数理解析研究所講究録
第355巻 1979年 1-17

線型常微分方程式の変形理論の Soliton 理論への応用

京大 数理研 上野 喜三雄

§0 Soliton理論(or Isospectral Deformation)(Date[2], Kricheber[1])を我々のモノドロミー保存変形理論の立場から捉え直してみよう。その際,我々がとる基本的原理は,"見かけの特異点(apparente singularity)をもつ常微分方程式(系)の変形理論を構成せよ" ということに集約される。現在のところ具体的計算が実行されているのは,sine-Gordon方程式(略して,s-G eq.)についてのみであるが,将来は,isospectral deformation (or Zakharov-Shabat formalism[3], AKNS formalism[4]及び,前述の文献)によって得られる非線型方程式の多くが,我々の変形理論の枠内で捉えられるものと期待される。

なお,この小文を書くにあたり,東大の岡本和夫先生との討論は,非常に貴重かつ本質的なものでした。岡本先生に心から感謝いたします。

§1 s-G eqのN-soliton解の構成法(Date[1])と関連して必要とされる常微分方程式は次のtypeのものである。

(1) $PY=0$, ただし, $P=\frac{d}{dx}-A(x;t)=\frac{d}{dx}-(x^2E+xF+G+\sum_{i=1}^{N}\frac{H_i}{x-a_i})$

ここで, $a_i\neq a_j$ for $i\neq j$, $a_i\neq 0$ for $\forall i$ とする。又, $t=(t_1,\ldots,t_l)\in T\subset\mathbb{C}^l$ (Tは適当な有界領域)はパラメーターで, E,F,G,H_iはtの正則函数を成分とする2x2行列であって, 更に以下に述べる条件をみたすとする。$G=diag(g_1,g_2)$, $g_1\neq g_2$, $E=K\hat{E}K^{-1}$, $\hat{E}=diag(e_1,e_2)$ $e_1\neq e_2$, $K,\hat{E}$の成分はtの正則函数。H_iの固有値は, 1と0である。又, a_iは, tに依存しない定数とする。さらに $x=a_i$ は見かけの特異点であると仮定する。

見かけの特異点は次の様に定義される。"$x=a$は方程式の係数の特異点ではあるが, 解はその点において分岐せず, 正則又は極をもつとき, $x=a$を見かけの特異点という。"

上の定義をもう少し広く解釈して, 解がその点の近傍で非対数的(non-logarithmic)となる場合も, 見かけの特異点と呼ぶこともある。見かけの特異点があらわれる為に, 変形の際の保存量として新しいものが登場する。(cf Ueno[6], [7])

さて, 上記の条件のもとで以下の条件をみたす解の基本系の組$\{Y_j^{(\infty)}\}_{j=1}^{M+1}$, $\{Z_j^{(\infty)}\}_{j=1}^{M+1}$が存在する。まず, $Y_j^{(\infty)}$達は, 次の如きものである。

(i) $S_j^{(\infty)}$ $(j=1,\ldots,M,M+1)$は, $x=\infty$を頂点にもつ, 頂角$<\pi$の角領域

(ii) $S_j^{(\infty)}\cap S_{j+1}^{(\infty)}\neq\phi$, $\bigcup_{j=1}^{M}S_j^{(\infty)}\supset\{x;\alpha\leq\arg x\leq\alpha+2\pi, x_\infty<|x|<+\infty\}$

(iii) $\mathcal{S}_{M+1}^{(\infty)}=\mathcal{S}_1^{(\infty)}\cdot e^{2\pi i}$

(iv) $\mathrm{Re}\{(g_\alpha-g_\beta)x\}=0$ $(\alpha,\beta=1,2)$ で定まる放射線は $\mathcal{S}_j$ の内部にある。

(v) $Y_j^{(\infty)}(x;t)$ は(1)の解の基本系であり，t については $\mathcal{T}$ で正則。

(vi) $Y_j^{(\infty)}(x;t)\approx\hat{Y}^{(\infty)}(x;t)x^{D^{(\infty)}}\exp(xG)$ in $\mathcal{S}_j^{(\infty)}\times\mathcal{T}$ $j=1,\cdots,M+1$

（この等式の意味は，左辺の函数が右辺の形式的級数をパラメーター t について一様な漸近展開としてもつということ。）

ここで，$\hat{Y}^{(\infty)}=I+\sum_{k=1}^{\infty}\hat{Y}_k(t)x^{-k}$，$D^{(\infty)}=diag(d_1^{(\infty)},d_2^{(\infty)})$

(vii) $Y_{M+1}^{(\infty)}={}^{\gamma_\infty^{-1}}Y_1^{(\infty)}e^{2\pi i D^{(\infty)}}$；$\gamma_\infty$ は，$x=\infty$ のまわりを正の向きに一周する閉曲線で，${}^{\gamma_\infty^{-1}}Y_1^{(\infty)}$ は，$Y_1^{(\infty)}$ を γ_∞^{-1} に沿って解析接続したという意味である。

次に，$Y=KZ$ と変数変換すると，(1)は次の如くなる。

(2) $\dfrac{dZ}{dx}=(x^2\hat{E}+x^{-1}K^{-1}FK+K^{-1}GK+\sum_{i=1}^{N}\dfrac{K^{-1}H_iK}{x-a_i})Z$

この方程式に対してやはり前述した性質をもつ角領域 $\mathcal{S}_j^{(0)}$ と解の基本系 $Z_j^{(0)}(x;t)$，$j=1,\cdots,M',M'+1$ が存在する。とくに，

$Z_j^{(0)}(x;t)\approx\hat{Z}^{(0)}(x;t)x^{D^{(0)}}\exp(-x^{-1}\hat{E})$ in $\mathcal{S}_j^{(0)}\times\mathcal{T}$，$j=1,\cdots,M'+1$

ただし，$\hat{Z}^{(0)}=I+\sum_{k=1}^{\infty}\hat{Z}_k(t)x^{k}$，$D^{(0)}=diag(d_1^{(0)},d_2^{(0)})$

が成立する。

次に，見かけの特異点のまわりでの解の標準型について論

じよう。

補題1　方程式；$x\frac{d}{dx}Y=A(x)Y$（$A(x)$は，$x=0$の近傍で正則）において$A(0)$の固有値は，$\lambda, \lambda+k$（kは正の整数）とする。もし$x=0$が見かけの特異点（今の場合，非対数的特異点という拡張された意味に解釈する。）であれば，解の基本系は，次の如くなる。

(3)　$Y=x^{J_1}\cdot x^{J_2}\cdots\cdots x^{J_k}\Phi(x)x^{\lambda}$

ただし，J_lの固有値は，1と0，又$\Phi(x)$は$x=0$の近傍で正則かつ$\det\Phi(0)\neq 0$である。

証明　まず，適当な非特異行列で，$A(0)$を対角化しておく。$T_1^{-1}A(0)T_1=diag(\lambda, \lambda+k)$。$Y=T_1V$と変換すると，方程式は，$x\frac{d}{dx}V=T_1^{-1}A(x)T_1V=B(x)V$，ただし，

$$B(x)=\begin{bmatrix}\lambda+x\psi_{11}^{(1)}(x) & x\psi_{12}^{(1)}(x)\\ x\psi_{21}^{(1)}(x) & \lambda+k+x\psi_{22}^{(1)}(x)\end{bmatrix}$$

となる。さらにShearing変換　$V=S(x)Y_1$，$S(x)=diag(1,x)$を行うと方程式は次の如くなる。

$$x\frac{d}{dx}Y_1=\{S^{-1}(x)B(x)S(x)-xS^{-1}(x)\frac{d}{dx}S(x)\}Y_1=A_1(x)Y_1$$

$$A_1(x)=\begin{bmatrix}\lambda+x\psi_{11}^{(1)}(x), & x^2\psi_{12}^{(1)}(x)\\ \psi_{21}^{(1)}(x) & \lambda+k-1+x\psi_{22}^{(1)}\end{bmatrix}$$

$A_1(0)$の固有値は，$\lambda, \lambda+k-1$である。そこで，同様な変換をk回操り返して行えば，その結果得られる方程式は，

$$x\frac{d}{dx}Y_k = A_k(x)Y_k$$

$$A_k(x) = \begin{bmatrix} \lambda + x\psi_{11}^{(k)}(x) & x^2\psi_{12}^{(k)}(x) \\ \psi_{21}^{(k)}(x) & \lambda + x\psi_{22}^{(k)}(x) \end{bmatrix}$$

この方程式は，次の様な解の基本系をもつ。

$$Y_k = \Phi_k(x)x^\lambda\left[I + \log x\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \psi_{21}^{(k)}(0) & 0 \end{bmatrix}\right],$$

$\Phi_k(x)$ は，$x=0$ で正則かつ $\Phi_k(0)=I$

今，$x=0$は，非対数的特異点であると仮定しているので，$\psi_{21}^{(k)}(0)=0$である。以上でもとの方程式は，$Y=T_1S(x)\cdots T_kS(x)\Phi_k(x)x^\lambda$という解の基本系をもつことがわかった。これをまとめれば(3)の如くなる。なお，$A(x)$が適当なパラメーターに正則に依存するとき，上のΦ_kはパラメータについて正則となる。q.e.d.

さて，各特異点の近傍での解の標準型(or 正規化された解)がわかったので，次にそれらの解の接続問題を論じる。

まず，$x=\infty$における Stokes係数とは今の場合，次の式によって定義される非特異行列(xに依らぬ)のことである。

(4) $\quad Y_{j+1}^{(\infty)} = Y_j^{(\infty)}C_j^{(\infty)} \qquad j=1,\cdots,M$

同様に，$x=0$における Stokes係数は，

(5) $\quad Z_{j+1}^{(0)} = Z_j^{(0)}C_j^{(0)} \qquad j=1,\cdots,M'$

によって定義される。又，対角行列$D^{(\infty)}$，$D^{(0)}$のことを，各々$x=\infty$ $x=0$での形式的モノドロミーと呼ぶことにする。$Y_1^{(\infty)}$と$Z_1^{(0)}$の接

続についてであるが，xに依存しない非特異行列Qが存在して

(6) $K^{-1}Y_1^{(\infty)}=Z_1^{(0)}Q$

という関係によって，$Y_1^{(\infty)}$と$Z_1^{(0)}$は結ばれている。又，補題1により，$Y_1^{(\infty)}$は，$x=a_i$の近傍で，次の様な表示をもつ。

(7) $Y_1^{(\infty)}=(x-a_i)^{J_i(t)}\Phi_i(x;t)$

ただし，$\Phi_i(x;t)$は，xについては，$x=a_i$の近傍で正則，tについては，Tで正則，かつ$\det\Phi_i(a_i,t)\neq 0$とする。又$J_i(t)$は，Tで正則かつ，固有値は0と1（従って，$J_i^2=J_i$）である。$\Phi_i(x,t)$の局所展開を，$\Phi_i(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\Phi_i^{(k)}(t)(x-a_i)^{(k)}$とする。

さて，以上のsituationの下に我々は，次の定理を得る。

定理2　以下に述べる条件をみたす解の基本系の組，$\{Y_j^{(\infty)}\}_{j=1}^{M+1}$ $\{Z_j\}_{j=1}^{M'+1}$が存在したとせよ。

条件1；　$dC_j^{(\infty)}=0,\ {}^\forall j$　かつ　$dD^{(\infty)}=0$

条件2；　$dC_j^{(0)}=0$ for ${}^\forall j$　かつ　$dD^{(0)}=0$

条件3；　$dQ=0$

条件4；　$-dJ_i\cdot J_i+(I-J_i)(d\Phi_i^{(0)}\cdot\Phi_i^{(0)-1})J_i=0$ for ${}^\forall i$

このとき微分方程式(1)の係数E,F,G,H_i $(i=1,\cdots,N)$及びKは次の非線型微分方程式系をみたさねばならない。

(8) $\{dG, F+\sum_{i=1}^{N} H_i\}_G = dK\cdot K^{-1} - K\{d\hat{E}, F\}_{\hat{E}} K^{-1}$

$$
(9)\begin{cases}
[\Phi, G]=0,\ dG = \Phi + [\Phi, F+\sum_{i=1}^{N} H_i] + [\Psi, G] \\
dF = [\Phi, E] + [\Theta, G] - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{a_i}[\Theta, H_i] + [\Psi, F] \\
dE = -\Theta + [\Psi, E] + [\Theta, F],\quad [\Theta, E]=0 \\
dH_i = [a_i\Phi + \Psi + \frac{1}{a_i}\Theta,\ H_i]
\end{cases}
$$

$$
(10)\begin{cases}
\Phi\wedge\Phi = 0,\ d\Phi = [\Phi, \Psi]_+ \\
d\Psi = \Psi\wedge\Psi + [\Phi, \Theta]_+ \\
d\Theta = [\Theta, \Psi]_+,\quad \Theta\wedge\Theta = 0
\end{cases}
$$

ただし，dは，パラメーターtに関する外微分を意味し，Φ, Ψ, Θは次の式で定義される1-formである。

$\Phi = dG$

$\Psi = \{dG, F+\sum_{i=1}^{N} H_i\}_G$

$\Theta = -Kd\hat{E}K^{-1}$

又，ブラケット$\{\ ,\ \}$は，$A = diag(a_1, \cdots, a_n)$，$\Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ $X = (x_{ij})$ （Λは matrix or 1-form）に対して，次の様に定義される。（Aは generic とする。）

$$
\{\Lambda; X\}_A \text{の} (i,j) \text{成分} = \begin{cases} \frac{\lambda_i - \lambda_j}{a_i - a_j} x_{ij} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}
$$

<u>証明</u>　我々は，$dY_1^{(\infty)}\cdot Y_1^{(\infty)-1} = \Omega$という1-formを，条件1〜4の下で決定する。$Y_1^{(\infty)}$の$x=\infty$での局所モノドロミーは，$e^{2\pi i D_x^{(\infty)}}$

$C_M^{(\infty)-1}\cdots C_1^{(\infty)-1}$ であるから，条件1が成立するとすれば，$Y_1^{(\infty)}$ の $x=\infty$ での局所モノドロミーは，パラメーター t に依らない。従って，$dY_1^{(\infty)}\cdot Y_1^{(\infty)-1}$ は，$x=\infty$ の近傍で一価である。又，$Y_1^{(\infty)}$ の漸近展開の式から

$$dY_1^{(\infty)}\cdot Y_1^{(\infty)-1} \approx d\hat{Y}^{(\infty)}\cdot\hat{Y}^{(\infty)-1} + x(\hat{Y}^{(\infty)} dG\, \hat{Y}^{(\infty)-1}) \quad \text{in } S_1\times T$$

となることがわかるが，$dC_j^{(\infty)}=0$ より $dY_1^{(\infty)}\cdot Y_1^{(\infty)-1} = dY_j^{(\infty)}\cdot Y_j^{(\infty)-1}$ $(j=2,\dots,M)$ であるから上の漸近展開の式は，実は，$x=\infty$ の全近傍で成立する。$dY_1^{(\infty)}\cdot Y_1^{(\infty)-1}$ が $x=\infty$ の近傍で一価であるという事実と合せて，結局，漸近展開の式の右辺は，$dY_1^{(\infty)}\cdot Y_1^{(\infty)-1}$ の $x=\infty$ での局所展開を与えるものである。即ち，

$$(11)\quad dY_1^{(\infty)}\cdot Y^{(\infty)-1} = d\hat{Y}^{(\infty)}\cdot\hat{Y}^{(\infty)-1} + x(\hat{Y}^{(\infty)} dG\, \hat{Y}^{(\infty)-1}) \quad \text{at } x=\infty$$

が成立する。同様の考察により

$$(12)\quad dZ_1^{(0)}\cdot Z_1^{(0)-1} = d\hat{Z}^{(0)}\cdot\hat{Z}^{(0)-1} - x^{-1}(\hat{Z}^{(0)} d\hat{E}\, \hat{Z}^{(0)-1}) \quad \text{at } x=0$$

を得る。このことと，条件3より

$$(13)\quad dY_1^{(\infty)}\cdot Y_1^{(\infty)-1} = dK\cdot K^{-1} + K\{d\hat{Z}^{(0)}\cdot\hat{Z}^{(0)-1} - x^{-1}(\hat{Z}^{(0)} d\hat{E}\, \hat{Z}^{(0)-1})\}K^{-1} \quad \text{at } x=0$$

が成り立つ。次に，$dY_1^{(\infty)}\cdot Y_1^{(\infty)-1}$ が $x=a_i$ の近傍でいかなる挙動を示すかを見よう。$J_i^2=J_i$ という関係を用いれば，

$$(x-a_i)^{J_i} = \exp(J_i \log(x-a_i)) = I + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}J_i^n \log^n(x-a_i) = I + \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\log^n(x-a_i)\Big)J_i$$

$$\therefore\quad (x-a_i)^{J_i} = I + ((x-a_i)-1)J_i$$

同様に，$(x-a_i)^{-J_i} = I + ((x-a_i)^{-1}-1)J_i$ である。この事実を用いて，$dY_1^{(\infty)}\cdot Y_1^{(\infty)-1}$ の $x=a_i$ での局所表示が，次の如く求められる。

$$dY_1^{(\infty)}\cdot Y_1^{(\infty)-1} = \{-dJ_i\cdot J_i + (I-J_i)(d\Phi_i^{(0)}\cdot \Phi_i^{(0)-1})J_i\}(x-a_i)^{-1}$$
$$+(\text{holomorphic term at } x=a_i)$$

従って，条件4より $dY_1^{(\infty)}\cdot Y_1^{(\infty)-1}$ は，$x=a_i$ で正則となる。以上により $dY_1^{(\infty)}Y_1^{(\infty)-1}$ は，$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}-\{0,\infty\}$ で1価正則で，$x=0,\infty$ を各々1位の極としてもつことがわかった。その具体的な形は，次の如くである。この定数項に関して，Gauge 整合条件が課される。

$$\text{定数項} = \{dG, F+\sum_{i=1}^{N} H_i\}_G = dK\cdot K^{-1} - K\{d\hat{E}, F\}_{\hat{E}} K^{-1}$$

これが，方程式(8)である。又，$Y_1^{(\infty)}$ は，次の extended system を満す。

$$(14)\begin{cases} PY_1^{(\infty)} = 0 \\ dY_1^{(\infty)} = \Omega Y_1^{(\infty)}, \qquad \Omega = x\,dG + \{dG, F+\sum_{i=1}^{N} H_i\}_G - x^{-1}K\,d\hat{E}\,K^{-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \equiv x\Phi + \Psi + x^{-1}\Theta \end{cases}$$

この system の積分可能条件，$dP=[\Omega, P]$，$d\Omega = \Omega\wedge\Omega$ を計算することにより方程式(9),(10) を得る。　　　　　q.e.d.

remark 1　(8),(9),(10) の方程式の中には，trivial なものも混じっている。例えば，$[\Phi, G]=0$ 等である。

remark 2.　方程式(1)において係数行列の size を一般にし，かつ次の条件をおく。$G=\mathrm{diag}(g_1,\cdots,g_n)$. $g_i\neq g_j$，$E=K\hat{E}K^{-1}$，$\hat{E}=\mathrm{diag}(e_1,\cdots,e_n)$ $(i\neq j)$ 又 H_i は，generic な行列（i.e 相異なる固有値の差 $\notin \mathbb{Z}$）とする。この場合の変形は次の様になる。解の基本系，両領域，$\{Y_j^{(\infty)}, S_j^{(\infty)}\}_{j=1}^{M+1}$，$\{Z_j^{(0)}, S_j^{(0)}\}_{j=1}^{M'+1}$ を前述の如くとってくる。

$C_j^{(\infty)}, C_j^{(0)}, Q$等も同じ様に定義し，又，条件1，2，3も同じとする。ただ，条件4の代りに，

<u>条件4'</u>；$Y_i^{(\infty)}$の$x=a_i$のまわりでの局所モノドロミーは保存される。$(i=1,\cdots,N)$

これらの条件のもとで，変形の方程式が得られるわけであるが，それらは，(8)，(9)，(10)と全く同じものであり，定理2に対応する定理も同様に成立する。見かけの特異点をもつときの変形は，このgenericな場合の極限として得られるように構成したのである。

<u>§2</u>　sine-Gordon方程式$u_{\xi\eta}+\sin u=0$は，次の作用素方程式と同値であることが知られている。

(15)，$[L, M]=0$

$$(16)\begin{cases} L=\dfrac{\partial}{\partial\xi}-\dfrac{i\lambda}{2}\begin{bmatrix} & 1\\ 1 & \end{bmatrix}-\dfrac{iu_\xi}{2}\begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix} \\ \\ M=\dfrac{\partial}{\partial\eta}-\dfrac{i\lambda^{-1}}{2}\begin{bmatrix} & e^{iu}\\ e^{-iu} & \end{bmatrix}\end{cases}$$

(15)は，次の方程式系，$L\Psi=0$，$M\Psi=0$，$\Psi={}^t(\psi_1,\psi_2)$の可解条件である。今，Ψとして次の条件をみたす函数がとれたとしよう。

$$(17)\begin{cases} \Psi_n(\xi,\eta:\lambda)=\psi_n(\xi,\eta:\lambda)\exp P(\xi,\eta:\lambda) \\ \text{ただし，}\ \psi_n(\xi,\eta:\lambda)=\lambda^N+\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1}\psi_{nj}(\xi,\eta)\lambda^j \qquad n=1,2\end{cases}$$

$p = \frac{i}{2}(\lambda\xi + \lambda^{-1}\eta)$

更に，ξ, η, λ に依らない定数 c_j, α_j $j=1,\cdots,N$ $(\alpha_i \neq \alpha_j, i \neq j$ 1$)$ が存在して，

(18) $\Psi_n(\xi,\eta;\alpha_j) = (-)^{n-1} c_j \Psi_n(\xi,\eta;-\alpha_j)$ $n=1,2$ $j=1,\cdots,N$

という条件が成立するとき，$e^{iu} = \psi_{1,0}/\psi_{2,0}$，$u_\xi = \psi_{1,N-1} - \psi_{2,N-1}$ となって u は s-G eq の N-soliton 解となることが知られている。(Date[1]を参照)

この situation が，常微分方程式の変形理論と如何に結びつくかを説明しよう。我々は，次の行列函数を考察の対象とする。

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1(\lambda) & \Psi_1(-\lambda) \\ \Psi_2(\lambda) & -\Psi_2(-\lambda) \end{bmatrix}$$

Ψ_1, Ψ_2 の定義から，Ψ は，$\lambda = 0, \infty$ に1級の不確定特異点をもつ(λに関する)常微分方程式の解の基本系となっていることが，期待される。それでは，その方程式の係数の特異点は，$\lambda = 0, \infty$ のみであろうか？ (18)は，$\det\Psi = 0$ at $\lambda = \pm\alpha_j$ $j=1,\cdots,N$ を意味するから，$\lambda = \pm\alpha_j$ $j=1,\cdots,N$ は，明らかにこの方程式の特異点でなければならない。しかし，Ψ 自身は，それらの点において正則であるから，特異点は"見かけの特異点"となるはずである。さて Ψ の満すべき λ に関する常微分方程式が求ったとしよう，

Ψは，$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}-\{0,\infty\}$で1価正則ゆえモノドロミーは自明である。又，形式的モノドロミーも自明である。従って，Ψの(ξ,η)-*dependence*は，モノドロミー保存という形で規定される。それゆえ微分作用素，L，Mは，変形の接続型式Ωから導かれるに違いないであろう。

以上述べたことが，我々の基本的アイデアである。そして，このアイデアの多くは，（とりわけΨという行列を考察物とすべきこと）岡本先生に負うものです。又，以下に述べる計算も，岡本先生との討論において教えられることの大であったものです。あらためて，岡本先生に感謝致します。

それでは，Ψのみたすべき常微分方程式を求めよう。まず$\det\Psi$を計算する。

$$
\begin{aligned}
\Delta &\underset{def}{=} \det\Psi \\
&= -\{\Psi_1(\lambda)\Psi_2(-\lambda)+\Psi_1(-\lambda)\Psi_2(\lambda)\} \\
&= r_N\lambda^{2N}+\cdots+r_0
\end{aligned}
$$

である。r_N, r_0は，$r_N=2(-)^{N-1}$, $r_0=-2\psi_{1,0}\psi_{2,0}$である。又. $\Delta=2(-)^{N-1}\times\prod_{j=1}^{N}(\lambda^2-\alpha_j^2)$ ($\because$ (18)) 次に，

$$
A(\lambda,\xi,\eta) \underset{def}{=} \frac{d\Psi}{d\lambda}\Psi^{-1}
$$

$$
=\Delta^{-1}\begin{bmatrix} -\Psi_1'(\lambda)\Psi_2(-\lambda)+\Psi_1'(-\lambda)\Psi_2(\lambda) & -\Psi_1'(\lambda)\Psi_1(-\lambda)-\Psi_1'(-\lambda)\Psi_1(\lambda) \\ -\Psi_2'(\lambda)\Psi_2(-\lambda)-\Psi_2'(-\lambda)\Psi_2(\lambda) & -\Psi_2'(\lambda)\Psi_1(-\lambda)+\Psi_2'(-\lambda)\Psi_1(\lambda) \end{bmatrix}
$$

とおく。又，$A(\lambda)=\Delta^{-1}B(\lambda)$ によって，Bを定義する。Bの各成分 B_{ij}は，次の様になる。B_{11}, B_{22}は奇函数で，

$$B_{11}=\lambda\sum_{l=-1}^{N-1}a_{1,l}\lambda^{2l}, \quad \text{where } a_{1,N-1}=2(-)^{N-1}\left\{N+(\psi_{1,N-1}-\psi_{2,N-1})\frac{i\xi}{2}\right\}$$

同様に，

$$B_{22}=\lambda\sum_{l=-1}^{N-1}a_{2,l}\lambda^{2l}, \quad \text{where } a_{2,N-1}=2(-)^{N-1}\left\{N+(\psi_{2,N-1}-\psi_{1,N-1})\frac{i\xi}{2}\right\}$$

となる。B_{12}, B_{21}は，偶函数であり，

$$B_{nm}=\sum_{l=-1}^{N}b_{nm,l}\lambda^{2l} \qquad (n,m)=(1,2)$$

$$b_{nm,N}=(-)^{N-1}i\xi, \qquad b_{nm,-1}=\psi_{n,0}^{2}i\eta$$

となる。従って，$A(\lambda;\xi,\eta)$は，次の様にあらわせられるλの有理式である。

$$A=\Delta^{-1}\left\{\begin{bmatrix} & b_{12,N}\\ b_{21,N} & \end{bmatrix}\lambda^{2N}+\begin{bmatrix} a_{1,N-1} & \\ & a_{2,N-1}\end{bmatrix}\lambda^{2N-1}+\cdots+\begin{bmatrix} & b_{12,-1}\\ b_{21,-1} & \end{bmatrix}\lambda^{-2}\right\}$$

$$=\lambda^{-2}E+\lambda^{-1}F+G+\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{H_j^{(+)}}{\lambda-\alpha_j}+\frac{H_j^{(-)}}{\lambda+\alpha_j}\right)$$

ただし，

$$(19)\quad G=\lim_{\lambda\to\infty}A(\lambda)=\frac{i\xi}{2}\begin{bmatrix} & 1\\ 1 & \end{bmatrix}$$

$$(20)\quad E=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{2}A(\lambda)=\frac{-i\eta}{2}\begin{bmatrix} & \psi_{1,0}/\psi_{2,0}\\ \psi_{2,0}/\psi_{1,0} & \end{bmatrix}$$

$$(21)\quad F+\sum_{j=1}^{N}H_j^{(\pm)}=\lim_{\lambda\to\infty}(A(\lambda)-G)\lambda=\begin{bmatrix} N+(\psi_{1,N-1}-\psi_{2,N-1})\frac{i\xi}{2} & \\ & N+(\psi_{2,N-1}-\psi_{1,N-1})\frac{i\xi}{2}\end{bmatrix}$$

である。次に，$H_j^{(\pm)}$の固有値を求めてみよう。

$$\mathrm{tr}\,H_j^{(\pm)} = \lim_{\lambda\to\pm\alpha_j} \mathrm{tr}\,(\lambda\mp\alpha_j)A(\lambda)$$

$$= \lim_{\lambda\to\pm\alpha_j} \frac{(\lambda\mp\alpha_j)\times\{\Phi_1(\lambda)\Phi_2(-\lambda)+\Phi_1(-\lambda)\Phi_2(\lambda)\}'}{\{\Phi_1(\lambda)\Phi_2(-\lambda)+\Phi_1(-\lambda)\Phi_2(\lambda)\}} = 1$$

又，$\det B(\lambda)|_{\lambda=\pm\alpha_j} = -\{\Phi_1'(\lambda)\Phi_2'(-\lambda)+\Phi_1(-\lambda)\Phi_2(\lambda)\}\Delta|_{\lambda=\pm\alpha_j} = 0$ であるから，$\det H_j^{(\pm)} = 0$。よって，$H_j^{(\pm)}$ の固有値は，$1, 0$ である。

これで，Φ のみたすべき常微分方程式 $\frac{d\Phi}{d\lambda} = A\Phi$ に関する情報がすべてわかったことになる。この方程式の変形は，我々が§1で構成した理論の射程内にある。変形の接続形式を求めてみよう。

まず，G を対角化する。$T = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ とおくと，$TGT^{-1} = \frac{i\zeta}{2}\begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix}$ である。そして，常微分作用素 $T(\frac{d}{d\lambda}-A)T^{-1}$ に対して，変形の接続形式 Ω を§1に従って計算すると次の様になる。

$$\Omega = \lambda T dG T^{-1} + \{T dG T^{-1}, T(F+\sum_{j=1}^{N} H_j^{(\pm)})T^{-1}\}_{TGT^{-1}} - \lambda^{-1} K d\hat{E} K^{-1}$$

ただし，$\hat{E}$ は E を対角化した行列，K は，$TET^{-1} = K\hat{E}K^{-1}$ をみたす行列とする。我々の目標物は，Ω 自身ではなくて，$T^{-1}\Omega T$ である。

$$T^{-1}\Omega T = \lambda dG + T^{-1}\{T dG T^{-1}, T(F+\sum_{j=1}^{N} H_j^{(\pm)})T^{-1}\}T - \lambda^{-1}(T^{-1}K)d\hat{E}(K^{-1}T)$$

この式に，(19), (20), (21) を代入して，若干の計算の後，次の諸式を得る，

$$(T^{-1}K)d\hat{E}(K^{-1}T) = \frac{-i}{2}\begin{bmatrix} & \Psi_{10}/\Psi_{20} \\ \Psi_{20}/\Psi_{10} & \end{bmatrix} d\eta$$

$$T^{-1}\{TdGT^{-1},\ T(F+\sum_{j=1}^{N}H_j^{(\pm)})T^{-1}\}T=\frac{i}{2}(\psi_{1.N-1}-\psi_{2.N-1})\begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix}d\xi$$

結局，$T^{-1}\Omega T$は，次の様に極めて単純な式となる。

$$(22)\quad T^{-1}\Omega T=\left\{\frac{i}{2}\lambda\begin{bmatrix} & 1\\ 1 & \end{bmatrix}+\frac{i}{2}(\psi_{1.N-1}-\psi_{2.N-1})\begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix}\right\}d\xi$$

$$+\frac{i}{2}\lambda^{-1}\begin{bmatrix} & \psi_{1.0}/\psi_{2.0}\\ \psi_{2.0}/\psi_{1.0} & \end{bmatrix}d\eta$$

従って，L-M pairは

$$(23)\quad\begin{cases}L=\dfrac{\partial}{\partial\xi}-\dfrac{i}{2}\lambda\begin{bmatrix} & 1\\ 1 & \end{bmatrix}-\dfrac{i}{2}(\psi_{1.N-1}-\psi_{2.N-1})\begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix}\\ M=\dfrac{\partial}{\partial\eta}-\dfrac{i}{2}\lambda^{-1}\begin{bmatrix} & \psi_{1.0}/\psi_{2.0}\\ \psi_{2.0}/\psi_{1.0} & \end{bmatrix}\end{cases}$$

$e^{iu}=\psi_{1.0}/\psi_{2.0}$，$u_\xi=\psi_{1.N-1}-\psi_{2.N-1}$とおけば，(23)はまさに(16)に他ならない。

<u>remark 1</u>　我々の変形理論から，直接に，$d\Phi=\Omega\Phi$ (or $L\Phi=0$, $M\Phi=0$)が従うというのではないが，岡本先生は計算により，このことを確かめられている。

<u>remark 2</u>　uをs-G eqのsimilarity solution（相似解）とする。このとき，$L\Phi=0$, $M\Phi=0$の解Φに対して，Φのみたすべき，λに関する常微分方程式は，

$$\left(\lambda\frac{d}{d\lambda}-\frac{i\lambda}{2}\begin{bmatrix} & \xi\\ \xi & \end{bmatrix}-\frac{i}{2}u_\xi\begin{bmatrix}\xi & \\ & -\xi\end{bmatrix}+\frac{i}{2}\frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix} & \eta e^{iu}\\ \eta e^{-iu} & \end{bmatrix}\right)\Phi=0$$

この方程式に対して，変形理論を構成すると，変形の接続形

式Ωを求めると次の様になる。

$$\Omega=\left(\frac{i}{2}\lambda\begin{bmatrix} & 1\\ 1 & \end{bmatrix}+\frac{i}{2}u_{\xi}\begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix}\right)d\xi+\frac{i}{2}\lambda^{-1}\begin{bmatrix} & e^{iu}\\ e^{-iu} & \end{bmatrix}d\eta$$

これは, (22)と全く同じである。

以上でsine-Gordon方程式のN-soliton解の場合について, iso-spectral deformationを（見かけの特異点をもつ）線型常微分方程式系のmonodromy preserving deformationの立場から捉えることに成功したわけであるが, 顧みればこの様な立場は, Zakharov-Mikhairov [5] のRiemann-Hilbert問題を応用するformalizmと極めて密接な関連があるように思われる。いな,むしろ彼らのschemeを微分方程式のmonodromy-preserving-deformationという観点から徹底化したものとも言えよう。いずれにせよ, 両者の理論の関連は, 我々の理論の適用例を見出す問題とともに, 今後究明されねばならない重要な課題であろう。

参考文献

[1] E. Date ; On a Direct Method of Constructing multi-soliton solution (to appear)

[2] I. M. Krichever ; Integration of Non-linear Equations by the Method of Algebraic Geometry. Fuct. Anal and Its Appl, 11(1) 15-31 (1977)

[3] V. E. Zakharov and A. B. Shabat ; A Scheme for Integrating the non-linear Equations of Mathematical Physics by the method of Inverse Scattering Problem I, Fuct. Anal and Its Appl, 8, 226~235 (1974)

[4] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur ; The Inverse Scattering Transform - Fourier Analysis for non-linear Problems, Studies in Appl Math vol LIII No4 (1974)

[5] V. E. Zakharov and A. V. Mikhairov ; Relativistically Invariant Two-dimensional Models in Field Theory Integrable by the Inverse Scattering Problem Technique

[6] K. Ueno ; 線型常微分方程式系の変形理論 ; 京大修士論文

[7] K. Ueno ; The theory of Deformation of a Differential Equation with Irregular Singular Points (to appear)