数理解析研究所講究録
第 353 巻 1979 年 185-193

オートマトンのデカルト合成表現

京都産大・理　　伊藤正美

あらまし　連結オートマトンを二つの連結オートマトンのデカルト合成で表現する問題を考える。

1. まえがき

最近，W. Dörfler [1] によって，オートマトンのデカルト合成という概念が与えられた．これはオートマトンの直積の特別な場合であるが，一般の直積にはない種々の良い性質が与えられている．この概念がオートマトンの分解理論([2]-[4])に利用されることが期待されるが，それにさきだってオートマトンのデカルト合成表現の可否の問題が論議される必要がある。この小論では，この問題の特別な場合がとりあつかわれる．

2. オートマトンのデカルト合成

$B=(T,\Gamma,N)$, $C=(U,\Delta,L)$ をオートマトンとする．但し，T, U は状態集合，Γ, Δ は入力集合，N, L は状態遷移関数であ

る．ここで，$\Gamma\cap\Delta=\phi$ を仮定する．

［定義］オートマトンB,Cのデカルト合成$B.C=(T\times U,\ \Gamma\cup\Delta,\ N.L)$は，状態遷移関数がつぎのようにして与えられるオートマトンである：　$\sigma\in\Gamma$ のとき $N.L((t,u),\sigma)=(N(t,\sigma),u)$．$\sigma\in\Delta$ のとき $N.L((t,u),\sigma)=(t,L(u,\sigma))$．但し，いずれの場合も$(t,u)\in T\times U$．

［定義］p,q を自然数とする．B.Cが(p,q)-デカルト合成であるとは，$|T|=p,\ |U|=q$ なることを意味する．但し，$|T|,|U|$はそれぞれ集合T,Uの濃度をあらわす．特に$p>1,\ q>1$ なるとき，B.Cを自明でないデカルト合成とよぶ．

［定義］$A=(S,\Sigma,M)$をオートマトンとする．オートマトン$B=(T,\Gamma,N)$，$C=(U,\Delta,L)$が存在して，$\Sigma=\Gamma\cup\Delta\ (\Gamma\cap\Delta=\phi)$かつ$A\approx B.C$（オートマトン同形）なるとき，B.CをAのデカルト合成表現とよぶ．特に$|T|=p,\ |U|=q$ のときは，B.CをAの(p,q)-デカルト合成表現とよぶ．自明でないAのデカルト合成表現が存在するとき，Aはデカルト合成表現可能とよばれる．

3．(p,q)-デカルト合成表現可否判定アルゴリズム

$A=(S,\Sigma,M)$を連結オートマトンとする．まず，次のことに注意しておく．$\Sigma'=\Sigma-\{\sigma;\ \sigma\in\Sigma,\ {}^{\forall}s\in S,\ M(s,\sigma)=s\}$ とするとき，Aの連結性より$\Sigma'\neq\phi$．ここで，$A'=(S,\Sigma',M|_{S\times\Sigma'})$（$M|_{S\times\Sigma'}$は，Mを$S\times\Sigma'$に制限したもの）．このとき，任意の自

然数 p, q に対して A の (p, q)-デカルト合成表現可能性と A' の (p, q)-デカルト合成表現可能性とが一致することが証明されるので，はじめから A に於いて $\Sigma = \Sigma'$ が成りたっていると仮定しても一般性をうしなわない．したがって，以後 A にこの仮定をおく．

本論に先だって，記号の説明をしておく．オートマトン $A = (S, \Sigma, M)$ の入力集合 Σ の部分集合 Φ に対して，オートマトン A_Φ を $A_\Phi = (S, \Phi, M|_{S\times\Phi})$ と定義する．特に $\sigma \in \Sigma$ に対して $A_\sigma = A_{\{\sigma\}}$ とする．さらに $\rho(A_\Phi)$ をオートマトン A_Φ の状態遷移図の連結成分の個数とする．

以後 $|S| = pq$, $(p, q) = 1$ (p と q は互に素)とする．オートマトン $A = (S, \Sigma, M)$ の (p, q)-デカルト合成表現可否判定のアルゴリズムを与える．

まず，オートマトン $A = (S, \Sigma, M)$ に対して $\Gamma^{\#} = \{\sigma ;\ \sigma \in \Sigma,\ \rho(A_\sigma)$ は q の倍数$\}$, $\Delta^{\#} = \{\sigma ;\ \sigma \in \Sigma,\ \rho(A_\sigma)$ は p の倍数$\}$ と定義する．

[段階A] オートマトン $A = (S, \Sigma, M)$ に対して，$\Gamma^{\#}$ および $\Delta^{\#}$ をもとめ，つぎのことを調べる： $\Sigma = \Gamma^{\#} \cup \Delta^{\#}$ か？

上記が肯定された場合には，$\Gamma^{\#} = \Gamma$, $\Delta^{\#} = \Delta$ とおき [段階B] の検証に移る．上記が否定された場合は，A の (p, q)-デカルト合成表現は存在しない．このことは次の事実による．今，A

が(p, q)-デカルト合成表現可能で$A \approx B.C$, $B = (T, \Gamma, N)$, $C = (U, \Delta, L)$とする．このとき，$\Gamma^{\#} = \Gamma$, $\Delta^{\#} = \Delta$となる．したがって $\Sigma = \Gamma \cup \Delta = \Gamma^{\#} \cup \Delta^{\#}$.

[段階A]の検証を通過したオートマトン$A = (S, \Sigma, M)$に対して，$s \sim s'$, $s \approx s'$ $(s, s' \in S)$をそれぞれs, s'がA_Δで連結，A_Γで連結と定義する．このとき，関係$\sim, \approx$はS上の同値関係になる．ここで，$\bar{s} = \{s' ; s' \in S, s \sim s'\}$, $\bar{\bar{s}} = \{s' ; s' \in S, s \approx s'\}$, $\bar{S} = \{\bar{s} ; s \in S\}$, $\bar{\bar{S}} = \{\bar{\bar{s}} ; s \in S\}$とおく．

[段階B] オートマトン$A = (S, \Sigma, M)$に対して，次の二つのことを調べる：(i) ${}^{\forall}s \in S$に対して，$\bar{s} \cap \bar{\bar{s}} = \{s\}$となるか？
(ii) $|\bar{S}| = p$, $|\bar{\bar{S}}| = q$となるか？

上記のいずれもが肯定された場合には，次の[段階C]の検証に移る．上記のいずれかが否定された場合は，Aの(p, q)-デカルト合成表現は存在しない．このことの証明は容易なので省略する．

[段階B]の検証を通過したオートマトン$A = (S, \Sigma, M)$に対して，次のような非決定性オートマトン$\bar{A}, \bar{\bar{A}}$を考える：$\bar{A} = (\bar{S}, \Gamma, \bar{M})$, $\bar{\bar{A}} = (\bar{\bar{S}}, \Delta, \bar{\bar{M}})$. ただし，$\bar{s} \in \bar{S}$, $\sigma \in \Gamma$に対して$\bar{M}(\bar{s}, \sigma) = \{\overline{M(s', \sigma)} ; s' \in \bar{s}\}$, $\bar{\bar{s}} \in \bar{\bar{S}}$, $\sigma \in \Delta$に対して$\bar{\bar{M}}(\bar{\bar{s}}, \sigma) = \{\overline{\overline{M(s', \sigma)}} ; s' \in \bar{\bar{s}}\}$.

[段階C] $\bar{A}, \bar{\bar{A}}$は決定性オートマトンか？

上記が肯定された場合，Aの(p, q)-デカルト合成表現は存在する．また上記が否定された場合には，Aの(p, q)-デカルト合成表現は存在しない．これらは次の結果による．

［定理］ Aの(p, q)-デカルト合成表現可能性とオートマトン$\bar{A}, \bar{\bar{A}}$の決定性とは一致する．また，Aが(p, q)-デカルト合成表現可能のときは，$A \approx \bar{A}.\bar{\bar{A}}$となる．

（証明） Aが(p, q)-デカルト合成表現可能のとき，$\bar{A}, \bar{\bar{A}}$が決定性オートマトンとなることの証明は容易なので略す．

そこで逆に，$\bar{A}, \bar{\bar{A}}$が決定性オートマトンであると仮定する．このとき，定理の成立をいうためには，$A \approx \bar{A}.\bar{\bar{A}}$を証明すれば十分である．$\forall s \in S$に対して$\varphi(s) = (\bar{s}, \bar{\bar{s}})$と定義する．$\forall s \in S$に対して$\bar{s} \cap \bar{\bar{s}} = \{s\}$（［段階B］）より，$\varphi$は$S$から$\bar{S} \times \bar{\bar{S}}$の中への一対一写像となる．さらに$|S| = pq$, $|\bar{S} \times \bar{\bar{S}}| = |\bar{S}| \times |\bar{\bar{S}}| = pq$（［段階B］）および$\varphi$の一対一性より$\varphi$は$S$から$\bar{S} \times \bar{\bar{S}}$の上への写像となる．したがって，$\forall s \in S$, $\forall \sigma \in \Sigma$に対して$\varphi(M(s, \sigma)) = \bar{M}.\bar{\bar{M}}(\varphi(s), \sigma)$をいえば$A \approx \bar{A}.\bar{\bar{A}}$なることがいえる．$s \in S$, $\sigma \in \Gamma$の場合についてこのことを証明しておく（$s \in S$, $\sigma \in \Delta$の場合についても同様にいえる）．

まず，$\varphi(M(s, \sigma)) = (\overline{M(s, \sigma)}, \overline{\overline{M(s, \sigma)}})$. $\sigma \in \Gamma$より$\overline{\overline{M(s, \sigma)}} = \bar{\bar{s}}$．したがって，$\varphi(M(s, \sigma)) = (\overline{M(s, \sigma)}, \bar{\bar{s}})$．一方，$\bar{M}.\bar{\bar{M}}(\varphi(s), \sigma) = \bar{M}.\bar{\bar{M}}((\bar{s}, \bar{\bar{s}}), \sigma) = (\bar{M}(\bar{s}, \sigma), \bar{\bar{s}}) = (\overline{M(s, \sigma)}, \bar{\bar{s}})$．故に，$\varphi(M(s, \sigma))$

$=\bar{M}.\bar{\bar{M}}(\varphi(s),\ \sigma)$ が成り立つ. ■

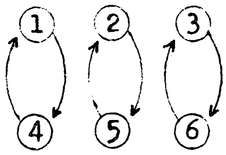
4. 例

上記のアルゴリズムの妥当性を示すためにいくつかの例を与える. はじめの例以外は全て (p, q)-デカルト合成表現不能な例である.

[例 1] 次の状態遷移表で与えられるオートマトン $A=(S, \Sigma, M)$ は $(2, 3)$-デカルト合成表現可能なオートマトンである.

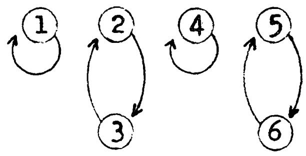
	σ	τ	δ
1	4	1	2
2	5	3	2
3	6	2	2
4	1	4	5
5	2	6	5
6	3	5	5

A_σ :



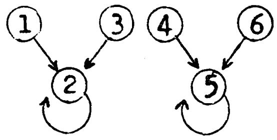
$\rho(A_\sigma) = 3$

A_τ :



$\rho(A_\tau) = 4$

A_δ :

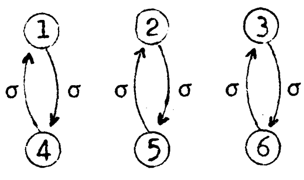


$\rho(A_\delta) = 2$

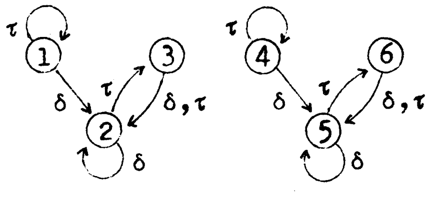
$\Gamma^{\#} = \Gamma = \{\sigma\}$

$\Delta^{\#} = \Delta = \{\tau, \delta\}$

A_Γ :



A_Δ :



$\bar{S} = \{\{1,2,3\},\{4,5,6\}\}$ $\bar{\bar{S}} = \{\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\}\}$

$\bar{A} = (\bar{S}, \Gamma, \bar{M})$

$\bar{M}(\bar{1}, \sigma) = \bar{4}$

$\bar{M}(\bar{4}, \sigma) = \bar{1}$

$\bar{\bar{A}} = (\bar{\bar{S}}, \Delta, \bar{\bar{M}})$

$\bar{\bar{M}}(\bar{\bar{1}}, \tau) = \bar{\bar{1}}$ $\bar{\bar{M}}(\bar{\bar{1}}, \delta) = \bar{\bar{2}}$

$\bar{\bar{M}}(\bar{\bar{2}}, \tau) = \bar{\bar{3}}$ $\bar{\bar{M}}(\bar{\bar{2}}, \delta) = \bar{\bar{2}}$

$\bar{\bar{M}}(\bar{\bar{3}}, \tau) = \bar{\bar{2}}$ $\bar{\bar{M}}(\bar{\bar{3}}, \delta) = \bar{\bar{2}}$

$$A \approx \bar{A}.\bar{\bar{A}}$$

[例2] 次の状態遷移表で与えられるオートマトン$A=(S,\Sigma,M)$は(2,3)-デカルト合成表現不能である．何故なら[段階A]の検証が否定的であるからである．

	σ	τ
1	4	2
2	4	3
3	5	1
4	1	5
5	4	6
6	2	4

[例3] 次の状態遷移表で与えられるオートマトン$A=(S,\Sigma,M)$は(2,3)-デカルト合成表現不能である．何故なら[段階A]および[段階B]の(ii)の検証は肯定的であるが[段階B]の(i)のそれが否定的であるからである．

	σ	τ
1	4	2
2	6	3
3	1	1
4	1	5
5	5	6
6	2	4

[例4] 次の状態遷移表で与えられるオートマトン$A=(S,\Sigma,M)$は$(3,5)$-デフォルト合成表現不能である．何故なら[段階A]および[段階B]の(i)の検証は肯定的であるが[段階B]の(ii)のそれが否定的であるからである．

	σ	τ	δ
1	2	4	4
2	3	5	5
3	1	6	6
4	5	7	7
5	6	8	8
6	4	9	9
7	8	13	1
8	9	2	14
9	7	3	3
10	11	12	12
11	10	15	15
12	13	10	10
13	14	1	13
14	15	14	2
15	12	11	11

[例5] 次の状態遷移表で与えられるオートマトン$A=(S,\Sigma,M)$は$(2,3)$-デフォルト合成表現不能である．何故なら[段階A]および[段階B]の検証は肯定的であるが[段階C]のそれが否定的であるからである．

	σ	τ
1	4	2
2	6	3
3	1	1
4	1	5
5	5	6
6	2	4

5. むすび

$(p,q)=1$ がなりたたないとき，連結オートマトン A の (p,q) ーデカルト合成表現可否判定の能率的なアルゴリズムをもとめることはやさしくない。本論文の[段階A]のように，Σ の元を Γ と Δ にうまくふりわけることが出来ないからである．さらに，一般に表現の一意性も保障されていないからである．

最後に，連結オートマトン $A=(S,\Sigma,M)$ に於いて $|S|=r$（r は異なる素数の積）なるときには，本論文のアルゴリズムがそのまま，デカルト合成表現可否判定のアルゴリズムとしてつかえることに注意しよう．

1 W. Dorfler, The Cartesian Composition of Automata, Math. Systems Theory 11 (1978), 239 - 257.

2 S. Eilenberg, Automata, Languages and Machines. Vol.B, Academic Press, 1976

3 A. Ginzburg, Algebraic Theory of Automata, Academic Press, 1968

4 J. Hartmanis and R.E. Stearns, Algebraic Structure Theory of Sequential Machines, Prentice-Hall, 1966.