にはここでは立入らないことにするが，環論的に見て，特異性に関する非常に緩い制限である．そのとき ω_Y は，非特異多様体の場合の標準可逆層（因子）の役割を果し，Grothendieck の双対定理が非常に簡単な形で書ける．更に面白いのは，Y のこれらの環論的性質が，複体 Ξ の組合せ論的性質で完全に記述出来ることである．

この定理の内容自身は，各点で局所的に Y の形の空間と同型であるような解析空間 X に対してもそのまま成立する．この際重要なことは，層複体 $K_\bullet(Y, \Lambda_0)$ の定義が，X にもそのまま適用して $K_\bullet(X, \Lambda_0)$ が定義出来るような非常に自然な形で与えられていることである．

例　唯一つの通常二重点を有する1次元解析空間 X は，特異点の近傍では $Y = \{ z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 z_2 = 0 \}$ と同型である．このとき複体 $K_\bullet(Y, \Lambda_0)$ は

$$\{ f(z_1)\, dz_1/z_1 \mid f \text{ 解析的} \} \oplus \{ g(z_2)\, dz_2/z_2 \mid g \text{ 解析的} \} \xrightarrow{\partial} \mathbb{C}$$

で，$\partial(f\, dz_1/z_1, g\, dz_2/z_2) = f(0) + g(0)$ である．すなわち $f\, dz_1/z_1$ の $z_1 = 0$ における留数と $g\, dz_2/z_2$ の $z_2 = 0$ における留数の和である．∂ は上への準同型であって，∂ の核が ω_Y である．X の通常二重点を P，又 X の正規化 $\tilde{X}$ 上の P に対応する点を P_+, P_- と書けば $K_\bullet(X, \Lambda_0)$ は

$$\left(\begin{array}{l}P_+ \text{ および } P_- \text{ のみで対数的極} \\ \text{を持つ } \tilde{X} \text{ 上の微分型式の層}\end{array}\right) \xrightarrow{\partial} (P \text{ のみで } \mathbb{C} \text{ となる層})$$

であり，∂ は P_+ での留数と P_- での留数の和をとる写像である。従って ω_X は，P_+，P_- のみで対数的極を持ち留数の和が 0 であるような $\tilde{X}$ 上の微分型式の層である。

上記の層複体 $K_\bullet(Y, \Lambda_0)$ および $K_\bullet(X, \Lambda_0)$ は次のように一般化出来る。すなわち，$0 \leq q \leq d = \dim Y$ に対して $K_\bullet(Y, \Lambda_q)$ を

$$K_p(Y, \Lambda_q) = \bigoplus_{\substack{\xi \in B \\ |\xi| = p}} \Omega^{p-q}_{V_\xi}(\log D_\xi)$$

とし，$\partial : K_p(Y, \Lambda_q) \to K_{p-1}(Y, \Lambda_q)$ を前とほぼ同様に定義する。

これらの複体の意義はまだ完全に解明したとはいえないが，$q = 1$ の場合には次のような中村郁氏の結果の一般化を得る。

<u>定理</u>　Y が Cohen-Macaulay であれば，$K_\bullet(Y, \Lambda_1)$ のホモロジー層は

$$\mathcal{H}_p(K_\bullet(Y, \Lambda_1)) = \begin{cases} \Theta_Y \otimes \omega_Y & p = d \\ 0 & p \neq d \end{cases}$$

である。ただし Θ_Y は Y の接線層である。

Yと局所的に同型な多様体Xについても同様の結果が成立する。

$K.(X, \Lambda_q)$は非特異多様体の場合のΩ_X^{d-q}に相当するようである。ただし$d = \dim X$である。従って非特異多様体上での解析的 de Rham 層複体（$\Omega_X^{\cdot}$，外微分）に対応するものとして，我々の退化多様体Xで次のものが考えられる。今後解明が進めば退化多様体の混合 Hodge 構造等に密接に関連することが判りそうである。

まず「反外微分」

$$\delta^* : K_p(Y, \Lambda_q) = \bigoplus_{\substack{\xi \in E \\ |\xi| = p}} \Omega_{V_\xi}^{p-q}(\log D_\xi) \to K_p(Y, \Lambda_{q-1}) = \bigoplus_{\substack{\xi \in E \\ |\xi| = p}} \Omega_{V_\xi}^{p-q+1}(\log D_\xi)$$

を $\delta^*\left(f(z_{i_1}, \cdots, z_{i_p})(dz_{i_1}/z_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (dz_{i_{p-q}}/z_{i_{p-q}})\right) = \sum_{j \in \xi} (\partial f/\partial z_j)$ $(dz_{i_1}/z_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (dz_{i_{p-q}}/z_{i_{p-q}}) \wedge (dz_j/z_j)$ で定義する。二重層複体 $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(K.(Y, \Lambda_q), K.(Y, \Lambda_0))$ に附随する単複体を $\mathcal{K}^{\cdot}(Y, \Omega^q)$ と書くことにすると δ^* は $\mathbb{C}$-線型な「外微分」

$$\delta : \mathcal{K}^{\cdot}(Y, \Omega^{q-1}) \longrightarrow \mathcal{K}^{\cdot}(Y, \Omega^q)$$

をひきおこす。従って再び二重層複体

$$\mathcal{K}^{\cdot}(Y, \Omega^{\cdot})$$

を得る。これをYの de Rham 層複体と呼ぶことにする。Yと局所的に同型なXについても同様である。

次に変形の問題に簡単に触れる．

良く知られているように，多項式 $f(z_1, \cdots, z_r)$ が与えられたとき $\mathbb{C}^r$ の超曲面

$$X = \{ z = (z_1, \cdots, z_r) \in \mathbb{C}^r \mid f(z_1, \cdots, z_r) = 0 \}$$

の変形においては

$$\mathcal{E}^1 = \mathcal{O} / (f, \partial f/\partial z_1, \cdots, \partial f/\partial z_r)$$

が基本的な役割を演ずる． ただし $\mathcal{O}$ は変数 $z_1, \cdots, z_r$ の収束あるいは形式的巾級数の環である． $g_1(z), \cdots, g_N(z)$ が $\mathcal{O}$ の元で $\mathcal{E}^1$ における像が $\mathbb{C}$ 上一次独立であるとき，助変数 $t = (t_1, \cdots, t_N)$ に対して

$$f_t(z) = f(z) + t_1 g_1(z) + \cdots + t_N g_N(z)$$

を考えると，

$$X_t = \{ z \in \mathbb{C}^r \mid f_t(z) = 0 \}$$

が X の変形の中で局所普遍性を持つ．

たとえば第2節の (1-i) の場合には $t \in \mathbb{C}$ に対して

$$Y_t = \{ z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 z_2 = t \},$$

又 (2-i) の場合には，非負整数 n および $t \in \mathbb{C}$ に対して

$$Y_t^{(n)} = \{ z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 z_2 = t z_3^n \}$$

が局所普遍性を持った変形である． 前者では $t \neq 0$ で X_t が非特異となる． 後者でも $n = 0, 1$ のときは $t \neq 0$ で X_t が非特異，しかし $n \geqq 2$ なら $t \neq 0$ で X_t は孤立特異

点を持つことに注目されたい。

このように超曲面，あるいは一般に完全交叉の場合には，変形の問題は局所的，形式的には簡単である．しかし我々の関心はむしろ完全交叉とは限らない場合にあり，もう少し込入った議論が必要である．詳細には立入らないが，Grothendieck-Schlessinger-Rim-Illusie によって導入された余接複体 $L_\cdot^X$ の理論を使うと，上記 $\mathcal{E}^1$ の一般化として「超拡大層」

$$\mathcal{E}^1 = \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_X}(L_\cdot^X, \mathcal{O}_X)$$

が局所的に普遍な変形の助変数空間に相当する．しかし一般には変形の障害が

$$\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}xt^2_{\mathcal{O}_X}(L_\cdot^X, \mathcal{O}_X)$$

に現われる．我々は一応 $X = Y_\Xi$ のときに $\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2$ を具体的に Ξ の言葉で記述することに成功した．結果は相当複雑であるのでここで詳細は述べない．たとえ Gorenstein 2次元であっても $\mathcal{E}^2 \neq 0$ であることが起る，従って我々は，許容し得る退化多様体の局所モデル Y_Ξ として，たとえば $\mathcal{E}^2 = 0$ であるもののみを選ぶのが賢明であるかも知れない。この点は尚今後解明の余地があると考えている．

一方、全く別の観点から見ても、許容しうる局所モデルに

制限を加える必要がありそうである。すなわち Y_{Ξ} が、Mumford の意味で半安定な特異点のみを持つもののみに限るのである。やはり詳細には立入らないが、この性質も Ξ のみの言葉で記述することが可能であり、凸体の幾何学と密接に関連することがわかる。