数理解析研究所講究録
第 355 巻 1979 年 39-48

Maximally degenerate な台をもつ 不確定特異点型 擬微分方程式

東大 理 青木貴史

上記の題で行った講演に於て定理として発表した結果の証明に誤り（次元＞1のとき）があったことがわかり，改善を試みたが期日までに果せなかったので以下では1次元の場合の結果およびそれに先立ち，道具として用いる片岡による $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ の symbol の理論をのべ，十分な吟味を怠り発表したことに対するお詫びとしたい．

1. $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ の symbol （片岡 [1], [3]）

$\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ の定義については 柏原 - Schapira [5] 等を参照していただくことにし，以下では $X = \mathbb{C}^n \ni x = (x_1, \cdots, x_n)$, $T^*X \cong \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \ni (x, \zeta) = (x_1, \cdots, x_n, \zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ とし，$x_0^* = (x_0, \zeta_0) = (0; \zeta_{0,1}, 0, \cdots, 0)$ （$\zeta_{0,1} \neq 0$）の近傍（錐状近傍）で $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ （$= \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$）を考える．座標はひとつ固定しておく．

$\mathcal{E}_{x_0^*}^{\mathbb{R}} \ni F$ は くり込まれた Radon 変換表示（片岡 [1], [2]）により

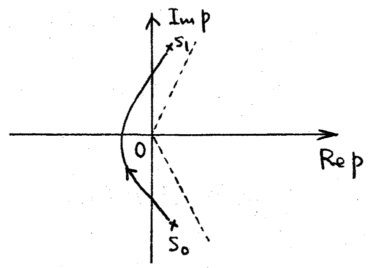
$$f(x, \zeta, \langle x - x', \zeta \rangle)\, d\sigma(\zeta)\, dx'$$

の同値類として表現される．ここに $f(x, \zeta, p)$ は ある $\varepsilon > 0$ に対し

$$\left\{ (x,\zeta,p)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\times\mathbb{C} \;\middle|\; |x-x_0|<\varepsilon,\ \left|\frac{p}{\zeta_1}\right|<\varepsilon,\ \left|\frac{\zeta}{|\zeta|}-\frac{\zeta_0}{|\zeta_0|}\right|<\varepsilon,\ -\mathrm{Re}\frac{p}{\zeta_1}>-\varepsilon\left|\mathrm{Im}\frac{p}{\zeta_1}\right| \right\}$$

で正則な (ζ,p) について $(-n)$ 次同次な函数, $d\sigma(\zeta)=\sum(-1)^{j-1}\zeta_j\, d\zeta_1\wedge\cdots\overset{j}{\vee}\cdots\wedge d\zeta_n$, $x'=(x_1',\cdots,x_n')$. 0-class は $f(x,\zeta,p)$ が $(x,\zeta,p)=(x_0,\zeta_0,0)$ までこめて正則なものである. この f に対して

<u>定義 1.</u> $$F(x,\zeta)=(2\pi\sqrt{-1})^{n-1}\int_{s_0(\zeta)}^{s_1(\zeta)} f(x,\zeta,p)\,e^{-p}\,dp$$ とおく.



ただし s_0, s_1 は ζ について 1次同次な正則函数で $\zeta=\zeta_0$ のとき $\mathrm{Re}\, s_0>0$, $\mathrm{Re}\, s_1>0$, $\mathrm{Im}\, s_0<0$, $\mathrm{Im}\, s_1>0$ なるもの. 積分路は右図の如くとる.

$F(x,\zeta)$ を $F\in\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{x_0^*}$ の symbol といい $F=F(x,D_x)$ であらわす.

<u>命題 2.</u> 上で定められた $F(x,\zeta)$ は次をみたす.

1) $F(x,\zeta)$ は $\exists\varepsilon>0$, $\Omega=\left\{|x-x_0|<\varepsilon,\ \left|\frac{\zeta}{|\zeta|}-\frac{\zeta_0}{|\zeta_0|}\right|<\varepsilon\right\}$ で正則.

2) $\forall\omega\Subset\Omega$, $\forall\delta>0$ $\sup|F(x,\zeta)\,e^{-\delta|\zeta|}|<\infty$.

ただし $\omega\Subset\Omega$ は ω が Ω 内の compactly generated cone であることとし, sup は $\omega\cap\{|\zeta|\geq 1\}$ でとる. 以下これらのいみで記号を用いる. また この評価をみたす解析函数を 緩増大 であるという.

3) $f(x,\zeta,p)$ が $(x_0,\zeta_0,0)$ まで正則 であることと $\exists\delta>0$, $\forall\omega\Subset\Omega$ $\sup|F(x,\zeta)\,e^{\delta|\zeta|}|<\infty$ なる評価を F がみたすこととは同値.

この評価をみたす解析函数を 急減少 であるという.

4) $g(x,\zeta,p) = \dfrac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\displaystyle\int_1^\infty \zeta_1^{-n} F(x, s\frac{\zeta}{\zeta_1}) e^{\frac{p}{\zeta_1}s} s^{n-1} ds$ とおくと

$f-g$ は $p=0$ までこめて正則

5) 逆に 1), 2) をみたす $F(x,\zeta)$ に対して 4) の積分により定義される g をとり その symbol を $G(x,\zeta)$ とすると $F(x,\zeta)-G(x,\zeta)$ は 急減少 である.

注意 3　定義 1. における s_0, s_1 のとり方の不定性は 急減少函数の ぶんだけ現れる.

例 4　$\zeta_1 \neq 0$ のとき $\log D_1$, $\sqrt{D_1}$, $\exp\sqrt{D_1}$ 等が $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ のこととして いみをもつ.

命題 2 によって $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{x^*} \simeq$ 緩増大解析函数 mod 急減少解析函数 である.
定義 1 のいみでの symbol (以後 $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ のいみでの symbol という) と, $\mathcal{E}^\infty \ni P(x,D)$ の symbol 表示 $P(x,D) = \sum_j P_j(x,D)$ (P_j は j 次同次) との関係をのべよう. 各同次成分 $P_j(x,\zeta)$ の正則函数としての和 $\sum_j P_j(x,\zeta)$ が広義一様に収束すれば その和 $P(x,\zeta) = \sum_j P_j(x,\zeta)$ は $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ のいみでの symbol と一致する. (もちろん modulo 急減少函数). 特に $j \geq 0$ に対し P_j は (*) $\forall\varepsilon>0\ \exists C_\varepsilon \quad |P_j(x,\zeta)|\zeta|^{-j}| \leq \frac{C_\varepsilon}{j!}\varepsilon^j \quad \forall j \geq 0$ という評価をみたし $\sum_{j\geq 0} P_j(x,\zeta) = P_+(x,\zeta)$ はつねに収束するから $P_+(x,D) = \sum_{j\geq 0} P_j(x,D)$ の $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ のいみでの symbol と $P_+(x,\zeta)$ は一致する. (*) の評価より $|P_+(x,\zeta)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta|}$ を得るが, これは 命題 2 の 2) の評価に他ならない. $P_-(x,D) = \sum_{j<0} P_j(x,D)$ については

$\sum_{j<0} P_j(x,\zeta)$ は収束するとは限らないが，各 P_j からそれぞれ適当な急減少函数をひいたものの和 $P_-(x,\zeta)$ が存在し，それが $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ の いみでの symbol となる。従って $P_-(x,\zeta)$ は形式和 $\sum_{j<0} P_j(x,\zeta)$ を漸近展開としてもつ。

一般に

<u>命題 5</u>　(x_0,ζ_0) の錐状近傍 $\Omega \subset T^*X = \mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n$ で定義された正則函数列 $\{F_j(x,\zeta)\}_{j=0}^{\infty}$ が

$$\forall K \Subset \Omega,\quad \exists M>0,\quad \forall \delta>0\quad \exists C_\delta>0\quad \text{s.t.}$$

$$|F_j(x,\zeta)| \le C_\delta M^j j!\, |\zeta|^j e^{\delta|\zeta|} \quad \text{in } K\cap\{|\zeta|\ge 1\}$$

という評価をみたせば $F(x,D_x) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(x,D_x) \in \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{x_0^*}$ が定まる。

<u>命題 6</u>　（形式共役）　$F(x,D_x)\in\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{x_0^*}$ の形式共役 $G(x,D_x)\in\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{a(x_0^*)}$（ただし $a(x_0^*)=(x_0,-\zeta_0)$）は F の symbol を $F(x,\zeta)$ とするとき

$$G(x,D_x) = \sum_{k\ge 0} G_k(x,D_x)$$

ただし　$$G_k(x,\zeta) = \sum_{k=|\alpha|} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}(D_\zeta^\alpha D_x^\alpha F)(x,-\zeta)$$

であらわされる。

<u>命題 7</u>　（結合）　$F(x,D_x)=\sum_{j\ge 0} F_j(x,D_x)$，$G(x,D_x)=\sum_{k\ge 0} G_k(x,D_x)$ を命題 5 の条件をみたす和とするとき　$F(x,D_x)\,G(x,D_x) = \sum_{l=0}^{\infty} R_l(x,D_x)$

ただし　$$R_l(x,\zeta) = \sum_{j+k+|\alpha|=l} \frac{1}{\alpha!} D_\zeta^\alpha F_j(x,\zeta)\, D_x^\alpha G_k(x,\zeta)$$

と表示できる。

応用として定数係数無限階微分作用素の $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ における可逆性について触れておく。証明は河合[4] LEMMA 4.1.3 より直ちに従う。

<u>命題 8</u>　$P(D)$ を $X = \mathbb{C}^n$ 上の定数係数無限階微分作用素、$P(\zeta)$ をその symbol とする。$V = \{\zeta \in \mathbb{C}^n \mid P(\zeta) = 0\}$ とする。$\zeta_0 \in \mathbb{C}^n$ の錐状近傍 Ω で $R > 0$ を十分大きくとると $V \cap \Omega \cap \{|\zeta| > R\} = \phi$ なるものが存在すれば $P(D)$ は $X \times \{\zeta_0\} \subset T^*X$ で $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ の作用素として可逆である。

2. Maximally degenerate な台をもつ擬微分方程式 ― 次元 $n = 1$ の場合 ―

$X = \mathbb{C}$ の原点 0 に台をもつ常擬微分方程式（単独のみを考える）

$$\mathcal{M} : \quad P(x, D)u = 0 \qquad \left(D = \frac{d}{dx} \right)$$

を T^*X の点 $x_0^* = (0 ; \zeta_0 dx)$ $(\zeta_0 \neq 0)$ で考える。P の principal symbol は $x^m \times (\text{non-zero})$ の形だから Weierstraß 型の割算定理によって可逆因子をのぞき P は

$$x^m - P_0'(D)\,x^{m-1} - \cdots - P_{m-2}'(D)\,x - P_{m-1}'(D)$$

の形としてよい。ただし $[P_j', D] = 0$, order $P_j' \leq -1$ である。さらに x_0^* で可逆な作用素 D^m をかけ整理してはじめから

$$P(x, D) = (xD)^m - P_0(D)(xD)^{m-1} - \cdots - P_{m-2}(D)\cdot xD - P_{m-1}(D)$$

であると仮定してよい。order $P_j = r_j \leq j$ である。以下 P はこの形とする。

このとき原点の非正則度は $\sigma = \max_{1 \leq j \leq m} \{1, j/(j - r_{j-1})\}$ で与えられる。$1 \leq \sigma \leq m$ であるが、$\sigma = 1$, $\sigma > 1$ に応じてそれぞれ原点は確定特異点、不確定特異点であるという。

さて $\mathcal{N}_0 : xv=0$ という方程式を考え $\mathcal{N}_0^m = \mathcal{N}_0 \oplus \cdots \oplus \mathcal{N}_0$ (m ケの直和)

とおく。このとき

命題 9　x_0^* の近傍で $\mathcal{E}^{\mathbb{R}} \underset{\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{M} \simeq \mathcal{E}^{\mathbb{R}} \underset{\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{N}_0^m$

証明　$\mathcal{M}$ を行列を使って書きかえる：

$$M(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 0 & 1 \\ P_{m-1}(D) & P_{m-2}(D) & \cdots & & P_0(D) \end{pmatrix}$$

$$U = {}^t(u_1, \cdots, u_m)$$

とおけば $\mathcal{M}$ は $(xD - M(D))U = 0$ と同型である。さらに x_0^* で可逆な作用素の行列

$$C = \begin{pmatrix} D^{m-1} & & & 0 \\ & D^{m-2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & D \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

で変換すると $C(xD - M(D))C^{-1} = xD - A(D)$, ただし

$$A(D) = \begin{pmatrix} 1-m & D & & & 0 \\ & 2-m & D & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -1 & D \\ P_{m-1}D^{1-m} & P_{m-2}D^{2-m} & \cdots & & P_0 \end{pmatrix},$$

ゆえ $\mathcal{M}$ は方程式 $(xD - A(D))V = 0$ $(V = {}^t(v_1, \cdots, v_m))$ と同値である。また $\mathcal{N}_0^m$ は x_0^* の近傍で方程式 $xDW = 0$ と同値である。($W = {}^t(w_1, \cdots, w_m)$)。ここまでは $\mathcal{E}$-加群として方程式を扱った。

以上の reduction によって

$$(xD - A(D))R(D) = R(D) \cdot xD$$

なる $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ の作用素の可逆な $m\times m$ 行列 $R(D)$ $([R, D]=0)$ を構成すればよい. 書きなおして

(*) $$[x, R(D)]\cdot D = A(D)R(D).$$

$A(D)$ の $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ のいみでの symbol を $A(\zeta)$ とする. $A(D)$ は $\omega^* = (0, \zeta_0 dx)$ $(\zeta_0 \neq 0)$ の近傍で定義された作用素ゆえ $A(\zeta)$ は $\mathbb{C} \ni \zeta_0$ を含む角領域 Ω で定義された正則函数で そこにおいて $\zeta \to \infty$ のとき

$$A(\zeta) \sim A_1(\zeta) + A_0 + A_{-1}(\zeta) + \cdots$$

という漸近展開をもつ. ここに $A_j(\zeta)$ は $A(D)$ の j次同次成分である.

従って特にはじめに行った reduction により

$$A_1(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta & & 0 \\ & 0 & \zeta & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & \zeta \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

であることに注意する.

そこで次の常微分方程式を考える.

(**) $$-\frac{d}{d\zeta}R(\zeta)\cdot\zeta = A(\zeta)R(\zeta)$$

これは ∞ に高々 rank 1 の不確定特異点をもつ線型常微分方程式である. その解の基本系を $R(\zeta)$ とする. $R(\zeta)$ が $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ の作用素の可逆な行列の symbol であることを示せば $R(\zeta)$ を symbol とする作用素 $R(D)$ が (*) をみたすことは明らかだから命題が示される.

$R(\zeta)$ は Ω で正則函数の行列として可逆だから $R(\zeta)$, $R(\zeta)^{-1}$ の $\zeta \to \infty$ での増大度を調べればよい. ところが方程式(**) において $A(\zeta)$ の漸近展開

の主要部 $A_1(\zeta)$ がベキ零であることから次の評価を得る.（渋谷[8] §5.4）

$$|R(\zeta)| \leqq K\exp(L|\zeta|^{\frac{m-1}{m}})$$

$$|R(\zeta)^{-1}| \leqq K\exp(L|\zeta|^{\frac{m-1}{m}})$$

ただし K, L は適当な正の定数である. よって $R(\zeta)$ は $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ の作用素の可逆な行列 $R(D)$ を定め 命題が示された.

注意 10　　$R(\zeta)$ の評価は σ を原点の非正則度とすると

$$|R(\zeta)| \leqq K\exp(L|\zeta|^{\frac{\sigma-1}{\sigma}})$$

まで改良することができる.　（$R(\zeta)^{-1}$ も同様）

例 11　方程式　$((xD)^2 - D)u = 0$　を考える. これを行列を用いてかけば　$\left(xD - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ D & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0.$　（ $D = \frac{d}{dx}$ ）

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = R(D)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_0(2\sqrt{D}) \ , & -I_0(2\sqrt{D})\log D + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k}{k!^2}D^k \\ -\sqrt{D}\,I_1(2\sqrt{D}) \ , & 1 + \sqrt{D}\,I_1(2\sqrt{D})\log D - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi_k}{k!(k+1)!}D^{k+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = R(D)^{-1}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{D}\,I_1(2\sqrt{D})\log D - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi_k}{k!(k+1)!}D^{k+1} \ , & I_0(2\sqrt{D})\log D - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k}{k!^2}D^k \\ \sqrt{D}\,I_1(2\sqrt{D}) \ , & I_0(2\sqrt{D}) \end{pmatrix}$$

によって方程式　$xD\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$　と同値である. ただし

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{2k}}{k!(k+\nu)!}, \quad \varphi_k = 2\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}, \quad \psi_k = \sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}.$$

さて命題の証明において得られた同型 $R(D)$ を $\{(0, e^{i\theta}\zeta_0 dx) \mid 0<\theta\leq 2\pi\}$ に沿って接続してひとまわりしたものを $R^*(D)$ であらわす. $R(D)^{-1}R^*(D) = M$ とおくと $M \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{E}^{\mathbb{R}}}(\tilde{\mathcal{N}}_0^{\mathbb{R}})^m/\sim \;\cong\; GL(m,\mathbb{C})/\sim$. ただし $\tilde{\mathcal{N}}_0 : xDv=0$, $\tilde{\mathcal{N}}_0^{\mathbb{R}} = \mathcal{E}^{\mathbb{R}} \otimes \tilde{\mathcal{N}}_0$, $(\tilde{\mathcal{N}}_0^{\mathbb{R}})^m = \tilde{\mathcal{N}}_0^{\mathbb{R}} \oplus \cdots \oplus \tilde{\mathcal{N}}_0^{\mathbb{R}}$ (m個の直和), またある $W \in GL(m,\mathbb{C})$ があって $WM_1W^{-1} = M_2$ のとき $M_1 \sim M_2$ と定めた. $M = \rho(\mathcal{M})$ とかき $\mathcal{M}$ の monodromy 行列という. (大島 [7], 柏原-大島 [6]) 同値類でわっているので $\rho(\mathcal{M})$ は well defined となる. 命題の系として (佐藤-河合-柏原 [9])

命題 12 はじめの仮定をみたすふたつの擬微分方程式 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ に対し

$$\mathcal{M}_1^{\infty} \simeq \mathcal{M}_2^{\infty} \iff \rho(\mathcal{M}_1) = \rho(\mathcal{M}_2)$$

ただし $\mathcal{M}^{\infty} = \mathcal{E}^{\infty} \underset{\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{M}$.

— 次元 $n>1$ の場合 : 予想 —

次の方程式 $\mathcal{M} : Pu=0$ を $x_0^* = (0; \zeta_0 dx_1)$ $(\zeta_0 \neq 0)$ の近傍で考える. ただし

$$P(x,D) = (x_1D_1)^m - P_0(x',D)(x_1D_1)^{m-1} - \cdots - P_{m-1}(x',D)$$

$$\text{order } P_j \leq j, \quad x' = (x_2,\cdots,x_n), \quad D = (D_1,\cdots,D_n) = \left(\tfrac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\tfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

また $\mathcal{N}_0 : x_1 v = 0$ とおくとき

予想 $\mathcal{E}^{\mathbb{R}} \underset{\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{M} \simeq \mathcal{E}^{\mathbb{R}} \underset{\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{N}_0^m$

References

片岡清臣 [1] 超関数のラドン変換とその応用について, 東京大学修士論文, 1976.

[2] On the theory of Radon transformations of hyper-functions, to appear.

[3] 代数解析セミナー 1978年5月13日 於 東京大学

河合隆裕 [4] On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA 17 (1970), 467-517.

柏原正樹, P. Schapira [5] Problème de Cauchy pour les systèmes microdifférentiels dans le domaine complexe, Inv. Math. 46 (1978), 17-38.

柏原正樹, 大島利雄 [6] Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems, Ann. of Math. 106 (1977), 145-200.

大島利雄 [7] Maximally degenerate な台を持つ擬微分方程式について, 数理研講究録 226 代数解析学とその応用 (1975), 29-38.

渋谷泰隆 [8] 複素領域における線型常微分方程式, 紀伊國屋書店, 1976.

佐藤幹夫, 河合隆裕, 柏原正樹 [9] 超函数論における擬微分方程式論, 数学 25 (1973), 213-238.