数理解析研究所講究録
第 355 巻 1979 年 130-138

定数係数線型偏微分方程式の実解析解の境界値の特異スペクトルについて(II)

東大教養　金子晃

[1],[2] などで扱った表記の問題の続きとして二,三の新しい結果を述べる. 云わば Glancing 領域の解析である. もっとも近頃盛んな回折研究者達は滑らかでない解に楕円型の境界条件を付けて論じているので境界値の特異性として境界の双曲型領域から Glancing 領域に到達したのに対し, 小生は滑らかな解に境界条件を付けずに論じているので, 境界の楕円型領域から Glancing 領域に到達したという違いがある. (例えば波動方程式 $D_1^2+D_2^2-D_3^2$ を R^3 上で境界 $x_1=0$ とともに考えた場合, 前者の立場では境界値はまず $\xi_2^2>\xi_3^2$ でミクロ解析的となるが, 後者の問題意識では境界値はまず $\xi_2^2<\xi_3^2$ でミクロ解析的となる. そこで今日は $\xi_2^2=\xi_3^2$ の上を考えようというわけである.) ともあれ両者はいずれ滑らかでない解を境界条件無しで扱う超局所的立場で統一されるべきものと思っている.

1. $p(D)$ を R^n 上の m 階定数係数線型偏微分作用素とし, $x_1=0$ は非特性的とする. $\zeta=(\zeta_1,\zeta')$, $\zeta'=(\zeta'',\zeta_n)$ 等と書く. 主部 $p_m(\zeta_1,\zeta')=0$ の根 $\zeta_1=\tau_j^0(\zeta')$, $j=1,\cdots,m$ が次の不等式を満たすとき $p(D)$ は $x_1<0$ の側に $+\sqrt{-1}dx_n\infty$ - 半双曲

型（又は $x_1>0$ の側に $-\sqrt{-1}\,dx_n\infty$－半双曲型）と呼ぼう：

(1)　$-\mathrm{Im}\,\tau_j^0(\xi') \leqq b|\mathrm{Im}\,\xi_n| + c|\xi''|$.　（$\mathrm{Re}\,\xi_n<0$ に於て）

$x_1<0$ の側に $-\sqrt{-1}\,dx_n\infty$－半双曲型（又は $x_1>0$ の側に $+\sqrt{-1}\,dx_n\infty$－半双曲型）の定義は左辺の負号を取り去ったもので同様に与えられる。また $p(D)$ が両方の不等式を満たす場合を考え $\sqrt{-1}\,dx_n\infty$－双曲型と呼ぶ。

定理 1　$p(D)$ は $x_1<0$ に $+\sqrt{-1}\,dx_n\infty$－半双曲型とし，更に $\sqrt{-1}\,dx_1\infty$ の近傍 I が存在して $p(\frac{1}{\sqrt{-1}}D_1, D')$ は（[2] の定義の意味で）I－双曲型とする．このとき $x_1>0$ における $p(D)u=0$ の実解析解 u の $x_1=0$ への境界値 $b_j^+(u)$, $j=0,\cdots,m-1$ は $+\sqrt{-1}\,dx_n\infty$ 方向を特異スペクトルに含まない．

注意 1　$x_1<0$ における解の境界値については半双曲性の条件の符号を変えれば同じ結論を得る．

注意 2　u が超函数解で S.S.u が両極 $\pm\sqrt{-1}\,dx_1\infty$ からの射影作用素 τ により $+\sqrt{-1}\,dx_n$ を引戻した方向を含まなければ同じ結論を得る．

例 1　部分ラプラス作用素 $D_1^2+\cdots+D_k^2$ $(k<n)$ に対して

$$\mathrm{S.S.}\,b_j^+(u) \subset \mathbb{R}^{n-1}\times\{\sqrt{-1}\,\xi' dx'\infty;\ \xi_2^2+\cdots+\xi_k^2 \neq 0\},\ j=0,1.$$

コーシー・リーマン作用素 $D_1+\sqrt{-1}D_2$ に対して

$$\mathrm{S.S.}\,b_0^+(u) \subset \mathbb{R}^{n-1}\times\{\sqrt{-1}\,\xi' dx'\infty;\ \xi_2>0\}$$

第二の例においては [1] で $\xi_2\geqq 0$ となっていたところを赤道

$\xi_2=0$が改良されたのである。更に溝畑作用素$D_1+\sqrt{-1}x_1^k D_2$は変数係数だが係数にx_1しか含まぬので上記定理の証明が通用し

$$S.S.\, b_0^+(u)\subset \mathbb{R}^{n-1}\times\{\sqrt{-1}\xi' dx'\infty;\ \xi_2\neq 0\}\qquad (k\text{偶数のとき})$$

$$S.S.\, b_0^+(u)\subset \mathbb{R}^{n-1}\times\{\sqrt{-1}\xi' dx'\infty;\ \xi_2>0\}\qquad (k\text{奇数のとき})$$

が得られる．k奇数のときの結果は[2]で$\xi_2\geqq 0$となっていたものがやはり改良されたのである．尚これらの例はSchapiraが[6]で全く別の観点から出した結果にも含まれている．

次にLeray [5]の定義をもじって$\forall\varepsilon>0$に対し

(2) $-\mathrm{Im}\,\tau_j^0(\xi')\leqq \varepsilon|\mathrm{Re}\,\zeta_n|+b|\mathrm{Im}\,\zeta_n|+C_{\varepsilon,\xi''}$ ($\mathrm{Re}\,\zeta_n<0$に於て)

が成り立つとき，$p(D)$は$x_1<0$の側に$+\sqrt{-1}dx_n\infty$-部分半双曲型（又は$x_1>0$の側に$-\sqrt{-1}dx_n\infty$-部分半双曲型）と呼ぶことにする．左辺の符号を変えたものの呼称も半双曲型のときと同様に定める．両方の符号が成り立つときは$x_1=0$に対しmod $x_n=0$で部分双曲型という．これは上記Lerayの用語であるが，我々はむしろ$\sqrt{-1}dx_n\infty$-部分双曲型と呼ぶ方が統一的であろう．

注意3　(2)は$p_m(\zeta_1,0,1)$の根λ_jについて$\mathrm{Im}\,\lambda_j\leqq 0$, $j=1,\cdots,m$が成り立つことと同値であることが容易にわかる．一般には(2)から(1)は出ないが，根λ_jが分離していれば従う．

定理2　$p(D)$は$x_1<0$に$+\sqrt{-1}dx_n\infty$-部分半双曲型とし，更に$p(\frac{1}{\sqrt{-1}}D_1,D')$は$x_1=0$に対し$\sqrt{-1}dx_n\infty$-部分双曲型とす

3. u を $x_1>0$ における $p(D)u=0$ の実解析解で，境界値 $b_\gamma^+(u)$ の特異スペクトルと $\{x_n=\mathrm{const}\}\times\{\sqrt{-1}\,dx_n\infty\}$ との交わりはコンパクトとする．このとき S.S. $b_\gamma^+(u)$ は $+\sqrt{-1}\,dx_n\infty$ 方向を含まぬ．（すなわち，特異スペクトル方向 $+\sqrt{-1}\,dx_n\infty$ は $x_n=\mathrm{const}$ に沿って境界の中を伝播する．）

注意 4　定理 1 に対する注意 1, 2 と同様のことがここでも云える。

例　波動方程式を傾けた $D_1^2+D_2D_n$ に対しこれを適用すれば実解析解の境界値に対し $\pm\sqrt{-1}\,dx_n$ 方向の特異スペクトル成分が一点でも存在すれば $x_n=\mathrm{const}$ に沿う非コンパクトな特異性伝播を引起こすことが知られる．

2. 以下証明の方針を略記しよう．常用の記号として U（$\mathbb{R}^n$ の原点の近傍），$U^+=U\cap\{x_1>0\}$，U'（$U\cap\{x_1=0\}$ に相当する $\mathbb{R}^{n-1}$ の開集合）を用意する．U を V に変えたとき V^+, V' 等の意味も同様である．区別のため U 上の超函数の空間は $\mathcal{B}(U)$，U' 上のそれは $\mathcal{B}(U')$ 等と書く．以下境界 $x_1=0$ は $p(D)$ に関して非特性的と仮定する．まず次の命題により特異スペクトルを正確に一方向に還元することができ，超函数を正則函数の境界値としてとらえるときの議論が見易くなる．

命題 1　u を U^+ における $p(D)u=0$ の超函数解とし，S.S. u は $\sqrt{-1}\,dx_n\infty$ の自然な射影による引戻し $\tau^{-1}(\sqrt{-1}\,dx_n\infty)$ に

含まれる方向を含まぬとする．$f_j(x') \in \mathcal{B}[\bar{U'}]$ を $b_j(u)$ のコンパクト台を持つ延長とする．このとき $\forall V \subset\subset U$ に対しVにおける $p(D)v=0$ の実解析解 v でその境界値が

$$b_j^+(v) = f_j(x') * W(x', \nu')\Big|_{V'}$$

に等しいものが存在する．ここに $W(x', \nu')$ は，$(0, \sqrt{-1}\,dx_n\infty)$ のみを特異スペクトルに含む超函数で，標準的には δ 函数の曲面波成分 $W(x', \omega')$ を ω' につき微分した後に $\omega' = \nu'$ とおいたもの

$$J(D_{\omega'})\,W(x', \omega')\Big|_{\omega'=\nu'} \qquad (\nu' = (0, \cdots, 0, 1))$$

が用いられる．微分 $J(D_{\omega'})$ はもちろん無限階の局所作用素でよい．この効用は次の補題（[3]）により察せられるであろう．

補題1　$u(x)$ をコンパクトな台を持つ超函数，$W(x, \omega)$ を δ 函数の（平面又は曲面）ラドン分解成分とする．任意の局所作用素 $J(D_\omega)$ に対し　$u(x) * J(D_\omega)\,W(x, \omega)\Big|_{\omega=\nu}$ が $x=0$ で実解析的となるならば $S.S.\,u$ は点 $(0, \sqrt{-1}\,\nu\,dx\infty)$ を含まない．

つまり $S.S.\,b_j(u)$ から $(0, \sqrt{-1}\,dx_n\infty)$ を抜くには，命題1と補題1を組合わせることにより実解析的な解 u に対し境界値の特異スペクトルが $\sqrt{-1}\,dx_n\infty$ 方向のみを含む場合に，実はそれが ϕ となることを示せばよいこととなる．この状況では次の補題が問題を簡明にする．

補題2　このとき連続な凸函数 $\varphi(t)$ で $\varphi(0)=0$，$\varphi(t)/t \to 0$

$(t \to 0)$ となるものが存在し超函数 u は図1の領域

$\{ z = x + \sqrt{-1}\, y\ ;\ y_n > \varphi(|y''|) + k(\max\{-x_1, 0\} + |y_1|),\ |x_1| < \delta,\ x \in V' \}$

における $p(D)F = 0$ のある正則な解 $F(z)$ の境界値 $F(x + \sqrt{-1}\{y_n > 0\}0)$

として書け，さらに

$$b_\gamma^+(u) = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^k F(0, z')\Big|_{z' \to x' + \sqrt{-1}\{y_n > 0\}0}$$

となる．(もちろん $F(z)$ はさらに V^+ において実解析函数に延長されている．)

定理1の証明の第一段階は，ここからまず正則解 $F(z)$ を x_1 の負方向に少し延長することである：

命題2　上の状況でもし $p(D)$ が $x_1 < 0$ に $+\sqrt{-1}\, dx_n$ ∞-半双曲型なら，解 $F(z)$ は

$\{ z \in \mathbb{C}^n\ ;\ -\delta' < x_1 \leq 0,\ B' > y_n > \varphi(2|y''|) + \varphi(c|x_1|) + \lambda|y_1|\ ;\ x' \in W' \}$

の形の領域に延長される（図2）

この命題は Bony Schapira の開発した Cauchy-Kowalevski と Sweeping out による方法で証明できる．(もし $\varphi(t) \equiv 0$ なら

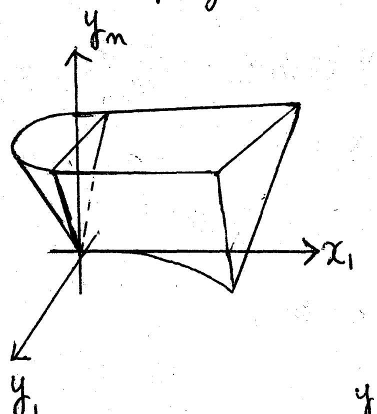

図 1

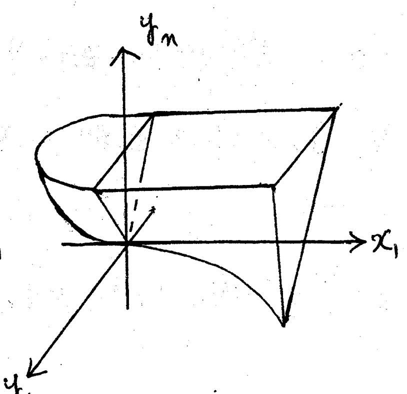

図 2

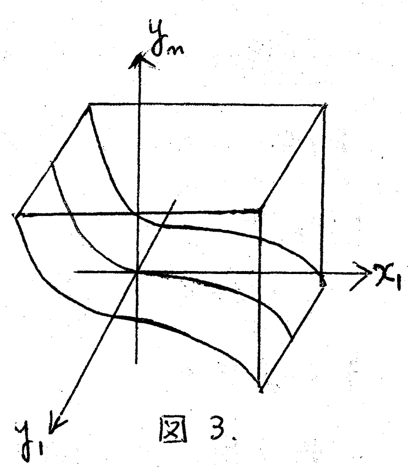

図 3.

$x_1<0$ に境界値問題の超函数解も得られる.)

さて, 定理 1 の仮定により $F(z)$ は $\pm y_1$ 軸方向には双曲型方程式の様に延長され, $F(z)$ は結局図 3 の領域で正則となる. ここで x' 座標は一定の大きさで implicit に含まれているのに目をつけ, 局所型 Bochner の定理を x_1, y_1 の役割を交換して適用すれば, 原点が正則包に吸収され $F(z)$ は原点で正則, 従って超函数解 u 及びそれらの境界値も原点で正則となり証明が完了する.

定理 2 の方の証明にはまず命題 1 で曲面波 $W(x', \nu')$ を平面波におき換える. すると $b_j^+(u)$ の延長 $f_j(x')$ は勝手には取れないけれど $S.S.\, b_j^+(u)$ が $\partial V'$ のうち平面波成分との convolution で内部正則性に影響を及ぼすような部分で $\sqrt{-1}\,dx_n\infty$ を含んでいなければ $b_j^+(u)$ の"適当な" cut off ($J(D_{\omega'})$ とは独立) を取ることにより同様の結論が得られる. 命題 2 の代用としては次が用いられる:

<u>命題 3</u>　$p(D)$ は $x_1<0$ に $\sqrt{-1}\,dx_n\infty$-部分半双曲型で $\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^k F(0, z')$, $k=0, \cdots, m-1$ は $\{x' \in V',\ y_n>0\}$ で正則とする. このとき上の $F(z)$ は

$$\{z \in \mathbb{C}^n;\ -\delta' < x_1 \leq 0,\ x' \in W',\ |y_1| < \mu y_n < B''\}$$

まで延びる.

これを用いて $F(z)$ を同様に $\pm y_1$ 軸方向にも延ばし局所型 Bochner

の定理をより慎重に適用すると定理2が証明される.

3. 研究集会後の発展として波動方程式 $D_1^2+\cdots+D_{n-1}^2-D_n^2$ に対しては定理2が陪特性帯のレベルまで精密化できたことを付記させていただく. それには命題1を変数の一部について曲面波になるような δ の分解に対して拡張し, また命題2と3の中間的なものを用意するのである. 最後に以上の結果の一つの応用として波動方程式の実解析解の特異集合の形状に関する主張が次のように改良されたこと注意しておく.

系 u は $x_1=0$ 内の C^1 級曲線 C の外で定義された $(D_1^2+\cdots+D_{n-1}^2-D_n^2)u=0$ の実解析解とする. このとき C は weakly timelike でなければならぬことは既に注意したが, もし light like な点がコンパクト領域に収まっていれば実はそのような点は存在せず C は strongly timelike となる.

何者, このときこのような点において境界値の特異スペクトルには必然的に境界特性方向が含まれ, 対応する陪特性帯に沿って特異スペクトルが境界内に非コンパクトに拡がるからである.

以上の結果の詳細については [4] を見られたい.

文献

[1]. KANEKO A., On the singular spectrum of boundary

values of real analytic solutions, J. Math. Soc. Japan. 29 (1977), 385–398.

[2] ———, Singular spectrum of boundary values of solutions of partial differential equations with real analytic coefficients, Sci. Pap. Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo 25 (1975), 59–68.

[3] ———, Remarks on hyperfunctions with analytic parameters II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. SecIA, 25 (1978), 67–73.

[4] ———, Estimation of singular spectrum of boundary values for some semihyperbolic operators. submitted to J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec IA.

[5] Schapira P., Propagation au bord et reflexión des singularités analytiques des solutions des équations aux derivées partielles II. Séminaire Goulaouic–Schwartz 1976/7, Exposé 9.

[6] Leray J., Operateurs partiellement hyperboliques. C. R. Acad. Sc. Paris, 276 (1973), 1685–1687.