数理解析研究所講究録
第 357 巻 1979 年 137-164

Sur les ondes de surface de l'eau

Tadayoshi KANO* et Takaaki NISHIDA**

I. Problèmes et conclusions.

1. Considérons le mouvement irrotationel d'un liquide parfait qu'on appellera l'eau dans ce qui suit, remplissant l'espace $\Omega(t) = \{(x,y): \; x\in \mathbb{R}, \; 0< y< \Gamma(t,x)\}$, $t\geq 0$. Les ondes de surface de l'eau en deux dimension sont régies par :

$$
(1.1)\quad
\begin{aligned}
&\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \quad \text{pour} \quad (x,y) \in \Omega(t)\\
&\Phi_{y} = 0 \quad \text{pour} \quad x\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad y = 0\\
&\left.\begin{aligned}
&\Phi_t + \tfrac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2) + gy = 0\\
&\Gamma_t + \Gamma_x\Phi_x - \Phi_y = 0
\end{aligned}\right\} \quad x\in\mathbb{R}, \; y = \Gamma(t,x)
\end{aligned}
$$

où Φ est le potentiel de ce chapms conservatif des vitesses, $y = \Gamma(t,x)$ l'équation de la frontière libre qui est à déterminer en même temps que Φ et g la

---

* Dépt. Math.,Univ. d'Osaka; ** Dépt. Math.et Phys. Appl., Univ. de Kyoto

constante de gravité.. Supposons qu'on connaisse le potentiel et la frontière libre à $t = 0$:

$$(1.2) \quad \begin{cases} \Phi(0,x,y) = \Phi_0(x,y), & (x,y) \in \Omega(0), \\ \Gamma(0,x) = \Gamma_0(x) > 0. \end{cases}$$

<u>Problème</u> I Résoudre le problème de Cauchy (1.1) - (1.2).

<u>Non-dimensionalisation de</u> (1.1) - (1.2):

Soient

$$(1.3) \quad \begin{array}{l} x = \lambda x', \quad y = hy', \quad t = (\lambda/c)t', \\ \Phi = c\lambda\Phi', \quad \Gamma = h\Gamma', \quad \Phi_0 = c\lambda\Phi_0', \Gamma_0 = h\Gamma_0' \end{array}$$

où $c = \sqrt{gh}$, h étant la profondeur moyenne de l'eau. En désignant h/λ par δ et en omettant le signe " ' ", le problème I revient à résoudre le problème de Cauchy suivant:

$$(1.4) \quad \begin{cases} \delta^2 \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 & , x \in \mathbb{R}, \ 0 < y < \Gamma(t,x) \\ \Phi_y = 0, & y = 0, \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \delta^2(\Phi_t + \frac{1}{2}\Phi_x^2 + y) + \frac{1}{2}\Phi_y^2 = 0 \\ \delta^2(\Gamma_t + \Gamma_x\Phi_x) - \Phi_y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y = \Gamma(t,x) \end{array}$$

(1.5) $\Phi(0,x,y) = \Phi_0(x,y)$, $\Gamma(0,x) = \Gamma_0(x)$.

2. <u>Développement de Friedrichs et les équations des ondes en eau peu profonde</u>. Friedrichs a proposé en 1948, un développement en série par rapport à δ^2 du potentiel et de la frontière libre:

K.-O.Friedrichs: Comm.Pure Appl. Math.,1,p.81-85

$$\Phi = \Phi^0 + \delta^2\,\Phi^1 + \delta^4\,\Phi^2 + \cdots$$

(2.1)

$$\Gamma = \Gamma^0 + \delta^2\,\Gamma^1 + \delta^4\,\Gamma^2 + \cdots$$

En rapportant (2.1) dans (1.4), il en a déduit comme le terme d'ordre zéro les équations des ondes en eau peu profonde considérées en 1850 par G.Airy:

$$\Phi^0_t + \frac{1}{2}(\Phi^0_x)^2 + \Gamma^0 = 0$$

(2.2)

$$\Gamma^0_t + (\Phi^0_x\,\Gamma^0)_x = 0$$

Il a ainsi suggéré une procedure systématique de dériver ces équations des ondes en eau peu profonde et des approximations d'ordres supérieurs, sans toutefois démontrer la justification mathématique de ce développement.

Problème II Démontrer oui ou non la convergence de développement de Friedrichs.

3. Après le rapport de Scott-Russel, en 1844, sur l'observation des ondes solitaires sur les eaux d'un canal réctangulaire, Boussinesq, Rayleigh, Korteweg-de Vries ... ont proposé des équations des approximations pour expliquer la possibilité théorique d'elles:

(3.1) $u_{tt} = u_{xx} + \left(\frac{3}{2}u^2\right)_{xx} + \frac{1}{3}u_{xxxx}$, Boussinesq, 1871,

(3.2) $u_t = u_x + \frac{3}{2}u \cdot u_x + \frac{1}{6}u_{xxx}$, K-dV, 1895.

Et encore:

$$\begin{cases} u_t + \eta_x + u\,u_x = \frac{1}{2}u_{xxt} \\ \eta_t + ((1+\eta)u)_x = \frac{1}{6}u_{xxx} \end{cases}$$

par Long (1964) et Broer(1964).

Long: J. Fluid Mech., 20, p.161, Broer: Appl. Sci. Res., 11

$$u_t + u_x + \frac{3}{2} uu_x = \frac{1}{6} u_{xxt}, \quad \eta = u + O(\delta^2)$$

par Peregrine, en 1966.

Peregrine: J. Fluid. Mech., 25, p.321

<u>Problème</u> III Peut-on donner une justification mathématique pour l'équation de Boussinesq ou de Korteweg-de Vries etc ?

4. On considère dans ce qui suit ces trois problèmes et nos résultats , jusqu'ici, sont:

I. <u>L'existence de solution analytique, localement par rapport au temps</u>.

II. <u>La solution du problème de Cauchy</u> (1.1)-(1.2) <u>est indéfiniement différentiable par rapport à</u> δ^2. <u>Le développement de Friedrichs est asymptotique par rapport à</u> $\delta^2 < \delta_0^2$.

III. <u>On peut donner une justification mathématique pour l'équation des ondes en eau peu profonde,</u>

l'équation de Boussinesq et celle de Korteweg-de Vries, pour les solutions analytiques, localement par rapport au temps.

II. Problème de Cauchy (1.4) - (1,5).

5. Soit Ψ la conjuguée complexe de Φ . Alors $F = \Phi + i\Psi$ définit le potentiel complexe des vitesses: une fonction holomorphe de $z = x + iy$ pour $(x,y) \in \Omega(t)$. Soit $z(t,\zeta) = x(t,\zeta) + iy(t,\zeta)$ la représentation conforme de $\Omega(t)$ sur Ω_h :

$$(5.1) \quad \Omega_h = \{ \zeta = \xi + i\eta , \ \xi \in \mathbb{R} , \ 0 < \eta < h \}$$

Soit encore f l'image de F par cette représentation:

$$(5.2) \quad f = f(t,\zeta) = F(t, z = z(t,\zeta)) = \varphi(t,\zeta) + i\psi(t,\zeta).$$

Alors la vitesse complexe s est

$$(5.3) \quad s = \frac{dF}{dz}(t, z = z(t,\zeta)) = f_\zeta / z_\zeta \ .$$

6. <u>Une notion générale</u> Soit Ω_h une bande du plan complexe $\zeta = \xi + i\eta$

(6.1) $$\Omega_h = \left\{ \zeta = \xi + i\eta \ : \xi \in \mathbb{R}, \quad 0 < \eta < h \right\}.$$

Considérons une fonction holomorphe $w(\zeta) = u(\xi,\eta) + iv(\xi,\eta)$ dans Ω_h avec $v(\xi,0) = 0$. Soit $u(\xi)+iv(\xi) \equiv u(\xi,h) + iv(\xi,h)$ les valeurs au bord $\eta = h$. Alors on a:

(6.2)
$$v(\xi_o) = A_h u(\xi_o) = \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cosech} \frac{\pi}{2h}(\xi - \xi_o) u(\xi)\, d\xi$$
$$u(\xi_o) = B_h v(\xi_o) = -\frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} \coth \frac{\pi}{2h}(\xi - \xi_o)\, v(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2}(u_\infty + u_{-\infty})$$

où
$$\frac{1}{2}(u_\infty - u_{-\infty}) = \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} v(\xi)\, d\xi$$

ajoutant quelques conditions supplémentaires: condiion de Hölder, sommabilité de $v(\xi)$ etc.

Une autre expression de B_h nous sera utile:

$$u(\xi_o)=B_h v(\xi_o)= -A_h v(\xi_o) + \frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}(1-\tanh \frac{\pi}{4h}(\xi-\xi_o)v(\xi)) d\xi +u_{-\infty} =$$

$$= -A_h v(\xi_o) + C_h v(\xi_o) + u_{-\infty} .$$

7. Le problème de Cauchy (1.1)-(1.2) n'est autre que le problème de Cauchy pour les équations par rapport aux fonctions $x(t,\xi+i\eta)$ et $\varphi(t,\xi+i\eta)$ sur $\eta = h$ déduites de deux dernières équations de (1.1):

$$x_t = \frac{A_h x_\xi A_h \varphi_\xi}{x_\xi^2 +(A_h x_\xi)^2} - x_\xi B_h\left(\frac{A_h \varphi_\xi}{x_\xi^2 +(A_h x_\xi)^2} \right)$$

(7.1)

$$\varphi_t = - gA_h x +\frac{1}{2} \frac{(A_h\varphi_\xi)^2- \varphi_\xi^2}{x_\xi^2 +(A_h x_\xi)^2} - \varphi_\xi B_h\left(\frac{A_h \varphi_\xi}{x_\xi^2 +(A_h x_\xi)^2}\right)$$

avec des données initiales

(7.2) $x(0,\xi) = \mathrm{Re}\, z(0,\xi+ih), \varphi(0,\xi) = \varphi(0,z(0,\xi+ih)),$

et enfin

$$(7.3) \qquad y = A_h x, \quad \psi = A_h \varphi \quad .$$

On résout en effet le problème de Dirichlet pour $\Delta f = 0$ sur Ω_h et les images par cette représentation conforme $z = z(t, \zeta)$ nous donnent les solutions cherchées.

8. Par la non-dimensionalisation telle que

$$(8.1) \qquad \xi = \lambda \xi', \ \eta = h \eta', \ x = \lambda x', \ y = hy', t = \frac{\lambda}{c} t', \ \varphi = c\lambda \varphi',$$

on a, en désignant h/λ par δ et omettant le signe " ' ", les équations suivantes correspondantes au problème de Cauchy non-dimensionel (1.4)-(1.5):

$$(8.2) \qquad y = \frac{1}{\delta} A_\delta x, \quad \psi = A_\delta \varphi \quad ,$$

$$(8.3) \qquad \begin{aligned} x_t &= \frac{A_\delta x_\xi A_\delta \varphi_\xi}{x_\xi^2 + (A_\delta x_\xi)^2} - x_\xi B_\delta \left(\frac{A_\delta \varphi_\xi}{x_\xi^2 + (A_\delta x_\xi)^2} \right) \\ \varphi_t &= -\frac{1}{\delta} A_\delta x + \frac{1}{2} \frac{(A_\delta \varphi_\xi)^2 - \varphi_\xi^2}{x_\xi^2 + (A_\delta x_\xi)^2} - \varphi_\xi B_\delta \left(\frac{A_\delta \varphi_\xi}{x_\xi^2 + (A_\delta x_\xi)^2} \right) \end{aligned}$$

On résoudra dans le prochain numéro le problème de Cauchy pour (8.3).

9. Soient u, v fonctions holomorphes dans une bande voisinage de l'axe réel $\Omega_\rho = \{\zeta = \xi + i\eta\ ;\ \xi \in \mathbb{R}, |\eta| < \rho\}$. Soit $\mathcal{B}_{\sigma,\rho}$ l'espace de Banach des fonctions u muni de la norme

$$|u|_{\sigma,\rho} = \sup_{\Omega_\rho}|u| + \sup_{|\eta|<\rho}\ \sup_{d>0}\ \frac{|u(\xi+d+i\eta)-u(\xi+i\eta)|}{d^\sigma}$$

et L^σ_ρ l'espace de Banach des fonctions v muni de la norme

$$|v|_{L^\sigma_\rho} = \sup_{|\eta|<\rho}\int_{-\infty}^{\infty}|u(\xi+i\eta)|\,d\xi \; + $$
$$+ \sup_{|\eta|<\rho}\ \sup_{d>0}\ \frac{1}{d^\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}|v(\xi+d+i\eta)-v(\xi+i\eta)|\,d\xi$$

Soit enfin X une echelle des espaces de Banach:

$$X = \bigcup_{\rho>0} X_\rho = \left\{ \begin{array}{l} u\text{:holomorphes dans } \Omega_\rho \\ \text{avec } \|u\|_\rho = \max\left(|u|_{\sigma,\rho}, |u_\xi|_{L^\sigma_\rho}\right) \end{array} \right\}.$$

Après une différentiation par rapport à ξ, on a une quasilinéalisation de (8.3):

$$v_t = \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{ wA_\delta vA_\delta u + vA_\delta(wA_\delta u) - vC_\delta(wA_\delta u)\right\}$$

(9.1)

$$u_t = -\frac{1}{\delta}A_\delta v - \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{ \frac{w}{2}(u^2-(A_\delta u)^2) - uA_\delta(wA_\delta u) + uC_\delta(wA_\delta u)\right\}$$

où $v = x_\xi$, $u = \varphi_\xi$ et $w = (v^2+(A_\delta v)^2)^{-1}$.

Lemme 9.1 Lorsque δ tend vers zéro, on a

$$\frac{1}{\delta} A_\delta u \longrightarrow u_\xi \, , \quad \delta C_\delta v \longrightarrow \int_{-\infty}^{\xi} v \, d\xi \, .$$

Lemme 9.2 Soient u et $v \in \mathcal{X}$, il y a une constante C indépendante de δ telle que:

$$\| A_\delta u\|_\rho \leq C \| u\|_\rho \, , \quad \left\| \frac{1}{\delta} A_\delta u\right\|_\rho \leq C \| u_\xi\|_\rho , \|\delta C_\delta v\|_\rho \leq C |v|_{L^\sigma_\rho} .$$

Supposons que $v(0,\xi), u(0,\xi) \in X_{\rho_0}$, $\rho_0 > 0$
et que

$$(9.2) \qquad \| v - v_- \|_{\rho_0} < \frac{R_0}{2} \, , \; v_- > 0, \; R_0 = \min\left\{\frac{v_-}{4}, \frac{v_-}{4C^2}\right\}$$

avec la constante C dans le Lemme 9.2. Cette hypothèse interdit le bas-fond sec. D'après le théorème abstrait non-linéaire de Cauchy-Kowalevski en version Nirenberg-Nishida :

Nirenberg: J.Diff.Geometry,6 ;Nishida:ibid,12,

on a le

<u>Théorème</u> 9.1 Supposons

$$\max\left\{ \|u(0) - u_-\|_{\rho_0}, \|v(0) - v_-\|_{\rho_0} \right\} = E_0 < R_0/2,$$

où $(v_-,u_-) = \lim_{\xi \to -\infty}(v,u)$, alors il existe une constante a positive, indépendante de δ, telle qu'on ait une solution unique du problème de Cauchy pour (9.1) dans X_ρ ,quel que soit $\rho < \rho_0$, pour $|t| < a(\rho_0 - \rho)$ satisfaisant à

$$\|u(t)-u_-\|_\rho \quad , \|v(t)-v_-\|_\rho < 2E_0 \ .$$

<u>Remarque</u> Notons que w satisfait à $\| w - w_-\|_\rho < C\| v - v_-\|_\rho$ si $\|v - v_-\|_\rho < R_0$.

III. <u>Développement asymptotique de Friedrichs et les équations des ondes en eau peu profonde</u>

10. En appliquant encore le théorème de Cauchy-Kowalevski aux équations par rapport à $(\frac{\partial u}{\partial \delta},\frac{\partial v}{\partial \delta})$, $(\frac{\partial^2 u}{\partial \delta^2},\frac{\partial^2 v}{\partial \delta^2})$ etc..., avec des éstimations uniformes par rapport à δ des termes non homogènes, on a le

<u>Théorème</u> 10.1 Les solutions $v(t,\xi:\delta)$ et $u(t,\xi:\delta)$ du théorème 9.1 sont indéfiniement différentiables par rapport à δ dans $X_{\rho'}$, quel que soit $\rho' < \rho$, pour $|t| < a(\rho_o - \rho)$.

11. Puisque $(v,u)(t,\xi) \longrightarrow (v^o,u^o)(t,\xi)$ lorsque δ tend vers zéro, on a de (8.2):

(11.1) $y^o = x^o_\xi = v^o$, $\varphi^o_\xi = u^o$.

On a d'autre part

(11.2) $y = \frac{1}{\delta} A_\delta x = x_\xi + \frac{\delta^2}{3} x_{\xi\xi\xi} + O(\delta^4)$

$$(11.3)\begin{cases} x_t = -x\displaystyle\int_{-\infty}^{\xi} \frac{\varphi_{\xi\xi}}{x_\xi^2}\, d\xi + \delta^2\{\dots\} + O(\delta^4) \\ \varphi_t = -x_\xi - \frac{1}{2}\frac{\varphi_\xi^2}{x_\xi^2} - \varphi_\xi\displaystyle\int_{-\infty}^{\xi}\frac{\varphi_{\xi\xi}}{x_\xi^2}\, d\xi + \delta^2\{\dots\} + O(\delta^4)\end{cases}$$

D'où, pour $\delta = 0$, on a

$$(11.4)\quad \begin{aligned} & y^o = x^o_\xi, \quad x^o{}_t = -x^o_\xi \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\varphi^o_{\xi\xi}}{(x^o_\xi)^2}\, d\xi \\ & \varphi^o{}_t = -x^o_\xi - \frac{1}{2}\Big(\frac{\varphi^o_\xi}{x^o_\xi}\Big)^2 - \varphi^o_\xi \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\varphi^o_{\xi\xi}}{(x^o_\xi)^2}\, d\xi \,. \end{aligned}$$

Vu que $v = x_{\xi}(t,\xi : \delta^2) > 0$, on peut définir des fonctions images de $y(t,\xi : \delta)$ et $\varphi(t,\xi : \delta)$ par la représentaion conforme $z = z(t,\zeta)$ par:

$$(11.5)\quad \begin{aligned} &\Gamma(t,x(t,\xi:\delta):\delta^2) = y(t,\xi:\delta) \\ &\Phi(t,x(t,\xi:\delta):\delta^2) = \Phi(t,x(t,\xi:\delta),\delta\Gamma(t,x:\delta^2):\delta^2) = \\ &\qquad = \varphi(t,\xi:\delta). \end{aligned}$$

S'appuyant sur le théorème 10.1, lorsque δ tend vers zéro, on a

$$\Gamma^o(t,x^o(t,\xi)) = y^o(t,\xi)$$

$$\Phi^o(t,x^o(t,\xi)) = \varphi^o(t,\xi).$$

Théorème 11.1

$$(11.6)\quad \begin{aligned} &\Phi_t + \tfrac{1}{2}(\Phi_x)^2 + \Gamma = \tfrac{1}{2}\delta^2(\Gamma\Phi_{xx})^2 + O(\delta^4) \\ &\Gamma_t + (\Phi_x\Gamma)_x = -\tfrac{1}{3}\delta^2(\Gamma^3\Phi_{xx})_{xx} + O(\delta^4). \end{aligned}$$

Pour $\delta = 0$, (11.6) donne les équations des ondes en eau peu profonde:

Corollaire (Équations des ondes en eau peu profonde)

$$(11.7)\quad \begin{cases} \phi^{o}_{t} + \frac{1}{2}(\phi^{o}_{x})^{2} + \Gamma^{o} = 0 \\ \Gamma^{o}_{t} + (\Gamma^{o}\phi^{o}_{x})_{x} = 0 \end{cases}$$

12. Vu les propriétés des espaces $\{X_{\rho}\}$, on voit que $\varphi(t,\xi,\delta\eta:\delta^{2})$ peut être prolongée pour $1<\eta<1+a_{\rho}$, a_{ρ} n'étant pas dépendante de ξ, δ comme la partie réelle d'une fonction holomorphe de $\xi+i\delta\eta$, qui l'est déjà pour $\xi\in\mathbb{R}$, $0<\eta<1$.
De même, $x(t,\xi,\delta\eta:\delta^{2})$ est prolongeable comme la partie réelle de $x+i\delta y$ une fonction holomorphe de $\xi+i\delta\eta$. D'où, $\phi(t,x;\delta^{2})$ définie par (11.5) est la valeur sur $\Gamma(t,x:\delta^{2})$ d'une fonction harmonique $\underset{\text{de}(x,\ \delta y)}{}$ $\phi(t,x,\delta y:\delta^{2})$ dans un domaine qui contient un voisinage de $(x,\Gamma(t,x:\delta^{2}))$, δ petit.

Quel que soit δ, $\delta<\delta_{o}$, on peut développer $\Phi(t,x,\delta\Gamma(t,x:\delta):\delta^{2})$ en série:

$$(12.1)\quad \Phi(t,x,\delta\Gamma:\delta^{2}) = \sum_{m=o}^{\infty}\frac{(-\delta\Gamma)^{2m}}{(2m)!}\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}\Phi_{o}(t,x:\delta^{2}),$$

où $\Phi_o(t,x:\delta^2)$ est la valeur du potentiel au fond de l'eau défini par:

$$(12.2) \qquad \Phi_o(t,x(t,\xi,0:\delta^2),0:\delta^2) = \varphi(t,\xi,0:\delta^2).$$

<u>Théorème</u> 12.1 (Développement de Friedrichs)

Potentiel Φ et la frontière libre Γ ont des développements asymptotiques par rapport à δ^2 pour δ petit:

$$\Gamma \sim \gamma_o(t,x) + \delta^2\gamma_1(t,x) + \delta^4\gamma_2(t,x) + \ldots$$

$$\Phi \sim \phi_o(t,x) + \delta^2\phi_1(t,x) + \delta^4\phi_2(t,x) + \ldots$$

dont les coefficients γ_n et ϕ_n sont des solutions d'un système linéaire hyperbolique non-homogène pour $n \geqq 1$:

$$\begin{cases} \phi_{nt} + \phi_{ox}\,\phi_{nx} + \gamma_n = f_{n-1} \\ \gamma_{nt} + (\gamma_o\phi_{nx} + \phi_{ox}\gamma_n)_x = g_{n-1} \end{cases}$$

et pour $n = 0$ les solutions des équations des ondes en eau peu profonde, f_{n-1} et g_{n-1} étant fonctions de $(\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1} : \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1})$ ainsi que leur dérivées par rapport à x.

IV. Equation de Boussinesq

13. Nous avons considéré jusqu'ici des ondes longues de surface, dont les ampleurs ne sont pas nécessairement petites comparées à la profondeur de l'eau. Nous avons seulement interdit le bas-fond sec. Nous allons maintenant considérer des ondes d'ampleur petite mais finie. Soit a ampleur des ondes. On considère une non-dimensionalisation de (1.1) quelque peu differente de (1.3):

$$(13.1) \quad y - h = ay^1, \text{ i.e. } y' = 1 + \frac{a}{h} y^1 \equiv 1 + \varepsilon y^1$$

En accord avec (13.1), on définit les autres quantités non-dimensionelles par:

$$(13.2) \quad y = \eta + \varepsilon y^1, \; x = \xi + \varepsilon x^1, \; \varphi = -t + \varepsilon \varphi^1$$

pour $\xi \in \mathbb{R}$ et $0 \leq \eta \leq 1$, et

$$(13.3) \quad \Gamma = 1 + \varepsilon \gamma \quad , \quad \Phi = -t + \varepsilon \phi$$

Le même raisonnement que dans le numéro 8 nous donne les équations auxquelles satisfont x^1 et φ^1:

$$
(13.4)\quad
\begin{aligned}
x^1_t &= \frac{\varepsilon\, A_\delta x^1_\xi\, A_\delta \varphi^1_\xi}{(1+\varepsilon x^1_\xi)^2+\varepsilon^2(A_\delta x^1_\xi)^2} + (1+\varepsilon x^1_\xi)A_\delta\left(\frac{A_\delta\varphi^1_\xi}{(1+\varepsilon x^1_\xi)^2+\varepsilon^2(A_\delta x^1_\xi)^2}\right) - \\
&\quad - (1+\varepsilon x^1_\xi)\cdot C_\delta\left(\frac{A_\delta\varphi^1_\xi}{(1+\varepsilon x^1_\xi)^2+\varepsilon^2(A_\delta x^1_\xi)^2}\right) \\
\varphi^1_t &= -\frac{1}{\delta}A_\delta x^1 + \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{(A_\delta\varphi^1_\xi)^2-(\varphi^1_\xi)^2}{(1+\varepsilon x^1_\xi)^2+\varepsilon^2(A_\delta x^1_\xi)^2} - \varepsilon\varphi^1_\xi A_\delta\left(\frac{A_\delta\varphi^1_\xi}{(1+\varepsilon x^1_\xi)^2+\varepsilon^2(A_\delta x^1_\xi)^2}\right) - \\
&\quad - \varepsilon\varphi^1_\xi\, C_\delta\left(\frac{A_\delta\varphi^1_\xi}{(1+\varepsilon x^1_\xi)^2+\varepsilon^2(A_\delta x^1_\xi)^2}\right)
\end{aligned}
$$

en posant $\delta^2=\varepsilon$: une condition qui détermine des circonstances physiques. Avec $y^1=\frac{1}{\delta}A_\delta x^1$, $\psi^1=A_\delta\varphi^1$.

14. On définit $\gamma(t,x:\varepsilon)$ et $\phi(t,x;\varepsilon)$ par

$$
(14.1)\quad
\begin{aligned}
\gamma(t,\xi+\varepsilon\, x^1(t,\xi:\varepsilon):\varepsilon) &= y^1(t,\xi:\varepsilon) \\
\phi(t,\xi+\varepsilon\, x^1(t,\xi:\varepsilon):\varepsilon) &= \varphi^1(t,\xi:\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Alors elles satisfont à

$$
(14.2)\quad
\begin{aligned}
&\phi_t+\gamma+\frac{\varepsilon}{2}\phi_x^2 = O(\varepsilon^2) \\
&\gamma_t+\phi_{xx}+\varepsilon(\gamma\phi_x)_x+\frac{\varepsilon}{3}\phi_{xxxx} = O(\varepsilon^2),
\end{aligned}
$$

C'est-à-dire

$$(14.3) \quad \phi_{tt} = \phi_{xx} - \frac{\varepsilon}{2}(\phi_x^2)_t - \varepsilon(\phi_t \phi_x)_x + \frac{\varepsilon}{3}\phi_{xxxx} + O(\varepsilon^2).$$

Si on suppose ici: $\partial_t = \partial_x + O(\varepsilon)$, ou une propagation dans une seule direction, on réduit de (14.3):

$$(14.4) \quad \phi_{tt} = \phi_{xx} + \frac{3}{2}\varepsilon(\phi_x^2)_x + \frac{\varepsilon}{3}\phi_{xxxx} \quad ;$$

ou encore

$$(14.5) \quad \gamma_{tt} = \gamma_{xx} + \frac{3}{2}\varepsilon(\gamma^2)_{xx} + \frac{\varepsilon}{3}\gamma_{xxxx}$$

en supposant que $\phi_x = \gamma + O(\varepsilon)$ comme l'a fait Boussinesq :

J.Boussinesq: J.Math. Pures Appl.,t.17 (1872)

Mais la relation linéaire de dispersion pour (14.4) n'est pas bonne et il serait difficile de montrer oui ou non si les solutions de (14.4) donnent une approximation pour les solutions de (14.3).

15. On va essayer maintenant d'obtenir une équation "correcte" de Boussinesq, c'est-à-dire une équation non-linéaire de seconde ordre par rapport à t qui fournit une bonne approximation de solution de (14.3).

1°. Notons en premier lieu que l'équation de (γ, ϕ) d'ordre ε^2 rejettant les termes d'ordres $O(\varepsilon^3)$ a une bonne relation linéaire de dispersion. Il est à noter ici que ce développement n'est pas le développement de Friedrichs, mais il s'agit au fait du développement des opérateurs A_δ et C_δ.

2°. Suivant à l'esprit de Boussinesq, récrivons (14.2) explicitant la valeur du potentiel au fond de l'eau: $\phi_o(t,x:\varepsilon)$. D'après (12.1) et (14.2) on a

$$\text{(15.1)} \quad \begin{aligned} &\phi_{o,t} + \gamma + \frac{\varepsilon}{2}(\phi_{o,x})^2 = \frac{\varepsilon}{2}\phi_{o,txx} + O(\varepsilon^2) \\ &\gamma_t + \phi_{o,xx} + \varepsilon(\gamma\,\phi_{o,x})_x = \frac{\varepsilon}{6}\phi_{o,xxxx} + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

ou encore

$$\text{(15.2)} \quad \begin{aligned} \phi_{o,tt} = \phi_{o,xx} - \frac{\varepsilon}{2}(\phi_{o,x}^2)_t - \varepsilon(\phi_{o,t}\,\phi_{o,x})_x + \\ + \frac{\varepsilon}{2}\phi_{o,ttxx} - \frac{\varepsilon}{6}\phi_{o,xxxx} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Or le théorème abstrait non-linéaire de Cauchy-Kowalevski montre le

Théorème 15.1 Si $f(0,x)$ et $f_t(0,x) \in X_{\rho_0}$, $\rho_0 > 0$, le problème de Cauchy pour

$$(15.3) \quad f_{tt} = f_{xx} - \frac{\varepsilon}{2}(f_x^2)_t - \varepsilon(f_t f_x)_x + \frac{\varepsilon}{2} f_{ttxx} - \frac{\varepsilon}{6} f_{xxxx}$$

admet la solution unique dans X_ρ, quel que soit $\rho < \rho_0$, pour $|t| < a(\rho_0 - \rho)$, $\exists a > 0$.

Le même théorème montre que la solution $u \in X_\rho$ de l'équation

$$u(t) = u_0(t) + \int_0^t F(t,s:u(s))\, ds$$

dépende continûment des données initiales et de second membre au sens de norme:

$$M_1[u] = \sup_{\substack{0 \leq \rho < \rho_1 \\ 0 \leq t < a(\rho_1 - \rho)}} \| u(t) \|_\rho \left(1 - \frac{t}{a(\rho_1 - \rho)} \right), \quad \forall \rho_1 < \rho_0 .$$

D'où on a le

<u>Théorème</u> 15.2 Soient $\phi_o(0,x) = f(0,x)$ et $\phi_{o,t}(0,x) = f_t(0,x) \in X_{\rho_o}$, $\rho_o > 0$, alors, quel que soit $\rho < \rho_o$, on a

(15.4) $$\| \phi_o - f \|_\rho = O(\varepsilon^2).$$

<u>Remarque</u> Vu les propriétes des espaces $\{X_\rho\}$, on voit que (15.4) montre que, quel que soit m un entier positif, $(\partial^m/\partial x^m)\phi_o$ ne diffère de $(\partial^m/\partial x^m)f$ que de terme d'ordre $O(\varepsilon^2)$ dans $\{X_\rho\}$. En effet

$$\| \phi_{o,x} - f_x \|_{\rho'} < \frac{1}{\rho - \rho'} \| \phi_o - f \|_\rho$$

$\forall \rho' < \rho$.

Compte tenu des théorèmes 15.1 - 2, il nous semble raisonnable d'appeller (15.3) <u>l'équation de Boussinesq</u>.

<u>Remarque</u> Notons qu'on peut montrer que (15.3) admet une solution globale par rapport au temps dans un espace de Sobolev, vu les éstimations a priori telles que

$$\sup_t \| f_t \|_1, \ \sup_t \| f_x \|_1 < M ,$$

etc.

V. Equation de Korteweg - de Vries

16. Considérons des ondes de surface de l'eau qui s'écoule d'une vitesse constante α.

Une considération telle que celle dans les n^{os} 13-14 pour

$$x = \xi + \varepsilon x^1, \; y = 1 + \varepsilon y^1, \quad \varphi = -t + \alpha \xi + \varepsilon \varphi^1 \tag{16.1}$$

et

$$\Phi = -t + \alpha x + \varepsilon \phi \;, \; \Gamma = 1 + \varepsilon \gamma \;, \tag{16.2}$$

nous emmène à

$$\begin{aligned} & u_t + \alpha u_x + \gamma_x + \varepsilon u u_x = O(\varepsilon^2) \\ & \gamma_t + \alpha \gamma_x + u_x + \frac{\varepsilon}{3} u_{xxx} + \varepsilon (\gamma u)_x = O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{16.3}$$

où $u = \phi_x$.

Une diagonalisation de (16.3) par

$$\gamma - u = \gamma - \phi_x = 2g, \quad \gamma + u = \gamma + \phi_x = 2f, \tag{16.4}$$

nous donne:

(16.5) $g_t + (\alpha - 1)g_x - \frac{\varepsilon}{6} g_{xxx} - \frac{3}{2}\varepsilon\, g g_x = O(\varepsilon^2)$

et

(16.6) $f_t + (\alpha + 1)f_x + \frac{\varepsilon}{6} f_{xxx} + \frac{3}{2}\varepsilon\, f f_x = O(\varepsilon)$,

si on résout (13.4) correspondante à (16.1) avec

$$\gamma(o,x) - \phi_x(0,x) = 2g(0,x) = O(1),$$

$$\gamma(0,x) + \phi_x(0,x) = 2f(0,x) = O(\varepsilon).$$

17. Soit G une solution de l'équation de Korteweg-de Vries:

(17.1) $G_t + (\alpha - 1)G_x - \frac{\varepsilon}{6} G_{xxx} - \frac{3}{2}\varepsilon\, G G_x = 0.$

On sait que (17.1) admet une soliton solution si $\alpha - 1 > 0$:

Korteweg-deVries: Phil. Magaz. Ser.5, Vol.39, n°240 (1895), p.429.

D'autre part, d'après le théorème abstrait non-linéaire de Cauchy-Kowalevski, on montre que (17.1) admet la solution unique dans B_ρ, $\rho < \rho_0$, pour $|t| < a(\rho_0 - \rho)$:

$$(17.2) \qquad B_\rho \equiv \left\{ \begin{array}{l} u: \text{ holomorphes dans} \\ \qquad \Omega_\rho = \{ z = x+iy,\ x \in \mathbb{R},\ |y| < \rho \}, \\ \text{avec } \| \hat{u}\, e^{\rho|k|} \|_{L^2} < +\infty \end{array} \right\},$$

où $\hat{u}\, e^{\rho k}$ est la transformée de Fourier de $u(z)$, si $u(0,x) \in B_{\rho_0}$. D'où

Théorème 17.1 Pour ε petit

$$(17.3) \qquad \| G - g \|_{L^2} = O(\varepsilon^2).$$

18. D'après le même raisonnement pour (16.6) et pour

$$(18.1) \qquad F_t + (\alpha + 1)F_x + \frac{\varepsilon}{6} F_{xxx} + \frac{3}{2}\varepsilon FF_x = 0$$

on voit que

$$(18.2) \qquad \| F - f \|_{L^2} = O(\varepsilon).$$

D'où, on a le

<u>Théorème</u> 18.1

$$(18.3)\quad \| \gamma - (F+G) \|_{L^2} = O(\varepsilon), \quad \| \phi_x - (G-F) \|_{L^2} = O(\varepsilon).$$

19. Par le même raisonnement que celui pour dériver (15.1)-(15.2), on déduit de (16.3):

$$(19.1)\quad \begin{aligned} &\gamma_t + \alpha\gamma_x + v_x - \frac{\varepsilon}{6} v_{xxx} + \varepsilon(\gamma v)_x = O(\varepsilon^2) \\ &v_t + \gamma_x + \alpha v_x - \frac{\alpha}{2}\varepsilon v_{xxx} - \frac{\varepsilon}{2} v_{xxt} + \varepsilon v v_x = O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

où $v = \phi_{o,x}$.

D'où, en accord avec (16.5) - (16.6):

$$(19.2)\quad m_t + (\alpha-1)m_x - \frac{3\alpha-1}{12}\varepsilon m_{xxx} - \frac{\varepsilon}{4} m_{xxt} - \frac{3}{2}\varepsilon m m_x = O(\varepsilon^2)$$

$$(19.3)\quad n_t + (\alpha+1)n_x - \frac{3\alpha+1}{12}\varepsilon n_{xxx} - \frac{\varepsilon}{4} n_{xxt} + \frac{3}{2}\varepsilon n n_x = O(\varepsilon).$$

On voit que le problème de Cauchy pour

$$(19.4)\quad M_t + (\alpha-1)M_x - \frac{3\alpha-1}{12}\varepsilon M_{xxx} - \frac{\varepsilon}{4} M_{xxt} - \frac{3}{2}\varepsilon M M_x = 0$$

admet une solution dans X_ρ si les données initiales sont dans X_{ρ_0}, $\forall \rho < \rho_0$. De même pour

$$(19.5)\quad N_t + (\alpha+1)N_x - \frac{3\alpha+1}{12}\varepsilon N_{xxx} - \frac{\varepsilon}{4} N_{xxt} + \frac{3}{2}\varepsilon NN_x = 0.$$

<u>Théorème</u> 19.1 Pour ε petit, on voit

$$(19.6)\quad \| M - m \|_\rho = O(\varepsilon^2), \quad \| N - n \|_\rho = O(\varepsilon).$$

20. Nous nous proposons d'appeller (19.4) l'équation de BP, en hommage à Broer et Peregrine qui , nous semble-t-il, ont mentionné pour la première fois une telle équation:

Peregrine: loc cit; Broer: loc cit.

Notons que (19.1) a une bonne relation linéaire de dispersion:

$$\lambda = -i\alpha\sigma \pm i\sigma\sqrt{\frac{1+\frac{\varepsilon}{6}\sigma^2}{1+\frac{\varepsilon}{2}\sigma^2}}$$

Nous pensons qu'il ne serait pas inutile de rappller ici une "critique" de Kruskal envers Benjamin à propos de préférence de u_{xxt} à u_{xxx}:

Kruskal: Lec.Note in Phys., t. 38(1974),Springer

Benjamin:Non-linear evolution equations, éd.Newell 1974.

Bien que l'équation considérée par Benjamin- Bona-Mahony (Phil. Trans.R.S.London,1972) conserve des intérêts considérables propres à elle, du point de vue d'études des ondes de surface de l'eau, il ne nous semble pas très erroné de donner raison à Kruskal plustôt qu'à BBM, vu nos considérations de n^{os} 17 - 19 qui nous a emmné à (19.4) - (19.5) qui sont aussi valables pour "les fréquences hautes" que pour "les fréquences basses".

21. <u>Une remarque finale</u> Une partie de ce travail a été publiée dans les deux Notes dans C.R.Acad.Sci. Paris, t.287, Ser. A, 1978, et sera publiée dans J. Math. Univ. Kyoto en 1979. Le rest sera publié dans les Notes en préparation.