数理解析研究所講究録
第 355 巻 1979 年 60-71

Ultradistribution に対する正則化核

東大 理　小松彦三郎

中村如君の論文に関連して，コンパクト台の ultradistribution の空間 $\mathcal{E}^{*\prime}(\Omega_y)$ を超可微分函数の空間 $\mathcal{E}^*(\Omega_x)$ にうつす連続線型作用素は $\mathcal{E}^*(\Omega_x\times\Omega_y)$ の元を核とする積分作用素になることを示そう.

L. Schwartz は有名な核定理の証明を発表した最初の論文 [3] の中で類似の結果である正則化作用素の特徴づけ $L(\mathcal{E}'(\Omega_y),\mathcal{E}(\Omega_x))\cong\mathcal{E}(\Omega_x\times\Omega_y)$ を与えている. われわれの証明も本質的に Schwartz のものと同じである. 彼は更に $L(\mathcal{D}(\Omega_y),\mathcal{E}(\Omega_x))$ および $L(\mathcal{E}'(\Omega_y),\mathcal{D}'(\Omega_x))$ の半正則核による特徴づけを与えているが，これに相当することも成立することを示す. 核定理そのものの ultradistribution 版 $L(\mathcal{D}^*(\Omega_y),\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega_x))\cong\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega_x\times\Omega_y)$ は既に [2] で証明した.

以下 M_p は次の条件をみたす正数列とする:

(M.0) $\qquad M_0 = M_1 = 1$;

(M.1) $\qquad M_p^2 \leq M_{p-1} M_{p+1}, \ p = 1, 2, \cdots$;

(M.2) 定数 A, H が存在し

$$\frac{M_{p+q}}{M_p M_q} \leq A H^{p+q}, \ p, q = 0, 1, 2, \cdots;$$

(M.3)′ $$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{M_p} < \infty .$$

Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合とするとき，Ω 上の函数 f が $\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega)$ $(\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega))$ に属するとは，任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$, $h > 0$ に対して定数 C が存在し（定数 h, C が存在し）

(1) $$\sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \leq C h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}, \ |\alpha| = 0, 1, 2, \cdots,$$

となることであると定義する．$*$ でもって (M_p) または $\{M_p\}$ を表わすこととし，$\mathcal{E}^*(\Omega)$ の元を $*$ 族の超可微分函数という．$\mathcal{E}^*(\Omega)$ のうちコンパクトな台をもつ元全体の線型部分空間を $\mathcal{D}^*(\Omega)$ と書く．

$\mathcal{D}^*(\Omega)$, $\mathcal{E}^*(\Omega)$ には自然な局所凸位相が入り完備かつ反射的な Grothendieck 空間（＝核型空間）になる．$\mathcal{D}^*(\Omega)$ の双対空間 $\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega)$ の元を $*$ 族の ultradistribution という．Ultradistribution に対しても distribution

と同様に台が定義され，$\mathcal{E}^*(\Omega)$ の双対空間 $\mathcal{E}^{*\prime}(\Omega)$ はコンパクト台の ultradistribution 全体の線型空間と同一視することができる．$\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega)$，$\mathcal{E}^{*\prime}(\Omega)$ には強位相，すなわち有界集合上の一様収束位相を与える．このとき，これらもまた完備かつ反射的な grothendieck 空間になる．以上については [1]，[2] を見られたい．

$\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega)$ の位相はコンパクト集合 $K \subset \Omega$ および $h > 0$ を動かして得られる半ノルム

$$(2) \qquad p_{K,h}(f) = \sup_{\substack{x \in K \\ \alpha}} \frac{|D^\alpha f(x)|}{h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}$$

の族によって定まる局所凸位相である．

$\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ の局所凸位相は，本来，(1) の評価をもつ K 上の函数 f からなる Banach 空間の $h \nearrow \infty$ のときの帰納極限をとり，次いで $K \nearrow \Omega$ のときの射影極限として定義されるのであるが，[1] で証明した ultradistribution の第一構造定理を用いれば，コンパクト集合 $K \subset \Omega$ および $0 < h_p \nearrow \infty$ となる列を任意にとって，$H_p = h_1 h_2 \cdots h_p$ とし

$$(3) \qquad p_{K,H}(f) = \sup_{\substack{x \in K \\ \alpha}} \frac{|D^\alpha f(x)|}{H_{|\alpha|} M_{|\alpha|}}$$

で定義される半ノルム全体で定まる局所凸位相と一致するこ

とがわかる．また，このような半ノルムが全部有限になることが f が $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ に属するための必要十分条件である．

Ω_x, Ω_y をそれぞれ R^m, R^n の開集合とし，それぞれの点を x, y と表わす．[2] の核定理により連続線型作用素 $T: \mathcal{D}^*(\Omega_y) \to \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega_x)$ は核 $N \in \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega_x \times \Omega_y)$ を用いて一意的に

$$(4) \qquad Tf(x) = \int_{\Omega_y} N(x, y) f(y)\, dy$$

と表わされる．E, F が局所凸空間であるとき，$L_\beta(E, F)$ でもって，有界集合上一様収束の位相をもつ連続線型作用素 $T: E \to F$ 全体の線型空間を表わすことにする．このとき上の対応は位相をこめた同型

$$(5) \qquad L_\beta(\mathcal{D}^*(\Omega_y), \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega_x)) \cong \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega_x \times \Omega_y)$$

である．

<u>定理 1.</u> 上の対応の下で位相もこめて

$$(6) \qquad L_\beta(\mathcal{E}^{*\prime}(\Omega_y), \mathcal{E}^*(\Omega_x)) \cong \mathcal{E}^*(\Omega_x \times \Omega_y).$$

<u>証明.</u> $\mathcal{E}^{*\prime}(\Omega_y)$ は完備かつ樽型，$\mathcal{E}^*(\Omega_y) = (\mathcal{E}^{*\prime}(\Omega_y))'$ は完備 Grothendieck 空間かつ $\mathcal{E}^*(\Omega_x)$ は完備ゆえ，[4] Proposition 50.5 により

$$L_\beta(\mathcal{E}^{*\prime}(\Omega_y), \mathcal{E}^*(\Omega_x)) \cong \mathcal{E}^*(\Omega_y)\hat{\otimes}\mathcal{E}^*(\Omega_x).$$

一方，[2] Theorem 2. 1 により右辺は $\mathcal{E}^*(\Omega_x \times \Omega_y)$ と同型である．（研究集会のときは $\mathcal{E}^{*\prime}(\Omega)$ の構造を用いた違った証明を与えた．）□

同様に次の同型が得られる：

(7) $$L_\beta(\mathcal{D}^*(\Omega_y), \mathcal{E}^*(\Omega_x)) \cong \mathcal{E}^*(\Omega_x)\hat{\otimes}\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega_y),$$

(8) $$L_\beta(\mathcal{E}^{*\prime}(\Omega_y), \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega_x)) \cong \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega_x)\hat{\otimes}\mathcal{E}^*(\Omega_y).$$

この右辺をわかりやすくするため，Schwartz [3] にならって局所凸空間値の超可微分函数の空間を考える．

F を局所凸空間，$\Omega \subset R^n$ を開集合とする．このとき F に値をもつ Ω 上の (M_p) 族 $(\{M_p\}$ 族$)$ の超可微分函数の定義として次の二つが考えられる．

$f : \Omega \to F$ が $\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega, F)$ $(\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega, F))$ に属するとは，f が F の位相に関し Ω 上無限回可微分，かつ F 上の任意の連続半ノルム q，任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$，$h > 0$ に対して定数 C が存在し（定数 h，C が存在し）

(9) $$\sup_{x \in K} q(D^\alpha f(x)) \le C h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}, \quad |\alpha| = 0, 1, \cdots,$$

となることと定義する．これはそれぞれ

(10) $$q_{K,h}(f) = \sup_{\substack{x\in K\\ \alpha}} q\left(\frac{D^\alpha f(x)}{h^{|\alpha|}M_{|\alpha|}}\right) < \infty,$$

(11) $$q_{K,H}(f) = \sup_{\substack{x\in K\\ \alpha}} q\left(\frac{D^\alpha f(x)}{H_{|\alpha|}M_{|\alpha|}}\right) < \infty$$

と同等である．但し H_p は $0 < h_p \nearrow \infty$ となる任意の列を用いて $H_p = h_1 \cdots h_p$ と定義される数列である．

また，$f \in \tilde{\mathcal{E}}^*(\Omega, F)$ とは，任意の $e' \in F'$ に対して $\langle f(x), e'\rangle$ が $\mathcal{E}^*(\Omega)$ に属することであると定義する．

明らかに $\mathcal{E}^*(\Omega, F) \subset \tilde{\mathcal{E}}^*(\Omega, F)$ がなりたつ．

命題 1. F が列的完備ならば，

(12) $$\mathcal{E}^*(\Omega, F) = \tilde{\mathcal{E}}^*(\Omega, F).$$

証明. $f \in \tilde{\mathcal{E}}^*(\Omega, F)$ とする．Grothendieck の補題 [3] Appendice Lemme II により f は F の位相に関して無限回連続可微分である．

$* = (M_p)$ のとき，任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ と $h > 0$ に対して

(13) $$\{D^\alpha f(x)/(h^{|\alpha|}M_{|\alpha|}) : x \in K, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}$$

は F の有界集合となる．実際，任意の $e' \in F'$ に対し

(14) $\langle D^\alpha f(x), e' \rangle = D^\alpha \langle f(x), e' \rangle$

ゆえ，(13) の集合は弱有界である．したがって Mackey の定理により有界となる．これより (10) が成立することがわかる．

$* = \{M_p\}$ のときも，上と同様，任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ と列 $0 < h_p \nearrow \infty$ に対し

(15) $\{ D^\alpha f(x) / (H_{|\alpha|} M_{|\alpha|}) ; x \in K, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \}$

が有界になることがわかる．したがって，(11) が成立する．

<u>命題2.</u> $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, F)$ のとき，任意の同程度連続集合 $E \subset F'$ に対し

(16) $\{ \langle f(x), e' \rangle ; e' \in E \}$

は $\mathcal{E}^*(\Omega)$ の相対コンパクト集合である．

<u>証明.</u> (13), (15) の有界性および (14) を用いれば，(16) は $\mathcal{E}^*(\Omega)$ で有界であることがわかる．$\mathcal{E}^*(\Omega)$ は Grothendieck 空間であるから，有界集合は相対コンパクトである．□

特に，F 上の連続半ノルム q を用いて $\|e'\|_q = \sup$

$\{|\langle e, e'\rangle| \,;\, q(e) \leqq 1\} \leq 1$ となる $e' \in F'$ 全体の集合を E とすれば，同様にして

(17) $$q_{K,h}(f) = \sup_{\|e'\|_q \leqq 1} p_{K,h}(\langle f, e'\rangle),$$

(18) $$q_{K,H}(f) = \sup_{\|e'\|_q \leqq 1} p_{K,H}(\langle f, e'\rangle)$$

となることがわかる．

$\mathcal{E}^*(\Omega, F)$ にはこれらの半ノルム全体で定義される局所凸位相を入れる．

<u>命題3</u>．F が準完備ならば，$\mathcal{E}^*(\Omega, F)$ は準完備であり，F が完備ならば $\mathcal{E}^*(\Omega, F)$ も完備である．

<u>証明</u>．F を（準）完備，f_ν を $\mathcal{E}^*(\Omega, F)$ における（有界な）Cauchy 有向族とする．このとき，各 $x \in \Omega$ に対して $D^\alpha f_\nu(x)$ は F における（有界な）Cauchy 有向族をなし，ある $f^{(\alpha)}(x) \in F$ に収束する．この収束は各コンパクト集合上一様であるから $f(x) = f^{(0)}(x)$ は Ω 上無限回可微分，かつ $D^\alpha f(x) = f^{(\alpha)}(x)$ となることがわかる．

$* = (M_p)$ のとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対し ν_0 を十分大にすれば $\nu, \mu \geqq \nu_0$ に対し

$$q_{K,h}(f_\nu - f_\mu) = \sup_{\substack{x\in K\\ \alpha}} q\left(\frac{D^\alpha f_\nu(x) - D^\alpha f_\mu(x)}{h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}\right) \leqq \varepsilon$$

がなりたつ．ここで $\mu \to \infty$ とすれば $q_{K,h}(f_\nu - f)$ $\leqq \varepsilon$ がわかる：すなわち f_ν は f に収束する．

$* = \{M_p\}$ のときも同様である．∎

$\varphi \in \mathcal{E}^*(\Omega)$，$e \in F$ のとき，積 $\varphi(x)e$ は $\mathcal{E}^*(\Omega, F)$ に属する．これによりテンソル積の元 $\sum_{i=1}^m \varphi_i \otimes e_i \in \mathcal{E}^*(\Omega) \otimes F$ に $\sum_{i=1}^m \varphi_i(x) e_i \in \mathcal{E}^*(\Omega, F)$ を対応させる線型写像 $\mathcal{E}^*(\Omega)\otimes F \to \mathcal{E}^*(\Omega, F)$ が定まる．容易に示されるようにこの写像は単射であるから，これによって $\mathcal{E}^*(\Omega)\otimes F \subset \mathcal{E}^*(\Omega, F)$ とみなす．(17)，(18) は，このとき $\mathcal{E}^*(\Omega)\otimes F$ にひきおこされる局所凸位相が Grothendieck の ε 位相と一致することを示している．

<u>定理 2.</u> F が準完備ならば，$\mathcal{E}^*(\Omega, F)$ は $\mathcal{E}^*(\Omega)\otimes_\varepsilon F$ の準完備化 $\mathcal{E}^*(\Omega)\hat{\otimes} F$ と同型であり，F が完備ならば，$\mathcal{E}^*(\Omega, F)$ は完備化 $\mathcal{E}^*(\Omega)\hat{\otimes} F$ と同型である．

<u>証明.</u> $\mathcal{E}^*(\Omega)\otimes F$ が $\mathcal{E}^*(\Omega, F)$ の中で有界的に稠密であることのみを証明すればよい．これは Schwartz [3] Proposition 10 と同様に証明できる．すなわち，$f \in \mathcal{E}^*(\Omega, F)$，$q_* = q_{K,h}$ または $q_{K,H}$，および $\varepsilon > 0$ が任意にあたえられたとする．$q_*(f)$ は f の K

の近傍での振舞いのみによって定まるから，K の近傍で 1 に等しい $\chi \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ をとり，$f_0(x) = \chi(x) f(x)$ とすれば，f_0 は $\Omega_\delta \subset\subset \Omega$ の中にコンパクト台をもつ $\mathcal{E}^*(\Omega, F)$ の元であって $q_*(f - f_0) = 0$ となる．

[1] Theorem 6.10 の証明と同様に $f_0 \in \mathcal{E}^*(\Omega, F)$ は平行移動に関して連続であることが示される．したがって，十分 0 に近いコンパクト台をもつ $j \in \mathcal{D}^*(R^n)$ による正則化

$$(19) \qquad j * f_0(x) = \int j(x-y) f_0(y)\,dy$$

をとれば，$q_*(f_0 - j * f_0) \leqq \varepsilon/2$ がなりたつ．

正則化作用素 $j*$ は $C_c(\Omega_\delta, F)$ から $\mathcal{E}^*(\Omega, F)$ への連続線型作用素であるから，f_0 を 1 の分解を用いて $f_1 \in C_c(\Omega_\delta) \otimes F$ で近似すれば，$q_*(j * f_0 - j * f_1) \leqq \varepsilon/2$ とすることができる．$j*$ は $C_c(\Omega_\delta) \otimes F$ を $\mathcal{E}^*(\Omega) \otimes F$ にうつす写像でもあるから，$j * f_1 \in \mathcal{E}^*(\Omega) \otimes F$ かつ $q_*(f - j * f_1) \leqq \varepsilon$ となる．

以上の証明で用いた近似は，q_* および ε に関係なく f のみによって定まる有界集合に属する元による近似となるから，$\mathcal{E}^*(\Omega) \otimes F$ は $\mathcal{E}^*(\Omega, F)$ において有界的に稠密である．□

したがって，(7)，(8) と合せて次の定理が得られる．

定理 3 (4) の対応の下で，位相もこめて次の同型がなりたつ：

$$(20)\qquad L_\beta(\mathcal{D}^*(\Omega_y), \mathcal{E}^*(\Omega_x)) \cong \mathcal{E}^*(\Omega_x)\hat{\otimes}\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega_y) \cong \mathcal{E}^*(\Omega_x, \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega_y));$$

$$(21)\qquad L_\beta(\mathcal{E}^{*\prime}(\Omega_y), \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega_x)) \cong \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega_x)\hat{\otimes}\mathcal{E}^*(\Omega_y) \cong \mathcal{E}^*(\Omega_y, \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega_x)).$$

参考文献

[1] H. Komatsu, Ultradistributions, I, Structure theorems and a characterization, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, 20 (1973), 25-105.

[2] H. Komatsu, Ultradistributions, II, The kernel theorem and ultradistributions with support in a submanifold, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, 24 (1977), 607-628.

[3] L. Schwartz, Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles,

J. Anal. Math., 4 (1954-55), 88-148.

[4] F. Treves, Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels, Academic Press, New York-London, 1967.