数理解析研究所講究録
第 353 巻 1979 年 116-125

不完全指定順序機械の非両立状態対の割合について

京都大学 工学部 松本 裕治
矢島 脩三

あらまし 不完全指定順序機械に関する重要な性質に状態間の両立性という概念がある。これは完全指定順序機械の状態間の同値性に対応するものであるが、本報告では不完全指定順序機械の両立な状態対の数，また非両立な状態対の数が全ての状態対のうちのどの程度の割合を占めるかを種々のパラメータを用いて考察する.

I. はじめに

不完全指定順序機械の状態間の両立性は，あらゆる入力系列に対するそれぞれの状態を初期状態とする出力系列が無矛盾であるとして定義されるが、この関係においては推移律が成り立たず，同値関係でないため，機械の状態数最小化が完全指定順序機械のように状態間の同値関係によって一意に分割されない原因となっている．一般に不完全指定順序機械の

状態数最小化問題は難しく，両立する状態対の数がどの程度であるかを知ることは，機械の極大両立集合や簡約機械を求める場合の手数を知る上で重要なことである．本報告では，種々のパラメータをもとに，それらの平均的な割合がどの程度になるかについて考察する．

II. 諸定義

順序機械Mは次のように定義される．$M=(S, I, O, \delta, \lambda)$．ここで，$S$，$I$，$O$はそれぞれ状態，入力記号，出力記号の空でない有限集合であり，δおよびλはそれぞれ$S \times I$からSの中への，また$S \times I$からOの上への写像であり，次状態関数および出力関数と呼ばれる．

［定義1］　有限長の入力記号系列Jが状態sに印加可能であるというのは，機械が状態sにあり，Jを印加した時に，最終の入力記号以上ではすべて次状態が定義されてあり，かつ最終の入力記号に対する出力関数が定義されていることである．　⊠

［定義2］　2つの状態s_iとs_jが両立するというのは，両者に共に印加可能な全ゆる有限長の入力記号系列に対する両者の最終出力が互いに等しいことである．s_iおよびs_jが両立する時，(s_i, s_j)を両立状態対または両立対という．また

両立対でない状態対を非両立対とよぶ． ⊠

また，s_i，s_jの両者に印加可能な長さk以下の全ゆる入力記号系列に対する両者の最終出力が等しい時，(s_i, s_j)はk両立対であるという．さらに，$(k-1)$両立対であるが，長さkのある入力記号系列に対するs_i，s_jの最終出力が異なるとき，(s_i, s_j)はk非両立対であるという．ただし，全ての状態対は0両立対であると仮定する．

したがって，言い換えれば，両立対とは∞両立対のことになるが，機械の状態数をnとすると状態対の総数は${}_nC_2$であるから，必ず有限の$k(\leq {}_nC_2)$でk両立対の集合と$(k+\ell)$両立対の集合$(\ell \geq 1)$が一致する．逆に，必ず有限の$k(\leq {}_nC_2)$でk非両立対の集合は空になる．k非両立対の集合を$IP(k)$とすると，

$$\text{非両立対の集合} = \bigcup_{k=1}^{\infty} IP(k)$$

である．

Ⅲ．非両立対の割合について

不完全指定順序機械の1非両立対の数をd_1とし，全ての状態対の数をPとし，

$$\alpha = \frac{d_1}{P}$$

とおく．

以後扱う機械の出力記号の集合は$O=\{0, 1\}$であるとする．機械の状態数をn，入力記号数をiとする．

また，出力関数の値は全ての状態および入力記号の組合せに対して確率 p で 0，同じく確率 p で 1 を取るとし，それ以外では未定義であると仮定する．（ $0 \leqq p \leqq 1/2$ ）

この時，α の期待値は次のように求めることができる．

まず，ある1つの入力によって出力値を異にする状態対の期待値は次式で与えられる．

$$\sum_{j=1}^{n} {}_nC_j (2p)^j (1-2p)^{n-j} \sum_{k=0}^{j} {}_jC_k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{j-k} \cdot k(j-k)$$
$$= n(n-1)p^2.$$

α は少くとも1つの入力によって出力を異にする状態対の割合であるから，その期待値は

$$\alpha = 1 - \left(1 - \frac{n(n-1)p^2}{{}_nC_2}\right)^i = 1-(1-2p^2)^i.$$

次に，全ての状態はどの入力記号によっても全ゆる状態へ等確率で遷移すると仮定すると，1つの入力記号によって，1つの状態対が真に状態対に遷移する（すなわち，両者の次状態が共に定義され，しかも異なる値である）確率を β とすると，次状態関数が未定義である確率が，どの入力記号に対しても等しく g であるとすれば，これと状態数 n を用いて，

$$\beta = \frac{n-1}{n}(1-g)^2$$

と表わすことができる．

このように，次状態関数および出力関数の値が全ての入力

記号に対して一様であると仮定すると，α，β の期待値を求めることができる．

次に α，β を用いて，機械の非両立対の全状態対に対する割合の期待値を求める．ただし，以下で，k 非両立対の割合を求める際に考える事象はそれ以前の事象と独立であると仮定する．

1 非両立対の割合は α である．これを a_1 とおく．

2 非両立対は，1 非両立対ではなくかつある入力記号によって 1 非両立対に遷移する状態対であるから，2 非両立対の割合 a_2 は

$$a_2 = (1-a_1)\{1-(1-\beta a_1)^i\}$$

で与えられる．

一般に k 非両立対の割合を a_k とすると，$(k+1)$ 非両立対とは $k-1$ 以下の任意の j に対して j 非両立対へはどの入力記号によっても遷移しないが，ある入力記号によって k 非両立対に遷移する状態対である．

したがって $A_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$ とすると

$$a_{k+1} = \frac{1-A_k}{(1-\beta A_{k-1})^i}\{(1-\beta A_{k-1})^i-(1-\beta A_k)^i\}$$

と表わすことができる．

A_k はすべての k 以下の自然数 j に対する j 非両立対の割合

の合計である．α，βを様々な値に変化させて，A_kの収束値を求めたのが表1である．さらに表1を3次元空間に表現したのが図1である．ただし $A = \lim_{k\to\infty} A_k$ とする．

また，状態数40，入力記号数2の不完全指定順序機械を，$p = 1/4$，$q = 3/23$ として500個乱数によって発生させ，各々の機械の非両立対を求め，その頻度をヒストグラムにして示したのが図2である．500台の機械の非両立対の割合の平均値は 0.9136 であった．

一方，α，βの計算値は

$$\alpha = 1-(1-2p^2)^2 = 0.2344$$

$$\beta = \frac{n-1}{n}(1-q)^2 = 0.7372$$

この時，A_kの値を求めると

$$A_k \longrightarrow 0.9211$$ となった．

Ⅳ. あとがき

不完全指定順序機械の非両立状態対の割合について考察した．このような値の期待値を事前に知ることは，順序機械の状態数最小化その他のアルゴリズムに必要な計算時間や使用記憶容量などの目やすとしても重要である．ここでは次状態関数および出力関数が一様であると仮定して議論したが，これらの関数値の変化によって非両立対の数がどのように影響

を受けるかなども重要な問題である．また，非両立対の割合の平均でなく分散について考察することも残された問題である．

謝辞

日頃，御助言いただく本学上林弥彦助教授はじめ矢島研究室の諸氏に感謝いたします．

参考文献

Kohavi, Z., : Switching and Finite Automata Theory, New York, McGraw-Hill, 1970, pp. 291-306.

β \ α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	12.2	23.8	34.8	45.3	55.4	65.0	74.3	83.2	91.8
0.2	15.5	29.0	41.0	51.8	61.6	70.5	78.7	86.3	93.4
0.3	21.0	36.6	49.1	59.5	68.4	76.2	83.1	89.3	94.9
0.4	30.8	47.5	59.3	68.3	75.7	81.9	87.3	92.0	96.2
0.5	48.1	61.8	70.8	77.5	82.8	87.3	91.1	94.4	97.4
0.6	69.3	76.7	81.9	85.9	91.2	92.0	94.4	96.5	98.3
0.7	85.5	88.4	90.7	92.6	94.2	95.6	96.9	98.0	99.1
0.8	94.7	95.6	96.3	97.0	97.6	98.1	98.7	99.1	99.6
0.9	98.9	99.1	99.2	99.3	99.5	99.6	99.7	99.8	99.9

表1. α.βによる非両立対の割合 (%)

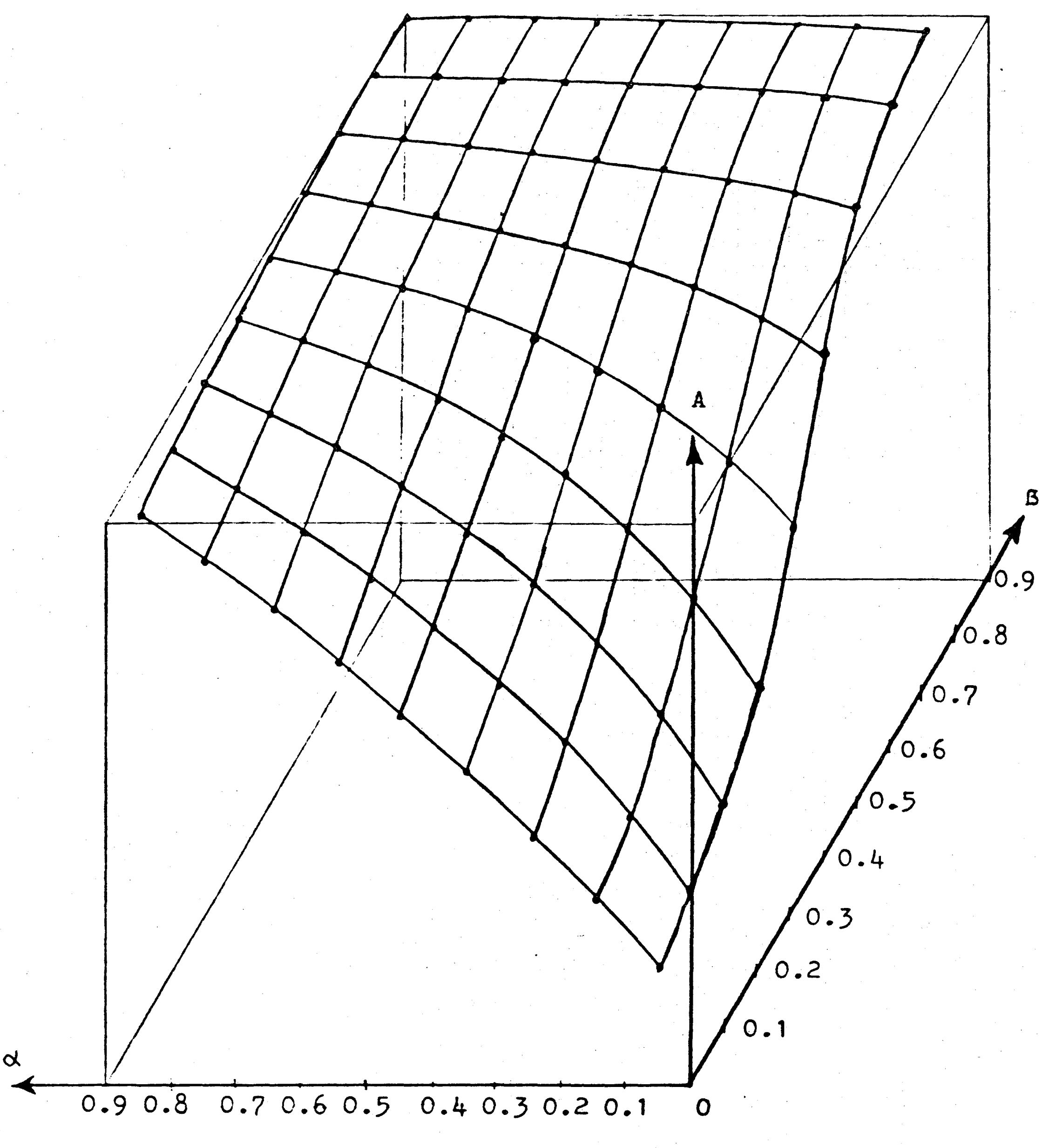

図1. 表1の3次元的表現

計算値
$$\left\{\begin{array}{l}\alpha = 0.2344 \\ \beta = 0.7372 \\ A_k \rightarrow 0.9211\end{array}\right.$$

実験機械数 500

状態数 40

入力数 2

次状態未指定率 $g = 3/23$

出力記号出現率 $p = 1/4$

（各出力に対して）

実験値

非両立対の割合の

平均値 = 91.36 %

(注)

図中 90% の所に 16 とあるのは 500コ の機械のうち 非両立対の割合が 90%以上 91%未満であったものが 16コ存在したことを示す.

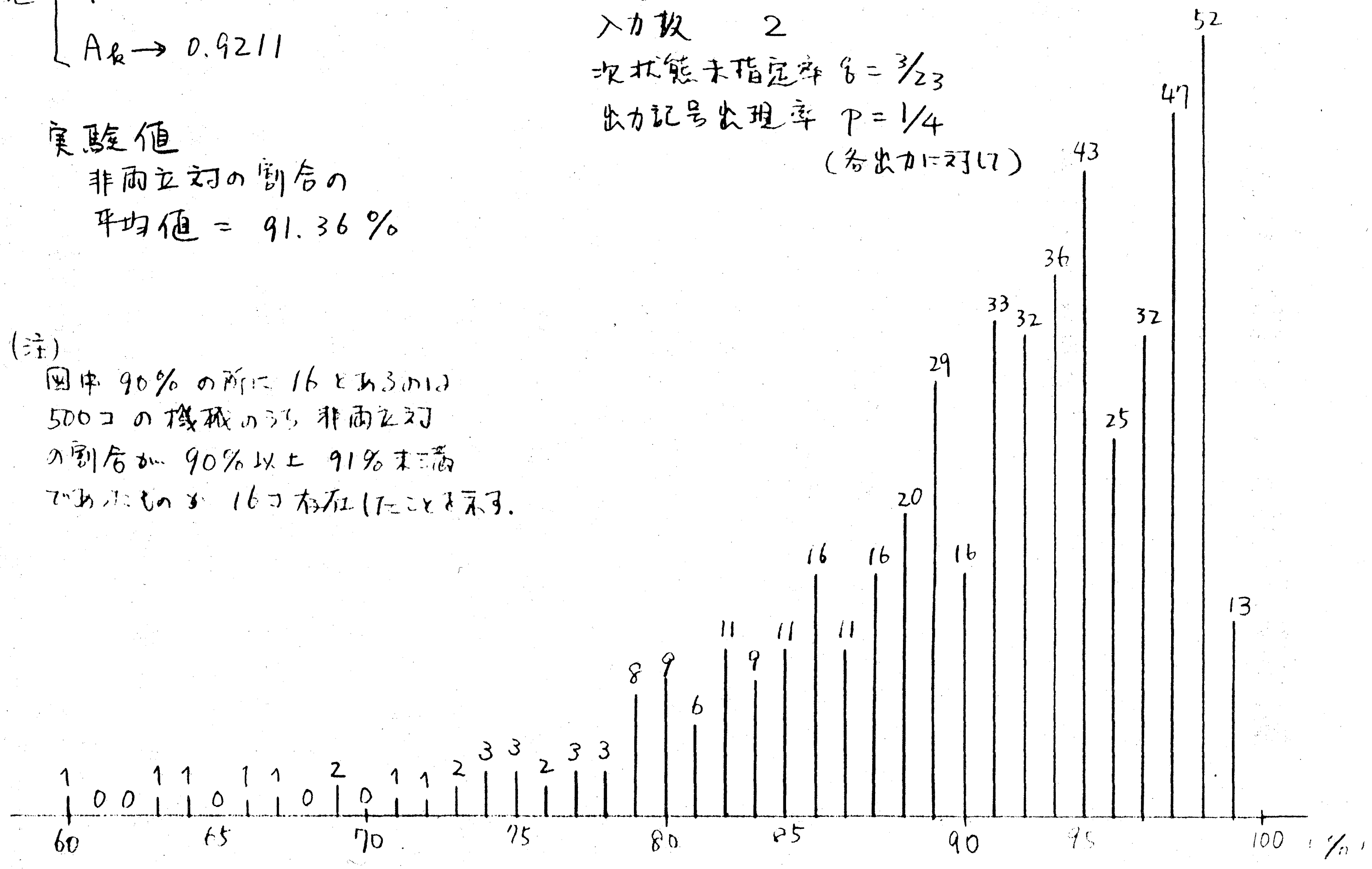

図2 乱数発生による実験結果