数理解析研究所講究録
第355巻 1979年 125-129

解層係数のラドン変換と正則性伝播

東大理　片岡清臣

光の回折現象の数学的モデルである佐藤の作用素 $P(x,D)=D_1^2-(x_1-x_2)D_3^2$ （境界は $x_1=+0$）は、解析すべき場所 $\{x_1=x_2=0\}$ が、楕円型と双曲型の境界に位置する為従来の境界値問題での数学的手法がそのままでは使えない。ところがこの作用素の特殊性，すなわち $x_1-x_2>0$ で x_1 について双曲型であるという事実を使うと，P の超局所解について，$x_1>0$ から正則性が境界まで伝播する事が証明できる．

記号．$M=\mathbb{R}^n\ni(x_1,x')$．$N=\{x\in M\,;\,x_1=0\}$．$M_+=\{x\in M\mid x_1\geq 0\}$．
$\mathring{\mathcal{B}}_{N|M_+}$，$\mathring{C}_{N|M_+}$ は $x_1=+0$ でマイルドな超関数のなす層．$\mathring{C}_{N|M_+}$ はそれの cotangential な分解．すなわち，

$$0\longrightarrow \mathcal{A}_M|_N\longrightarrow \mathring{\mathcal{B}}_{N|M_+}\longrightarrow \pi_{N*}\mathring{C}_{N|M_+}\longrightarrow 0\quad 完全。$$

$\mathring{\mathcal{B}}_{N|M_+}$ は $\mathcal{B}_{N|M_+}=\mathcal{H}^0_{M_+}(\mathcal{B}_M)/\mathcal{H}^0_N(\mathcal{B}_M)|_N$ の soft な部分層であり，
$\mathring{C}_{N|M_+}$ も soft。

<u>定義</u>　$P(x,D)\in\mathcal{E}_X|_{p_0}$.　$p_0=(0,x'_0;it_0,i\eta'_0)\in N\underset{M}{\times}iS^*M$ が $N_\pm$-regular とは. $u(x)\in C_{M\pm|X}\cap\mathcal{H}^0_{N\underset{M}{\times}iS^*M}(C_M)|_{p_0}$ が. $P(x,D)u(x)\in C_{N|X}|_{p_0}$（すなわち±側からの超局所実解析解ととれる.）をみたせば. $u(x)\in C_{N|X}|_{p_0}$ が従う.

（注意：P. Schapira による N-regular は N_+ かつ N_--regular と同値となる.）

つまり簡単に云えば点 p_0 において±側から micro analyticity が境界まで伝播するという事。以下 N_+-regular の例をあげる。

<u>例 1.</u>　$P(x,D)$;　$\sigma(P)(x;\zeta_1,i\eta')=0$ の ζ_1 についてのすべての根の実部が；$(x;i\eta')$ を $\{\varepsilon\geq x_1\geq 0,\ |x'-x'_0|\leq\varepsilon,\ |\eta'-\eta'_0|\leq\varepsilon\}$ 上を動かす時正又は 0 となる。（$P=D_1^2-x_1^kD_2^2$ etc.）

<u>例 2.</u>（P. Schapira）　$p_0=(0;idx_n)$ とする. $L=\{\eta_1=\cdots=\eta_{n-1}=0\}$ に関する $P(x,D)$ の micro principal symbol が $\{x_1=0\}$ に関して非特性ならば. P は p_0 で N-regular。

但し. $L=\{\eta_1=\cdots=\eta_d=0\}$ $(1\leq d\leq n-1)$ に関する $P=P(\overbrace{x}^{d},\overbrace{x'}^{n-d},D_x,D_{x'})\in\mathcal{E}_X|_L$ の micro principal symbol とは. P の主シンボル：

$\sigma_m(P)=\sum_{j=j_0}^{\infty}a_j(x,x',\eta,\eta')$（$a_j$ は $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_d)$ について j 次同次. $\eta'=(\eta_{d+1},\dots,\eta_n)$ について m−j 次同次）：とした時 η についての最低次同次部分 $a_{j_0}(x,x',\eta,\eta')$ の事である。

（$P=D_1^2\pm D_2^2\pm\cdots\pm D_k^2$, $P=D_1^2+D_2^3D_n^{-1}$, $P=D_1+iD_2$, etc）。

ここで表題の解層係数のラドン変換とは、$P(x,D)$ を R^n での微分作用素、$F\subset R^n$ を 0 を中心とする閉凸錐とするとき $\{x\in R^n;\ |x|<R\}\setminus F$ での $P(x,D)$ の解 $u(x)$ を次の様にとらえ直す事である。すなわち、（F^0 は F の dual cone）

$$M=\{(x,\xi)\in R^n\times S^{n-1};\ |x|<R,\ \xi\in S^{n-1}\setminus F^0\}$$

$$N=\{(x,\xi)\in M\ ;\ \langle x,\xi\rangle=0\}$$

$$M_+=\{(x,\xi)\in M\ ;\ \langle x,\xi\rangle\geq 0\}$$

とおくとき、$u(x)$ を (x,ξ) の関数 $u(x,\xi)$ であって、

$$\begin{cases} P(x,D_x)\,u(x,\xi)=0 \\ d_\xi\,u(x,\xi)=0 \end{cases}\qquad \mathrm{int}\,M_+$$

をみたすものととらえる。この様にすると、適当な場合（$\langle x,\xi\rangle=0$ が $P(x,D_x)$ に関し非特性）には問題を余次元 1 の境界値問題と見直す事ができる。

これを、$P(x,D)=D_1^2-(x_1-x_2)A(x,D')+\text{lower order}$ の形の作用素に適用する。但し、$A(x,D')$ は 2 階の実微分作用素で、$x=0$ の近傍で $\sigma_2(A)(x,\xi')$ は非負とする。（e.x. $P=D_1^2-(x_1-x_2)D_3^2$. etc.）

例えば $u(x)$ を $\{x_1>0,\ |x|<R\}$ での P の解とすると、P が $x_1-x_2>0$ で双曲型であり、またその伝播速度が $x_1=x_2=0$ の付近ではいくらでも小さくできる事から、$u(x)$ は $\{x_1-x_2>0,\ |x|<\varepsilon\}$ へ解として伸ばせる。つまり $u(x)$ は $\bigcup_{t\in(0,1)}\{x\in R^n;\ x_1-tx_2>0,\ |x|<\varepsilon\}$ における解としてよい。

そこで $M'=\{(x,t)\in M\times(0,1)\}$, $M'_+=\{(x,t)\in M'\ ;\ x_1-tx_2\geq 0\}$.
$N'=\{x_1-tx_2=0\}$, $\hat{u}=\hat{u}(x,t)$ とおくと.

$$\begin{cases} (D_{x_1}{}^2-(x_1-x_2)A(x,D_{x'}))\hat{u}(x,t)=0 \\ D_t\hat{u}(x,t)=0 \end{cases} \quad \text{int } M'_+$$

が得られる。ここでもちろん $\hat{u}(x,+0)=u(x)$ である.

$y_1=x_1-tx_2$, $y'=x'$, $t=t$ と変数変換すると.

$$\begin{cases} \{D_{y_1}{}^2-(y_1-(1-t)y_2)A(y_1+ty_2,y';D_{y_2}-tD_{y_1},D_{y''})\}\hat{u}=0 \\ (D_t-y_2D_{y_1})\hat{u}=0 \end{cases} \quad y_1>0$$

となる. そこで $u_0(y',t)=\hat{u}(+0,y',t)$, $u_1(y',t)=\frac{\partial\hat{u}}{\partial y_1}(+0,y',t)$
とおいてやるとこれら2つの境界値は non trivial な擬微分方程式をみたす. 実際. 第一式は.

$$\left(D_{y_1}{}^2+(y_1-(1-t)y_2)\left(B(y,t,D_{y'},D_t)D_{y_1}+C(y,t,D_{y'},D_t)\right)\right)\hat{u}=0$$

と変形できる。 (B は1階. C は2階)

$$(D_t{}^2-y_2{}^2D_{y_1}{}^2)\hat{u}=0 \quad \text{と合わせて}$$

$$\{D_t{}^2+y_2{}^2(y_1-(1-t)y_2)(B\cdot D_{y_1}+C)\}\hat{u}=0. \quad \text{Trace をとれば}$$

$$D_t{}^2u_0-(1-t)y_2{}^3\,(B_0u_1+C_0u_0)=0.$$

$$\left(B_0=B|_{y_1=0},\quad C_0=C|_{y_1=0}\right)$$

よって連立方程式

$$\begin{cases} D_tu_0-y_2u_1=0 \\ \{D_t{}^2-(1-t)y_2{}^3C_0\}u_0-(1-t)y_2{}^3B_0u_1=0 \end{cases}$$

を得る。 $L=\{D_t=0,\ y_2=0\}$ として micro symbol をとると、これらは

$$\begin{cases} D_t u_0 - y_2 u_1 = 0 \\ D_t{}^2 u_0 = 0 \end{cases}$$

と同じ micro symbol をもつので u_0 の特異性は $\{D_t=0.\ y_2=0\}$ 内では $\frac{\partial}{\partial t}$ に沿って伝播する。（u_1 についても同様の方程式が成立する。）（J. M. Bony の micro Holmgren に関する結果による。）。これは $(u_0,\ u_1)|_{t=1-0}$ の特異性と $(u_0,\ u_1)|_{t=+0}$ の特異性が $\{y_2=0\}$ 上では1対1に対応している事を示している。一方、$(u_0,\ u_1)|_{t=1-0}$ については P が $x_1-x_2>0$ で双曲型である事から、内部領域からの正則性伝播が示される。従って t を経由すれば内部領域の正則性が $(u_0,\ u_1)|_{t=+0}$ まで伝播する事がわかる。（ただしもちろん $y_2=0$ 上、$\Leftrightarrow x_1=x_2=0$ 上）

詳しい議論は省略するが、この様な方法で超関数解（すなわち fiber 全体で定義された超局所解ともいえる。）については micro analyticity が $x_1=x_2=0$ の所で境界まで伝播する事がわかる。$N+$-regular をいうには超局所解がたとえば超関数解に拡張できる事をいえばよい。$P=D_1{}^2-(x_1-x_2)D_3{}^2$ については適当な P の基本解と $\mathring{\mathcal{B}}_{N|M_+}$, $\mathring{C}_{N|M_+}$ の softness を使う事によりそれがいえる。