数理解析研究所講究録
第 355 巻 1979 年 49-59

無限階擬微分作用素の連続性について

東大　理　大学院　中村　如

§0 記号と序論

この小論では、Ωは$\mathbb{R}^n$の開集合とし、$p_{(\alpha)}^{(\beta)}(x,\xi) = D_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)$
$D_x^\alpha = (-i\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1}\cdots(-i\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$,　$\partial_\xi^\beta = (\frac{\partial}{\partial \xi_1})^{\beta_1}\cdots(\frac{\partial}{\partial \xi_n})^{\beta_n}$ なる記号を用いる。最初にGevrey函数について定義を憶いだそう。$s>1$のときΩにおける class $\{s\}$ (resp. class (s)) のGevrey族の函数とは、無限階連続微分可能であって、任意の compact set Kに対して、あるhとCが存在して(resp. 任意のhに対してCが存在して)次の評価(1)が成立するものをいう。

(1)　　　$\|D^\alpha f\|_{C(K)} \leqq C h^{|\alpha|} |\alpha|!^s$

ここで $\|f\|_{C(K)} = \sup_{x\in K} |f(x)|$ である。

Ω上の class $\{s\}$ (resp class (s)) の Gevrey族の函数を $\mathcal{E}^{\{s\}}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{E}^{(s)}(\Omega)$) とかく。又台が compact な Gevrey族の函数を $\mathcal{D}^{\{s\}}(\Omega)$ (resp $\mathcal{D}^{(s)}(\Omega)$) とかく。

さて、無限階擬微分作用素は Sato-Kawai-Kashiwara [5]

で、擬微分方程式系の構造の解明に用いられ、大きな威力を発揮した。一方 class $\{s\}$ の有限階の擬微分作用素は Boutet de Monvel - P. Kree [2] で論じられた。最近青木貴史氏の修士論文 [1] において、制限付増大度をもつ作用素が非正則度 $\delta>1$ をもつ方程式の構造解明に用いられた。我々が以下考える作用素は Boutet - P. Kree に比較して (i) 無限階であること、また青木氏に比べて (ii) 各 $P_j(x,\xi)$ の x についての正則度が整型から Gevrey 族にまで落ちている点に新しさがある。この小論では、無限階擬微分作用素の定義、形式表象が合成・転置に閉じていること、及び無限階擬微分作用素が $\mathcal{D}^*$ から $\mathcal{E}^*$ への連続線型写像であることを示すことにあります。

なお小松先生には拙い話を聞いていただき、有益な助言と暖かい励ましをいただいたことを感謝します。

§1. 無限階擬微分作用素.

定義1. 形式和 $(p)(x,\xi)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}P_j(x,\xi)$ が class $\{s\}$ (resp. class (s)) の formal symbol であるとは、次の条件をみたすときである。

(i) $P_j(x,\xi)$ は $\mathbb{R}^n\setminus 0$ で ξ について real analytic かつ j 次同次
x について class $\{s\}$ (resp. class (s)) の Gevrey function

(ii) $\forall K\subset\subset\Omega\ \exists h_2>0\ \exists h_3>0\ \forall h_1>0\ \exists C_+\ \exists C_-\quad \forall\alpha\,\forall\beta\,\forall j$

(resp. $\forall K\subset\subset\Omega\ \exists h_1>0\ \forall h_2>0\ \forall h_3>0\ \exists C_+\ \exists C_-\ \forall\alpha\,\forall\beta\,\forall j$)

(2) $j \geqq 0$ で $\| p_{j(\alpha)}^{(\beta)}(\cdot,\xi) \|_{C(K)} \leqq C_+ h_1^{j} h_2^{|\alpha+\beta|} j!^{-s} |\alpha|!^{s} \beta! |\xi|^{j-|\beta|}$

(3) $j < 0$ で $\| p_{j(\alpha)}^{(\beta)}(\cdot,\xi) \|_{C(K)} \leqq C_- h_3^{-j+|\alpha+\beta|} (-j)!^{s} |\alpha|!^{s} \beta! |\xi|^{j-|\beta|}$

Remark 1. $p_+(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x,\xi)$ とおくと $p_+(x,\xi)$ は収束して、$\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$ において x について class $\{s\}$ (resp. class (s)) の Gevrey 族 ξ について real analytic な函数となる。また次の評価をみたす。

$\forall K \subset\subset \Omega \ \exists h_2 > 0 \ \forall h_1 > 0 \ \exists C_+$

(resp. $\forall K \subset\subset \Omega \ \exists h_1 > 0 \ \forall h_2 > 0 \ \exists C_+$)

(4) $\| p_{+(\alpha)}^{(\beta)}(\cdot,\xi) \|_{C(K)} \leqq C_+ h_2^{|\alpha+\beta|} |\alpha|!^{s} \beta! |\xi|^{-|\beta|} \exp s (h_1 |\xi|)^{\frac{1}{s}}$。

定義 2. x について Gevrey, $\mathbb{R}^n \setminus 0$ で ξ について real analytic な函数 $p(x,\xi)$ が無限階擬微分作用素の class $\{s\}$ (resp. class (s)) の symbol であるとは次の条件をみたすこと。

$\exists \ (p)(x,\xi) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_j(x,\xi)$: class $\{s\}$ (resp. class (s)) の formal symbol

s.t. $p_+(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x,\xi)$ 及び $p_-(x,\xi) = p(x,\xi) - p_+(x,\xi)$ とおくと

$$p_-(x,\xi) \sim \sum_{j=-1}^{-\infty} p_j(x,\xi)$$

である。即ち、

(5) $$R_N(x,\xi) = p_-(x,\xi) - \sum_{j=-1}^{-(N-1)} p_j(x,\xi)$$

とおくと $\forall K \subset\subset \Omega \ \exists H \ \exists C \ \forall \alpha \ \forall \beta \ \forall N$

(resp. $\forall K \subset\subset \Omega \ \forall H \ \exists C \ \forall \alpha \ \forall \beta \ \forall N$)

(6) $\| R_{N(\alpha)}^{(\beta)}(\cdot,\xi) \|_{C(K)} \leqq C H^{N+|\alpha+\beta|} N!^{s} |\alpha|!^{s} \beta! |\xi|^{-N-|\beta|}$

定義3. 作用素 P が class $\{S\}$ (resp. class (S)) の無限階擬微分作用素であるとは、class $\{S\}$ (resp. class (S)) の無限階擬微分作用素の symbol $p(x,\xi)$ が存在して

(7) $$Pu(x) = \int e^{ix\cdot\xi} p(x,\xi)\,\hat{u}(\xi)\, đ\xi \qquad \left(đ\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} d\xi\right)$$

と表わされること。

命題1. 形式和 $(p)(x,\xi) = \sum p_j(x,\xi)$, $(q)(x,\xi) = \sum q_j(x,\xi)$ が class $\{S\}$ (resp. class (S)) の formal symbol のとき、形式合成 $(r)(x,\xi)$ 及び形式転置 $({}^tp)(x,\xi)$ も同じ class の formal symbol となる。ここで

$$(r)(x,\xi) = \sum r_m(x,\xi)$$

$$({}^tp)(x,\xi) = \sum {}^tp_m(x,\xi)$$

とおくと

(8) $$r_m(x,\xi) = \sum_{\substack{\gamma \\ j+k-|\gamma|=m}} \frac{1}{\gamma!} p_j^{(\gamma)}(x,\xi)\, q_{k(\gamma)}(x,\xi)$$

(9) $${}^tp_m(x,\xi) = \sum_{\substack{k-|\gamma| \\ =m}} \frac{(-1)^{|\gamma|}}{\gamma!} p_{k(\gamma)}^{(\gamma)}(x,-\xi)$$

とする。

証明) 以下の計算は簡単であるが、めんどうくさい。各 $r_m(x,\xi)$ 及び ${}^tp(x,\xi)$ が収束して評価(2)(3)をみたすことを示すことにある。このとき使う公式は次の式である。

α を実数、$|x|<1$ とするとき

(10) $$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+l-1)}{l!} x^l = (1-x)^{-\alpha}$$

特に $|x|<1$ として

$$(10)' \quad \sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{\ell+n-1}{\ell} x^{\ell} = (1-x)^{-n}$$

さて $r_m(x,\xi)$ については以下のように場合をわける。

Case 1-1 : $m \geqq 0$ $\quad j, k \geqq 0$

Case 1-2 ; $m \geqq 0$ $\quad j, k$ 異符号

Case 2-1 ; $m<0$ $\quad j, k \geqq 0$

Case 2-2 ; $m<0$ $\quad j, k<0$

Case 2-3 ; $m<0$ $\quad j, k$ 異符号

以下 Case i-j 上の和を $\sum\limits_{i-j}$ と略記する。

Case 1-1 $\quad R^{11}{}_{m(\alpha)}^{(\beta)} = \sum\limits_{1-1} \| r_{m(\alpha)}^{(\beta)}(\cdot,\xi)\|_{C(K)}$ とおく。

$$R^{11}{}_{m(\alpha)}^{(\beta)} \leqq \sum_{1-1} \frac{1}{\gamma!}\binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta}{\beta'} C_+(p)\, h_1(p)^j h_2(p)^{|\gamma+\alpha'+\beta'|}\, j!^{1-s}|\alpha'|!^s(\gamma+\beta')!$$

$$\times\, C_+(\xi)\, h_1(\xi)^k h_2(\xi)^{|\gamma+\alpha''+\beta''|}\, k!^{1-s}|\alpha''+\gamma|!^s \beta''!\, |\xi|^{m-|\beta|}$$

$$\leqq C_+(p)C_+(\xi)|\xi|^{m-|\beta|}|\alpha|!^s\beta!\,(h_2(p)+2^s h_2(\xi))^{|\alpha|}(2h_2(p)+h_2(\xi))^{|\beta|}$$

$$\times \sum_{1-1}\frac{1}{\gamma!} h_1(p)^j h_1(\xi)^k j!^{1-s}k!^{1-s}|\gamma|!^s\gamma!\,(2^{s+1}h_2(p)h_2(\xi))^{|\gamma|}$$

$h_1=\max(h_1(p),h_1(\xi))$, $\quad h_2=\max(h_2(p),h_2(\xi))$ かつ最後の和を S_{11} とすると

$$S_{11} \leqq 2^{sm} h_1^m m!^{1-s}\sum_{\ell=0}^{\infty}\binom{\ell+n-1}{\ell}(m+\ell+1)(2^{2s+1}h_1h_2^2)^{\ell}$$

$$\leqq (2^{sm}e h_1)^m m!^{1-s}\sum_{\ell=0}^{\infty}\binom{\ell+n-1}{\ell}(2^{2s+1}e h_1h_2^2)^{\ell}$$

$$\leqq (2^s e h_1)^m m!^{1-s}(1-2^{2s+1}e h_1h_2^2)^{-n}$$

(ここで $1+x\leqq e^x$ を用い、h_1及びh_2を各場合に応じて

$0<2^{2s+1}e h_1 h_2^2<1$ となるように選んだ。)

以上より

$$R_{m\,(\alpha)}^{11\,(\beta)} \leqq C_+(p)\,C_+(\xi)\,|\xi|^{m-|\beta|}\,|\alpha|!^{s}\,\beta!\,((2^s+1)h_2)^{|\alpha|}(3h_2)^{|\beta|}$$

$$\times (2^s e h_1)^m\, m!^{-s}\,(1-2^{2s+1} e h_1 h_2^2)^{-n}.$$

Case 1-2. $j \geqq 0,\ k<0$ の場合のみ考えれば十分であるから、$j\geqq 0, k<0$ の上の和を $\sum_{1\text{-}2}'$ とかくことにしよう。

$$R_{m\,(\alpha)}^{12\,(\beta)} = \sum_{1\text{-}2}' \|r_{m\,(\alpha)}^{(\beta)}(\cdot,\xi)\|_{C(K)}$$ とおく。

$$R_{m\,(\alpha)}^{12\,(\beta)} \leqq \sum_{1\text{-}2}' \frac{1}{\gamma!}\binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta}{\beta'} C_+(p)\,h_1(p)^j\, h_2(p)^{|\gamma+\alpha'+\beta'|}\, j!^{-s}\,|\alpha'|!^{s}$$

$$\times(\gamma+\beta')\; C_-(\xi)\; h_3(\xi)^{-k+|\gamma+\alpha''+\beta''|}(-k)!^{s}\,|\gamma+\alpha''|!^{s}\,\beta''!\,|\xi|^{m-|\beta|}$$

$$\leqq C_+(p)\,C_-(\xi)\,|\xi|^{m-|\beta|}(h_2(p)+2^s h_3(\xi))^{|\alpha|}(2h_2(p)+h_3(\xi))^{|\beta|}|\alpha|!^{s}\beta!$$

$$\times \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{j=m+1+\ell}^{\infty} h_1^{j} h_3^{j-m-\ell}\, j!^{-s}(\ell-k)!^{s}\binom{\ell+n-1}{\ell}(2^{s+1}h_2 h_3)^{\ell}$$

$$\leqq C_+(p)\,C_-(\xi)\,|\xi|^{m-|\beta|}(h_2+2^s h_3)^{|\alpha|}(2h_2+h_3)^{|\beta|}\,|\alpha|!^{s}\beta!$$

$$\times\, m!^{-s}\, h_1^{m+1}\, h_3(1-h_1h_3)^{-1}\,(1-2^{s+1}h_1h_2h_3)^{-n}$$

($h_1=h_1(p)$, $h_2=h_2(p)$, $h_3=h_3(\xi)$ とおいて h_1 もしくは h_2, h_3 を $0<h_1h_3<1$, $0<2^{s+1}h_1h_2h_3<1$ となるように選んだ。)

Case 2-1.

$$R_{m\,(\alpha)}^{21\,(\beta)} \leqq C_+(p)\,C_+(\xi)\,|\xi|^{m-|\beta|}\sum_{2\text{-}1}\frac{1}{\gamma!}\binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta}{\beta'} h_1(p)^j\, h_1(\xi)^k\, h_2(p)^{|\gamma+\alpha'+\beta'|}$$

$$\times\, h_2(\xi)^{|\gamma+\alpha''+\beta''|}\, j!^{-s}\, k!^{-s}\,|\alpha'|!^{s}(\gamma+\beta')!\,|\gamma+\alpha''|!^{s}\,\beta''!$$

$$\leqq C_+(p)\,C_+(\xi)\,|\xi|^{m-|\beta|}((2^s+1)h_2)^{|\alpha|}(3h_2)^{|\beta|}\,|\alpha|!^{s}\beta!$$

$$\times (2^s e h_1)^m\,(-m)!^{s}\,(1-2^{3s+1}e h_1 h_2^2)^{-n}$$

($h_1=\max(h_1(p),h_1(\xi))$, $h_2=\max(h_2(p),h_2(\xi))$ で $0<2^{3s+1}e\,h_1h_2^2<1$ となるように取る。)

Case 2-2.

$$R^{22(\beta)}_{m(\alpha)} \leqq C_-(p)\,C_-(\xi)\,|\xi|^{m-|\beta|} \sum \frac{1}{\gamma!}\binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta}{\beta'} h_3(p)^{j+|\gamma+\alpha'+\beta'|}\, h_3(\xi)^{-k+|\gamma+\alpha''+\beta''|}$$

$$\times (-j)!^s(-k)!^s|\alpha'|!^s(\gamma+\beta')!\,|\gamma+\alpha''|!^s\beta''!$$

$$\leqq C_-(p)\,C_-(\xi)\,|\xi|^{m-|\beta|}((2^s+1)h_3)^{|\alpha|}(3h_3)^{|\beta|}|\alpha|!^s\beta!\, h_3^{-m}(-m)!^s$$

$$\times \sum_{l=0}^{-m-1}(-m-1-l)\binom{l+n-1}{l}(2^{s+1}h_3)^l$$

$$\leqq C_-(p)\,C_-(\xi)\,|\xi|^{m-|\beta|}((2^s+1)h_3)^{|\alpha|}(3h_3)^{|\beta|}|\alpha|!^s\beta!\,(eh_3)^{-m}(-m)!^s$$

$$\times |\alpha|!^s\beta!\,(1+n2^{s+1}e^{-1}h_3)^{-m-1}$$

($h_3 = \max(h_3(p), h_3(\xi))$ とおいた。)

Case 2-3　$j\geqq 0,\ k<0$ のみ考え、和を $\sum'_{2-3}$ で表す。

$$R^{23(\beta)}_{m(\alpha)} \leqq C_+(p)\,C_-(\xi)\,|\xi|^{m-|\beta|}\sum_{2-3}{}'\frac{1}{\gamma!}\binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta}{\beta'}h_1(p)^j\, h_2(p)^{|\gamma+\alpha'+\beta'|}\, j!^{-s}$$

$$\times|\alpha'|!^s(\gamma+\beta')!\, h_3(\xi)^{-k+|\gamma+\alpha''+\beta''|}(-k)!^s|\gamma+\alpha''|!^s\beta''!$$

$$\leqq C_+(p)\,C_-(\xi)\,|\xi|^{m-|\beta|}|\alpha|!^s\beta!\,(h_2+2^sh_3)^{|\alpha|}(2h_2+h_3)^{|\beta|}$$

$$\times\Big[\sum_{l=0}^{-m-1}\sum_{j=0}^{\infty} h_1^j h_3^{-k} j!^{-s}(-k)!^s\, l!^s(2^{s+1}h_2h_3)^l\binom{l+n-1}{l} +$$

$$\sum_{l=-m}^{\infty}\sum_{j=m+l+1}^{\infty} h_1^j h_3^{-k} j!^{-s}(-k)!^s\, l!^s (2^{s+1}h_2h_3)^l\binom{l+n-1}{l}\Big]$$

$$\leqq C_+(p)\,C_-(\xi)\,|\xi|^{m-|\beta|}|\alpha|!^s\beta!\,(h_2+2^sh_3)^{|\alpha|}(2h_2+h_3)^{|\beta|}$$

$$\times\Big[2^{-sm}h_3^{-m}(-m)!^s(1-2^sh_1h_3)^{-1}(1+n2^{s+1}h_2)^{-m-1}+2^sh_1^{m+1}h_3(-m)!^s$$

$$\times(1-2^sh_1h_3)^{-1}(1-2^{2s+1}h_1h_2h_3)^{-1}\Big]$$

($h_1=h_1(p)$, $h_2=h_2(p)$, $h_3=h_3(\xi)$ とおき、h_1, h_2, h_3 を $0<h_1h_3<1$, $0<2^{2s+1}h_1h_2h_3<1$ となるように選んだ。)

形式転置についても同様であるので，省略する。

定理1. $p_+(x,\xi)$ を symbol とする無限階擬微分作用素 P_+ は $\mathcal{D}^{\{s\}}$ から $\mathcal{E}^{\{s\}}$ (resp. $\mathcal{D}^{(s)}$ から $\mathcal{E}^{(s)}$) への連続作用素である。

証明) $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$ ($*=\{s\}$ or (s)) の Fourier 像についての次の結果を用いる。

補題1. (Paley-Wiener, See Komatsu [3]) K を $\mathbb{R}^n$ の凸コンパクト集合とする。$\mathbb{C}^n$ 上の entire function $\hat{\varphi}(\xi)$ がある $\varphi\in\mathcal{D}^*_K$ の Fourier-Laplace 変換であるための必要十分条件は

$*=\{s\}$ のとき $\exists L\ \exists C$

($*=(s)$ のとき $\forall L>0\ \exists C$)

$$|\hat{\varphi}(\xi)|\le C\exp\left(-(L|\xi|)^{\frac{1}{s}}+H_K(\xi)\right)$$

をみたすことである。

補題1 及び Remark 1. の評価(4)より $(P_+u)(x)\in\mathcal{E}(\Omega)$ は明らかである。Leibnitz's rule より

$$D_x^\alpha(P_+u)(x)=\sum_{\alpha'\le\alpha}\binom{\alpha}{\alpha'}\int e^{ix\xi}\xi^{\alpha'}D_x^{\alpha-\alpha'}p_+(x,\xi)\,\hat{u}(\xi)\,d\xi$$

$K\subset\subset\Omega$ として極座標に変換すると

$$\|D_x^\alpha(P_+u)(\cdot)\|_{C(K)}\leqq\sum_{\alpha'+\alpha''=\alpha}\binom{\alpha}{\alpha'}C_+C\,h_2^{|\alpha''|}|\alpha''|!^s\,\pi_n$$
$$\times\int_0^\infty\rho^{|\alpha'|+n-1}\exp\left[s(h_1\rho)^{\frac{1}{s}}-(L\rho)^{\frac{1}{s}}\right]d\rho$$

(ここで $\pi_n=\dfrac{1}{2^{n-1}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}$ とする。)

$\rho^{\frac{1}{s}} = t$, $K^{\frac{1}{s}} = L^{\frac{1}{s}} - s h_1^{\frac{1}{s}} > 0$ で変数 t と定数 K を導入する。

$$\| D_x^\alpha (P_+ u)(\cdot) \|_{C(\kappa)} \leqq C + C \pi_n s \sum \binom{\alpha}{\alpha'} h_2^{|\alpha''|} |\alpha''|!^s \int_0^\infty t^{s(|\alpha'|+n)-1} \exp(-Kt) dt$$

$$\leqq C + C s \pi_n \left(\frac{1}{K}\right)^{sn} \sum \binom{\alpha}{\alpha'} \left(\frac{1}{K}\right)^{s|\alpha'|} h_2^{|\alpha''|} \Gamma(s(|\alpha'|+n)) |\alpha''|!^s$$

ここで Gauss - Legendre の公式

$$\Gamma(pz) = \frac{p^{pz-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}} \prod_{k=0}^{p-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{p}\right) \qquad (p\,;\text{正整数})$$

及び Stirling の公式

$$\sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \leqq \Gamma(x+1) \leqq \sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\frac{1}{12x}}$$

を用いてガンマ函数を評価する。最終的に

$$\| D_x^\alpha (P_+ u)(\cdot) \|_{C(\kappa)} \leqq C + C s \pi_n \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s-1}{2}}} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{s+1}{2}} \times \left[\frac{\Gamma(s+1)}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2e}{K}\right)^s \right]^n n!$$

$$\times \left(\frac{\Gamma(s+1)}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2e}{K}\right)^s + h_2 \right)^{|\alpha|} |\alpha|!^s$$

となる。これは $P_+ u$ が Gevrey 函数であり、u の norm は C の中に含まれるから、P_+ が $\mathcal{D}^*$ から $\mathcal{E}^*$ への連続作用素であることがわかった。

命題 2．P が null formal symbol をもつ擬微分作用素とすると、P は $\mathcal{E}^{\{s\}'}(\Omega)$ から $\mathcal{E}^{\{s\}}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{E}^{(s)'}(\Omega)$ から $\mathcal{E}^{(s)}(\Omega)$) への連続作用素となる。

この証明には次の補題を用いる。

補題2.(Paley-Wiener. See Komatsu [4].)

Kを$\mathbb{R}^n$の凸コンパクト集合とする。$\mathbb{C}^n$上の整型函数$\hat{f}(\zeta)$について、次の2つの条件は同値である。

(i) $\hat{f}(\zeta)$は$f \in \mathcal{D}_K^{\{s\}'}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $f \in \mathcal{D}_K^{(s)'}(\mathbb{R}^n)$) の Fourier-Laplace 変換である。

(ii) $\forall L>0 \ \exists C$ (resp. $\exists L \ \exists C$)

$$|\hat{f}(\zeta)| \leq C \exp\left((L|\zeta|)^{\frac{1}{s}} + H_K(\zeta)\right) \quad \text{for } \zeta \in \mathbb{C}^n$$

命題2の証明) Pは null formal symbol をもつから、$P_+ \equiv 0$, またP_-については次の評価がいえる。

$$\forall K \subset\subset \Omega \quad \exists h_3 \quad \exists C_\bullet \qquad (\forall K \subset\subset \Omega \quad \forall h_3 \quad \exists C_\bullet)$$

$$\| P_{-(\alpha)}^{(\beta)}(\cdot, \xi) \|_{C(K)} \leq C\, h_3^{|\alpha+\beta|} |\alpha|!^s \beta! \, |\xi|^{-|\beta|} \inf_N N! (h_3/|\xi|)^N$$

ここで $\forall\, 0<B<s \quad \exists A$

$$\sup_p \frac{|\xi|^p}{p!^s} \geq A \exp(B|\xi|^{\frac{1}{s}}) \qquad \mathrm{Re}\,\xi \geq 0$$

であるから

$$\| P_{-(\alpha)}^{(\beta)}(\cdot, \xi) \|_{C(K)} \leq C' h_3^{|\alpha+\beta|} |\alpha|!^s \beta! \, |\xi|^{-|\beta|} \exp\left(-B\left(\frac{|\xi|}{h_3}\right)^{\frac{1}{s}}\right)$$

一方 $u \in \mathcal{E}^{*\prime}(\mathbb{R}^n)$ より 補題2より

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C \exp(L|\xi|)^{\frac{1}{s}} \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$$

がいえるから、P_-をuに作用させるには $L^{\frac{1}{s}} - B\left(\frac{1}{h_3}\right)^{\frac{1}{s}} < 0$ であるようにLとh_3を調節すればよい。この時定理1の証明と同様にして、連続であることがいえる。

References

[1] 青木貴史　東大修士論文

[2] Boutet de Monvel - P. Krée　Pseudo-differential operators and Gevrey classes, Ann. Inst. Fourier, Grenoble vol 17, 1 ('67) 295-323

[3] H Komatsu　Ultradistributions, I. Structure theorems and a characterization, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, vol 20, no 1, ('73), 25-105

[4] H. Komatsu　Ultradistributions, II. The kernel theorem and ultradistributions with support in a submanifold J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec IA, vol 24, no 3 ('77) 607-628

[5] M. Sato - T. Kawai - M. Kashiwara　Microfunctions and pseudo-differential equations, Lecture notes in Math. no. 287, Springer ('73)