数理解析研究所講究録
第357巻 1979年 165-188

放物型発展方程式の近似定理
— 有限要素法などへの作用素論的アプローチ.

東大 理 鈴木 貴

§1. Introdction.

近年偏微分方程式の数値解法において有限要素法が重要になった。それに伴ってその数学的基礎付もまた多くの研究者によってなされている。ここでは特に放物型発展方程式に対する最近の成果について述べる。

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域，$-A=-A(t,x,D)$ を滑らかな係数を持つ二階楕円型作用素：

$$-A = -A(t,x,D)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(t,x) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{2} b_j(t,x) \frac{\partial}{\partial x_j} + c(t,x),$$

$$\mathrm{Re} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(t,x)\xi_i \overline{\xi_j} \geq \delta' |\xi|_{\mathbb{C}^2}^2 \quad (\xi=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{C}^2)$$

$$(\delta'>0)$$

とする時放物型発展方程式(初期値境界値問題)：

$$
(\mathrm{P1})\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A} u = 0 & (0 < t \leq T,\ x \in \Omega) \\
u = 0 \quad (\text{Dirichlet}) & (0 < t \leq T,\ x \in \partial\Omega) \\
u|_{t=0} = \varphi(x) & (x \in \Omega)
\end{cases}
$$

或は

$$
(\mathrm{P1}')\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A} u = 0 & (0 < t \leq T,\ x \in \Omega) \\
\dfrac{\partial}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} u + \beta u = 0 \quad (\text{Neumann, 第3種}) & (0 < t \leq T,\ x \in \partial\Omega) \\
u|_{t=0} = \varphi(x) & (x \in \Omega)
\end{cases}
$$

を考える。但 $\frac{\partial}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}$ は $\mathcal{A}$ に沿う外法線微分，β は滑らかな関数である。方程式 (P1), (P1′) に従って $V = H_0^1(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ と置くことによって $V \times V$ 上の sesqui-linear form $a_t(\ ,\ )$ を

$$
a_t(u, v) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega a_{ij}(t, x) \frac{\partial}{\partial x_j} u \cdot \overline{\frac{\partial}{\partial x_i} v}\, dx
- \sum_{j=1}^{2} \int_\Omega b_j(t, x) \frac{\partial}{\partial x_j} u \cdot \overline{v}\, dx - \int_\Omega c(t, x) u \cdot \overline{v}\, dx + \int_{\partial\Omega} \beta(t, \xi) u \cdot \overline{v}\, dS(\xi)
$$

$$
(u, v \in V)
$$

と定め，$X = L^2(\Omega)$ 上 $a_t(\ ,\ )$ と associate する作用素 $A(t)$ を

$$
a_t(u, v) = (A(t) u, v) \qquad (u, v \in V,\ u \in D(A(t)))
$$

(但 $(\ ,\ )$ は L^2-内積)

によって定めれば，(P1), (P1′) は $\varphi \in X$ として $\underline{X\ 上}$ の発展方程式

$$
(\mathrm{P2})\begin{cases}
\dfrac{du}{dt} + A(t) u = 0 & (0 < t \leq T) \\
u(0) = \varphi
\end{cases}
$$

に帰着される事は良く知られている。1960年前後に発展した放物型発展方程式論によれば $A(t)$ は発展作用素 $\{U(t,s)\}$ を生

成し(P2)の$(0,T]$上 C^1-class $[0,T]$上 C^0-class の解 $u=u(t)$は

$$u = u(t) = U(t,0)g$$

で与えられる(Tanabe [18] Sobolevskii [12] [13] Kato [8] Kato-Tanabe [10] Fujie-Tanabe [2])。これらの論文はそれぞれに特色があるが $D(A(t))$($A(t)$のdomain)の不変性に関する取扱いがひとつの焦点であった。($V=H^1_0(\Omega)$に対しては$D(A(t))$はtに依存しないが$V=H^1(\Omega)$に対しては$D(A(t))$はtに依存する。)その中でもKato [8]は$A(t)$の分数巾を用いて簡潔に処理したしFujie-Tanabe [2]はformの理論によって見易い結果を出した。とりわけKato-Tanabe [10]は$D(A(t))$の不変性に対する仮定を完全に取り除き一般境界値問題にも適用できるようにした。以下の我々の問題においても$D(A(t))$が一定でない場合の取り扱いは一定の場合よりもより困難である。

さて(P1),(P1')の数値解法を行うためにこれらの方程式を離散化する。その際に空間変数に関しては有限要素法時間変数に関しては差分法を採用する。まず最初に有限要素法について述べよう。$\Omega\subset R^2$が多角形である時はΩを最大辺が高々$h(>0)$であるような三角形に分割する。各三角形を要素と言うが各要素毎に線型で連続なVの元全体をV_hと書く。(従って$V=H^1_0(\Omega)$である時はV_hの元は境界で0である。)もちろん

(i) $V_h \subset V$

(ii) V_hは有限次元

であるが更に$h \downarrow 0$とする時各hに対して分割したΩの要素が"一定以上つぶれない"時には評価

(iii) $\inf_{\chi \in V_h} \| v - \chi \|_1 \leq C h \| v \|_2 \quad (v \in H^2(\Omega) \cap V)$

が成立つ事がわかっている。以下$C>0$は一般的な定数で、$\|\cdot\|_m$は$H^m(\Omega)$-normである。(iii)は$h \downarrow 0$とする時のV_hの近似能力を示したもので左辺のinfはvのV_hの元による"補間"により実現される。今は境界が曲がっているから境界近くの要素上で近似空間V_hを修正しなければならない。(境界近くの要素は三角形にならない!) この技法はZlámal [19]によって確立されこの場合も(i)~(iii)が成立つようなV_hが構成されている。さてこのV_hによって作用素$A_h(t) : V_h \to V_h$を

$$a_t(u, \chi) = (A_h(t)u, \chi) \qquad (u, \chi \in V_h)$$

によって定めればV_h上の方程式

$$(P3) \begin{cases} \dfrac{du_h}{dt} + A_h(t) u_h = 0 & (0 < t \leq T) \\ u_h(0) = P_h \varphi \end{cases}$$

を方程式(P2)の近似として考える事ができる。但$P_h : X \to V_h$はL^2-直交射影である。この解は発展作用素$\{U_h(t,s)\}$を用いて

$$u_h(t) = U_h(t,0) P_h \varphi$$

と書けるのであるがV_hは有限次元であるからこの方程式は実

は常微分方程式である。それ故この方程式を時間変数tに関する差分法によって離散化すれば解を行列の計算によって数値的に求める事ができる。ここでは後退差分法を採用しよう：

$$(P4)\begin{cases} \dfrac{u_h^\tau(t+\tau)-u_h^\tau(t)}{\tau}+A_h(t+\tau)u_h^\tau(t+\tau)=0 \\ \qquad\qquad (t=n\tau;\ n=1,2,\cdots,N) \\ u_h^\tau(0)=P_h\varphi \qquad\qquad (V_h\text{上で}) \end{cases}$$

但$\tau>0$は$N\tau=T$なる(N:自然数)十分小な数とする。

離散化のmesh h, τを0に近づければおそらくは近似解u_h^τは真の解uに収束するであろうが我々の目標は誤差の解析特に収束の速さ(rate of convergence)を明示した，誤差のアプリオリな評価を示す事にある。この目的のために我々は$\|u_h^\tau(t)-u_h(t)\|_0$及び$\|u_h(t)-u(t)\|_0$を評価する。ここでこれらについていかなる評価が期待できるか考えてみよう。まず$\|u_h(t)-u(t)\|_0$について言う。(iii)により

$$\inf_{\chi\in V_h}\|v-\chi\|_0\le Ch^2\|v\|_2 \qquad (v\in H^2(\Omega)\cap V)$$

である事が知られる。[*] 一方において放物型発展作用素の平滑化の作用及び$A(t)$の楕円型評価によって

$$\|u(t)\|_2=\|U(t,0)\varphi\|_2\le C\,\|A(t)U(t,0)\varphi\|_0$$
$$\le C\cdot\frac{1}{t}\|\varphi\|_0 \qquad (0<t\le T)$$

が成立つ。従って評価

---

*) §2, Lemma 1参照

$$(1.1)\qquad \|u_h(t)-u(t)\|_0 \le C\,h^2/t\,\|\varphi\|_0 \qquad (0<t\le T)$$

が期待できよう。更にこの評価は収束の速さに関してこれ以上改良できない("optimal")ものと考えられる。一方 $\|u_h^\tau(t)-u_h(t)\|_0$ については

$$\|\tfrac{d}{dt}u_h(t)\|_0 = \|A_h(t)\,U_h(t,0)\,\varphi\|_0 \le C\cdot\frac{1}{t}\,\|\varphi\|_0$$

である事を考慮すれば

$$(1.2)\qquad \|u_h^\tau(t)-u_h(t)\|_0 \le C\,\tau/t\,\|\varphi\|_0 \qquad (t=n\tau;\ n=1,2,\cdots)$$

が期待できよう。ここで特にCはhに独立であるようにしなければいけないけれども。このようにして考える事により以下で我々は

$$(1.3)\qquad \|u_h^\tau(t)-u(t)\|_0 \le C\,(h^2/t+\tau/t)\,\|\varphi\|_0$$

を示す事を目標とするべきであることがわかった。実際 Fujita–Mizutani [4] は a の係数や ρ が時間によらない場合即ち $a_t\equiv a$ の場合にこれを示した。以下で述べるのはその $a_t\ne a$ の場合への拡張であり，そのような場合にもなお上述の optimal な速さで収束しているかという事は興味ある問題であるが結果は a_t が t について滑らかであれば o.k. である。以下§2では評価(1.1)を，§3では評価(1.2)を示す。

この§の最後に方法に関して述べる。例えば(P3)は偏微分方程式ではない。しかし $h\downarrow 0$ とすれば偏微分方程式に近くなるのであり，その時が我々の関心事であるから，例え

ば基底をとって常微分方程式系とみなすのは理論的に扱う際には煩雑で適当でない。むしろこれをV_h上の発展方程式としてとらえるのが都合がよい。実際前記の発展方程式の論文を再吟味すれば例えば安定性：

$$\|U_h(t,s)\| \le C \quad (h\text{によらぬ定数})$$

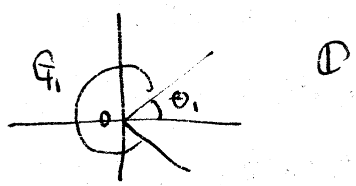
がわかる。というのも$A_h(t)$は$a_t|_{V_h\times V_h}$とassociateするm-sectorial operatorであるから数域の考察により例えば$\lambda\in G_1$に対し

$$\|\lambda(\lambda-A_h)^{-1}\| \le C$$

(G_1もCもhによらぬ。)がわかるからである。同様にして

$$\|A_h(t)U_h(t,s)\| \le C/(t-s)$$

などもわかる。



§2. Semi-discrete approximation

§1で述べたように Fujita-Mizutani [4] は評価

(2.1) $\|u_h(t)-u(t)\|_0 \le C h^2/t\, \|\varphi\|_0 \quad (0<t\le T)$

を$a_t\equiv a$の場合に示した。その後$a_t\not\equiv a$の場合についてはDirichlet境界問題についてHelfrichが制限された状況のもと(例えばV_hは$H^2(\Omega)$に属する元より成り$A(t)$は自己共役)で(2.1)を示し後にFujita-Suzuki [5]が一般的な状況のもとにこれを

示した。また Neumann (或は第3種) 境界問題については Suzuki [14] が (2.1) より弱い評価

$$\|u_h(t) - u(t)\|_0 \le C_\varepsilon (h^2/t)^{1-\varepsilon} \|g\|_0 \qquad (0<\varepsilon\le 1)$$

を示したが最近 Suzuki [15] によって最終的な評価 (2.1) が得られた。以下では完全な証明を与えるわけではないが主として Fujita-Suzuki [5], Suzuki [15] に従ってその概略を説明しよう。

最初に仮定より

$$(2.2)\begin{cases} |a_t(u,v)| \le C\|u\|_1\|v\|_1 & \\ \mathrm{Re}\, a_t(u,u) \ge \delta\|u\|_1^2 - \lambda\|u\|_0^2 & (u,v\in V) \\ |a_t(u,v) - a_s(u,v)| \le C|t-s|^{\theta}\|u\|_1\|v\|_1 & \end{cases}$$

$$\left(\tfrac{1}{2} \overset{*}{<} \theta \le 1,\ \delta,\ C>0\right)$$

が成立つことに注意する。ここで特に二番目の式で $\lambda=0$ としてよい。我々は $a_t(\ ,\ )$ のかわりに $a_t(\ ,\ )+C(\ ,\ )$ (C: 十分大) を考えてもよいからである。(Fujita-Mizutani [4] 等参照) (2.1) を示すためには誤差作用素を

$$E_h(t,s) = U_h(t,s)P_h - U(t,s)$$

とおく時

$$(2.3)\quad \|E_h(t,s)\| \le C\, h^2/(t-s) \qquad (0\le s<t\le T)$$

を示せばよい。

---

*) Fujie-Tanabe [2] によればこの時発展作用素 $\{U(t,s)\}$ 及び $\{U_h(t,s)\}$ が生成される。

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} U_h(t,\tau) P_h E_h(\tau,s) = U_h(t,\tau)[A_h(\tau) P_h - P_h A(\tau)] U(\tau,s)$$

の両辺に $\int_s^t d\tau$ を作用させると

$$P_h E_h(t,s) = \int_s^t U_h(t,\tau)\,[P_h A(\tau) - A_h(\tau) P_h]\, U(\tau,s)\,d\tau$$

である。ここで Ritz-projection $R_h(t): V \to V_h$ を

$$(2.4) \quad a_t(R_h(t)u, \chi) = a_t(u, \chi) \quad (u \in V,\ \chi \in V_h)$$

によって定める。Lax-Milgram の定理よりこれは well-defined である。$v \in D(A(t))$, $\chi \in V_h$ に対し

$$(A_h(t) R_h(t) v, \chi) = a_t(R_h(t) v, \chi)$$
$$= a_t(v, \chi) = (A(t) v, \chi)$$

故

$$A_h(t) R_h(t) v = P_h A(t) v$$

である事がわかりこれより

$$(2.5) \quad E_h(t,s) = (1-P_h) E_h(t,s) + P_h E_h(t,s)$$
$$= E_h^{(1)}(t,s) + E_h^{(2)}(t,s) + E_h^{(3)}(t,s)$$

但

$$(2.6) \begin{cases} E_h^{(1)}(t,s) = (1 - U_h(t,s) P_h)(R_h(t) - 1)\, U(t,s) \\ E_h^{(2)}(t,s) = \int_s^t U_h(t,\tau) A_h(\tau) [R_h(\tau) - R_h(t)]\, U(t,s)\,d\tau \\ E_h^{(3)}(t,s) = \int_s^t U_h(t,\tau) A_h(\tau)(R_h(\tau) - 1)[U(\tau,s) - U(t,s)]\,d\tau \end{cases}$$

を得る。我々は

$$\|E_h^{j}(t,s)\| \leq C h^2/(t-s) \quad (j = 1, 2, 3)$$

を示せばよい。

1°) $E_h^{(1)}(t,s)$ の評価

次の lemma が成立つ。(証明はあとで行う。)

Lemma 1. 評価

$$(2.7)\begin{cases} \|(R_h(t)-1)v\|_1 \leq Ch\|v\|_2 \\ \|(R_h(t)-1)v\|_0 \leq Ch^2\|v\|_2 \end{cases} \quad (v\in H^2(\Omega)\cap V)$$

が成立する。

この lemma と §1 の最後に述べた注意より

$$\|E_h^{(1)}(t,s)\| \leq (1+\|U_h(t,s)\|\,\|P_h\|)\|(R_h(t)-1)A(t)^{-1}\|$$
$$\cdot\|A(t)U(t,s)\|$$
$$\leq Ch^2/(t-s)$$

を得る。

2°) $E_h^{(2)}(t,s)$ の評価

やはり証明はあとで行う次の lemma が役立つ。

Lemma 2. 評価

$$(2.8)\quad \|(R_h(t)-R_h(s))v\|_0 \leq Ch^2|t-s|^{\theta}\|v\|_2 \quad (v\in H^2(\Omega)\cap V)$$

が成立つ。

この lemma により,

$$\|E_h^{(2)}(t,s)\| \leq \int_s^t \|U_h(t,\tau)A_h(\tau)\|\cdot\|(R_h(\tau)-R_h(t))A(t)^{-1}\|$$
$$\cdot\|A(t)U(t,s)\|d\tau$$
$$\leq C\int_s^t (t-\tau)^{-1+\theta}d\tau\cdot h^2(t-s)^{-1}$$
$$= Ch^2(t-s)^{\theta-1} \leq Ch^2(t-s)^{-1}$$

を得る。

γ) $E_h^{(3)}(t,s)$ の評価.

この評価は少々やっかいである。例えば Dirichlet 問題に関しては次の不等式が Sobolevskii [12] によって示されている。

Lemma 3. 評価

$$(2.9)\quad \| A(t)[U(t,s)-U(r,s)]A(s)^{-1}\| \leq C_\theta (t-r)^\theta (r-s)^{-\theta} \quad (0<\theta<1)$$

$$(0 \leq s < r < t \leq T)$$

が成立つ。

これを用いると

$$\| E_h^{(3)}(t,s)\varphi\|_0 \leq Ch^2 \|\varphi\|_2 \quad (\varphi \in D(A(s)) \equiv D)$$

が導かれる。実際

$$\| E_h^{(3)}(t,s)\varphi\|_0 \leq \int_s^t \| U_h(t,\tau)A_h(\tau)\| \, \| (R_h(\tau)-1)A(t)^{-1}\| \cdot \| A(t)[U(t,s)-U(\tau,s)]A(s)^{-1}\| \, \| A(s)\varphi\|_0 d\tau$$

$$\leq C_\theta \int_s^t (t-\tau)^{-1} h^2 (t-\tau)^\theta (\tau-s)^{-\theta} d\tau \, \|\varphi\|_2$$

$$= Ch^2 \|\varphi\|_2$$

である。同様に

$$\| E_h^{(j)}(t,s)\varphi\|_0 \leq Ch^2 \|\varphi\|_2 \quad (\varphi \in D)$$

$$(j=1,2)$$

もやさしい。Helfrich [7] はこのようにして

$$\|E_k(t,s)g\|_0 \le Ck^2\|g\|_2 \quad (g \in D)$$

を示した後で一種の duality 法によって (2.3) を証明した。Fujita-Suzuki [5], Suzuki [14] もこの方法によっている。Neumann(或は第3種)境界値問題に関しては (2.9) は成立たない。この場合 $D(A(t))$ は t に依存し $A(t)U(r,s)$ $(t \neq r)$ は意味を持たぬ。Suzuki [15] はこのような場合にも Agmon-Douglis-Nirenberg [1] の楕円型評価を用いて (2.3) を示した。その際には Helfrich の方法は使わずに基本的な telescoping の技法によって

$$\|E_k^{(3)}(t,s)\| \le Ck^2/(t-s)$$

を直接示した。

最後に Lemma 1, 2 の証明をしておこう。

4°) Lemma 1 の証

$$z = (R_k(t)-1)v \qquad (v \in H^2(\Omega)\cap V)$$

とおく。(2.2) より

$$\begin{aligned}
\delta\|z\|_1^2 &\le \mathrm{Re}\, a_t((1-R_k(t))v, (1-R_k(t))v) \\
&= \mathrm{Re}\, a_t((1-R_k(t))v, v) \qquad (\because (2.4)) \\
&= \mathrm{Re}\, a_t((1-R_k(t))v, v-\chi) \quad (\chi \in V_k) \quad (\because (2.4)) \\
&\le C\|(1-R_k(t))v\|_1 \cdot \|v-\chi\|_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \|z\|_1 &\le C \inf_{\chi \in V_k}\|v-\chi\|_1 \\
&\le Ck\|v\|_2 .
\end{aligned}$$

これで前半は示された。後半は Nitsche の tequne による。即ち

$$\|z\|_0^2 = a_t(z, A(t)^{*-1}z)$$

$$= a_t((1-R_h(t))v, A(t)^{*-1}z-\chi) \quad (\chi\in V_h)\ (\because (2.4))$$

$$\le C\,\|(1-R_h(t))v\|_1\,\|A(t)^{*-1}z-\chi\|_1$$

$$\therefore\ \|z\|_0^2 \le C\,h\,\|v\|_2 \cdot \inf_{\chi\in V_h}\|A(t)^{*-1}z-\chi\|_1$$

$$\le Ch\,\|v\|_2\cdot h\,\|A(t)^{*-1}z\|_2 \le Ch^2\|v\|_2\|z\|_0 .$$

q.e.d.

5°) Lemma 2 の証:

$a_t^*(u,v)=\overline{a_t(v,u)}$ とおくと a_t^* は $V\times V$ 上の sesqui-linear form で (2.2) をみたし，a_t^* と associate する m-sectorial operator が $A(t)^*$ であることは良く知られている。Ritz-projection $\hat{R}_h(t)$: $V\to V_h$ を

$$(2.10)\quad a_t^*(\hat{R}_h(t)u,\chi)=a_t^*(u,\chi) \quad (u\in V,\ \chi\in V_h)$$

で定めれば Lemma 1 に対応して

$$(2.11)\ \begin{cases}\|(\hat{R}_h(t)-1)v\|_1 \le Ch\,\|v\|_2 \\ \|(\hat{R}_h(t)-1)v\|_0 \le Ch^2\|v\|_2\end{cases} \quad (v\in H^2(\Omega)\cap V)$$

が成立つ。さて $z=(R_h(t)-R_h(s))v$ とおけば

$$\|z\|_0^2 = a_t(z, A(t)^{*-1}z)$$

$$= a_t(z, \hat{R}_h(t)A(t)^{*-1}z) \quad (\because z\in V_h,\ (2.10))$$

$$= a_t((1-R_h(s))v, \hat{R}_h(t)A(t)^{*-1}z) \quad (\because (2.4))$$

$$= a_t((1-R_h(s))v, \hat{R}_h(t)A(t)^{*-1}z)$$

$$- a_s((1-R_h(s))v, \hat{R}_h(t)A(t)^{*-1}z) \quad (\because (2.4))$$

$$= \{ a_t((1-R_h(s))v, (\hat{R}_h(t)-1)A(t)^{*-1}z)$$

$$- a_s((1-R_h(s))v, (\hat{R}_h(t)-1)A(t)^{*-1}z) \}$$

$$+ \{ a_t((1-R_h(s))v, A(t)^{*-1}z) - a_s((1-R_h(s))v, A(t)^{*-1}z) \}$$

$$= \{ a_t((1-R_h(s))v, (\hat{R}_h(t)-1)A(t)^{*-1}z)$$

$$- a_s((1-R_h(s))v, (\hat{R}_h(t)-1)A(t)^{*-1}z) \}$$

$$+ a_s((1-R_h(s))v, (A(s)^{*-1} - A(t)^{*-1})z)$$

$$= \{ a_t((1-R_h(s))v, (\hat{R}_h(t)-1)A(t)^{*-1}z)$$

$$- a_s((1-R_h(s))v, (\hat{R}_h(t)-1)A(t)^{*-1}z) \}$$

$$+ a_s((1-R_h(s))v, (1-R_h(s))(A(s)^{*-1} - A(t)^{*-1})z)$$

$$(\because (2.4))$$

$$\leq C|t-s|^{\theta} \|(1-R_h(s))v\|_1 \, \|(\hat{R}_h(t)-1)A(t)^{*-1}z\|_1$$

$$+ C\|(1-R_h(s))v\|_1 \, \|(1-R_h(s))(A(s)^{*-1} - A(t)^{*-1})z\|_1$$

$$\leq C h^2 |t-s| \, \|v\|_2 \, \|z\|_0 + C h^2 \, \|(A(s)^{*-1} - A(t)^{*-1})z\|_2 \|v\|_2$$

ここで $\quad \|(A(t)^{*-1} - A(s)^{*-1})z\|_2 \leq C|t-s|^{\theta} \|z\|_0$

なる事は Agmon-Douglis-Nirenberg の楕円型評価よりわかり

$$\|z\|_0 \leq C h^2 |t-s|^{\theta} \|v\|_2$$

を得る。 q.e.d.

§3. Full-discrete approximation.

この§では Fujita-Mizutani [4] によって $a_t \equiv a$ の場合に得られた評価

$$(3.1) \quad \|u_h^{\tau}(t) - u_h(t)\|_0 \leq C\, \tau/t \, \|g\|_0 \quad (t=n\tau,\ n=1,\cdots,N)$$

を $a_\gamma = a$ の場合について示す。これについては最初 Suzuki [16] が (3.1) より弱い評価

$$\|u_h^\zeta(\gamma) - u_h(\gamma)\|_0 \leq C_\varepsilon \left(\frac{1}{n}\right)^{1-\varepsilon} \|\varphi\|_0$$

を示し後に Suzuki [17] によって (3.1) が示された。また Saymon [11] は Dirichlet 問題に対し

$$\|u_h^\zeta(\gamma) - u_h(\gamma)\|_0 \leq C \cdot \frac{1}{n} (1 + \log n) \|\varphi\|_0$$

を十分大きな n に対して示している。以下では (3.1) を示すために Suzuki [17] によって得られた次の theorem の証明の概略を述べる。

<u>Theorem</u> X, V を Hilbert 空間で $V \underset{dense}{\subset} X$ なるものとし，$\{V_h\}_{h>0}$ を V の有限次元部分空間の一つの族とする。$a_\gamma(\ ,\ )$ は $V \times V$ 上の sesqui-linear form で次の条件をみたすものとする：

$$(3.2)\begin{cases} |a_\gamma(u, v)| \leq C \|u\|_V \|v\|_V & (u, v \in V) \\ \mathrm{Re}\, a_\gamma(u, u) \geq \delta \|u\|_V^2 & (C, \delta > 0) \end{cases}$$

更に $V \times V$ 上の別の sesqui-linear form $\dot{a}_\gamma(\ ,\ )$ があって，

$$(3.3)\begin{cases} |\dot{a}_\gamma(u, v)| \leq C \|u\|_V \|v\|_V & \\ |\dot{a}_\gamma(u, v) - \dot{a}_s(u, v)| \leq C |\gamma - s|^\alpha \|u\|_V \|v\|_V & (u, v \in V) \\ \lim\limits_{\gamma \to s} \sup\limits_{\substack{u, v \in V \\ \|u\|_V, \|v\|_V \leq 1}} \left| \frac{1}{\gamma - s} (a_\gamma(u, v) - a_s(u, v)) - \dot{a}_s(u, v) \right| = 0 & \end{cases}$$

をみたすものとする。その時 $a_\gamma|_{V_h \times V_h}$ と associate する

m-sectorial operator を $A_h(t)$, $A_h(t)$ が generate する発展作用素を $\{U_h(t,s)\}$ とする時評価

$$(3.4)\quad \|(1+\tau A_h(n\tau))^{-1}(1+\tau A_h((n-1)\tau))^{-1}\cdots(1+\tau A_h(\tau))^{-1}$$

$$- U_h(n\tau, 0)\| \leq C\left(\frac{1}{n} + \tau^{\alpha}\right) \quad (n=1,2,\cdots,N)$$

が成立つ。ここで定数 C は (3.2), (3.3) に現われる定数 C, δ, α のみによる。——

この定理によって、$\mathfrak{a}$ の係数や β が滑らかな場合には a_t' を a_t の定義式において $\mathfrak{a}$ の係数及び β を時間に関して微分したものととり換えて定めてやれば (3.3) が $\alpha=1$ として成立ち (3.4) の右辺第2項は第1項に吸収されて求める評価 (3.1) が得られる。以下の Theorem の略証においては簡単のために $\alpha=1$ とし、また煩雑であるから suffix h を省き $t_k = k\tau$ と書くことにしよう。

さて

$$\begin{cases} u^{\tau}(t) = (1+\tau A(t_n))^{-1}\cdots\cdots(1+\tau A(t_1))^{-1}\varphi \\ u(t) = U(t,0)\,\varphi \qquad\qquad (t = t_n = n\tau) \end{cases}$$

とおけば

$$\begin{cases} u^{\tau}(t_{n+1}) - u^{\tau}(t_n) = -\tau A(t_{n+1})\, u^{\tau}(t_{n+1}) \\ u(t_{n+1}) - u(t_n) = -\int_{t_n}^{t_{n+1}} A(r)\, u(r)\, dr \end{cases}$$

故、$e^{\tau}(t) = u^{\tau}(t) - u(t)$ とおくと、

$$e^{\tau}(t_{n+1}) - e^{\tau}(t_n)$$

$$= \int_{t_n}^{t_{n+1}} [A(r)u(r) - A(t_{n+1})u(t_{n+1})]\,dr$$
$$- \tau A(t_{n+1}) e^{\tau}(t_{n+1})$$

であるから

$$e^{\tau}(t_{n+1}) = (1+\tau A(t_{n+1}))^{-1} e^{\tau}(t_n)$$
$$+ (1+\tau A(t_{n+1}))^{-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} [A(r)u(r) - A(t_{n+1})u(t_{n+1})]\,dr$$

が成立つ。これと $e^{\tau}(0)=0$ （$\because u^{\tau}(0)=\varphi$ である。）に注意すれば $e^{\tau}(t) = E^{\tau}(t)\varphi$ として、

$$(3.5)\quad -E^{\tau}(t_n) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (1+\tau A(t_n))^{-1} \cdots (1+\tau A(t_k))^{-1}$$
$$\times [A(t_k)U(t_k,0) - A(r)U(r,0)]\,dr$$

が成立つことがわかる。そこで作用素 $A(t_k)U(t_k,0) - A(r)U(r,0)$ 及び $(1+\tau A(t_n))^{-1} \cdots (1+\tau A(t_k))^{-1}$ について考察するわけであるがこれらについて次の lemma が成立つ。

Lemma 1. $t>r>s$ に対し

$$A(t)U(t,s) - A(r)U(r,s)$$
$$= A(t)[e^{-(t-s)A(t)} - e^{-(r-s)A(t)}]$$
$$+ A(t)^{\rho} Z_{\rho}(t,r,s) \qquad (0<\rho<\tfrac{1}{2})$$

とする時

$$\|Z_{\rho}(t,r,s)\| \leq C_{\rho}(t-r)(r-s)^{\rho-1}$$

が成立つ。——

Lemma 2. 評価

$$\|(1+\tau A(t_n))^{-1}\cdots(1+\tau A(t_k))^{-1}A(t_{k+1})^{\beta}\|$$
$$\leq C_\beta\,\tau^{-\beta}(n-k)^{-\beta} \qquad (0\leq\beta<\tfrac{4}{3})$$

が成立つ。但 $\beta>1$ の時は $n-k\geq 2$ とする。——

これにより

$$(3.6)\qquad E^{\tau}(t_n)=E^{\tau}_{(1)}(t_n)+E^{\tau}_{(2)}(t_n)$$

但

$$(3.7)\quad\begin{cases} -E^{\tau}_{(1)}(t_n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(1+\tau A(t_n))^{-1}\cdots(1+\tau A(t_k))^{-1}A(t_k) \\ \qquad\qquad\times\,[e^{-t_k A(t_k)}-e^{-rA(t_k)}]\,dr \\ -E^{\tau}_{(2)}(t_n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(1+\tau A(t_n))^{-1}\cdots(1+\tau A(t_k))^{-1}A(t_k)^{\beta} \\ \qquad\qquad\times\,Z_\beta(t_k,r,0)\,dr \qquad (0<\beta<\tfrac{1}{2}) \end{cases}$$

を得る。我々は

$$\|E^{\tau}_{(j)}(t_n)\|\leq C\frac{1}{n} \qquad (j=1,2)$$

を示せばよい。

i) $E^{\tau}_{(2)}(t_n)$ の評価.

Lemma 1, 2 より

$$\|E^{\tau}_{2}(t_n)\|\leq\sum_{k=1}^{n}\|(1+\tau A(t_n))^{-1}\cdots(1+\tau A(t_k))^{-1}A(t_k)^{\beta}\|$$
$$\times\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|Z_\beta(t_k,r,0)\|\,dr$$
$$\leq C\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^{-\beta}\cdot\tau^{-\beta}\cdot\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k-r)\,r^{-1+\beta}\,dr$$
$$\leq C\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^{-\beta}\tau^{-\beta}\cdot\tau^{2}\cdot(k\tau)^{-1+\beta}$$

$$= C\tau \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)^{-\beta} k^{-1+\beta}$$
$$\leq C\tau \quad \leq C\cdot\frac{1}{n}$$

と評価できる。

2°) $E^{\tau}_{(1)}$ の評価.

$\|nE^{\tau}_{(1)}\| \leq C$ を言う。そのために

$$n E^{\tau}_{(1)} = F^{\tau}_{(1)} + F^{\tau}_{(2)}$$

但

$$F^{\tau}_{(1)}(t_n) = \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)(1+\tau A(t_n))^{-1}\cdots(1+\tau A(t_k))^{-1}A(t_k)$$
$$\times \int_{t_{k-1}}^{t_k} [e^{-t_k A(t_k)} - e^{-rA(t_k)}]\,dr$$
$$F^{\tau}_{(2)}(t_n) = \sum_{k=1}^{n} (k-1)(1+\tau A(t_n))^{-1}\cdots(1+\tau A(t_k))^{-1}A(t_k)$$
$$\times \int_{t_{k-1}}^{t_k} [e^{-t_k A(t_k)} - e^{-rA(t_k)}]\,dr$$

と分ける。 $0<\beta<\frac{1}{3}$ とする時

$$\|F^{\tau}_{(1)}(t_n)\| \leq \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)\,\|(1+\tau A(t_n))^{-1}\cdots(1+\tau A(t_k))^{-1}A(t_k)^{1+\beta}\|$$
$$\times \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|A(t_k)^{-\beta}[e^{-t_k A(t_k)} - e^{-rA(t_k)}]\|\,dr$$
$$\leq C \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)\cdot(n-k+1)^{-1-\beta}\tau^{-1-\beta}$$
$$\times \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - r)\, r^{\beta-1}\,dr$$
$$\leq C\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^{-\beta}\tau^{-1-\beta}\cdot\tau^2\cdot(k\tau)^{\beta-1}$$
$$= C\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^{-\beta}k^{\beta-1} \leq C$$

となりまた

$$\|E^{\tau}_{(2)}(t_n)\| \leq \sum_{k=2}^{n}(k-1)\,\|(1+\tau A(t_n))^{-1}\cdots(1+\tau A(t_k))A(t_k)^{1-\beta}\|$$
$$\times \int_{t_{k-1}}^{t_k}\|A(t_k)^{\beta}[e^{-t_k A(t_k)}-e^{-rA(t_k)}]\|dr$$
$$\leq C\sum_{k=2}^{n}(k-1)(n-k+1)^{-1+\beta}\tau^{-1+\beta}$$
$$\times \int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k-r)\cdot r^{-\beta-1}dr$$
$$\leq C\sum_{k=2}^{n}(k-1)\tau^{\beta-1}(n-k+1)^{\beta-1}\cdot\tau^{2}\cdot(k-1)^{-\beta-1}\tau^{-\beta-1}$$
$$= C\sum_{k=2}^{n}(k-1)^{-\beta}(n-k+1)^{\beta-1} \leq C$$

を得る。但，以上の証明は厳密でない。Lemma 2 において $\beta>1$ の時は $n-k\geq 2$ としなければならぬからである。それ故 $E^{\tau}_{(1)}$ において最初から第 n 項は別にとり出して評価しなければならない。

3°) Lemma 2 の証明の方針：

adjoint をとることにより

$$U^{\tau}(t_n,t_l)=\begin{cases}(1+\tau A(t_n))^{-1}\cdots(1+\tau A(t_{l+1}))^{-1} & (l>n)\\ 1 & (l=n)\end{cases}$$

とおく時

$$\|A(t_n)^{\beta}U^{\tau}(t_n,t_l)\|\leq C_{\beta}(t_n-t_l)^{-\beta}\quad(0<\beta<\tfrac{4}{3})$$

を示せばよいことがわかる。これについては分数巾を用いて発展作用素を構成した Kato [8] に

$$\|A(t)^{\beta}U(t,s)\|\leq C_{\beta}(t-s)^{-\beta}\qquad(0<\beta<\tfrac{4}{3})$$

が示されているからその方法をまねればよい。そのためには上の式を出すために Kato [8] が必要とした状況に対応す

る状況が我々の離散化した場合でも成立っているかどうか確かめねばならない。幸にもそれらはすべてうまくゆく。

4°) Lemma 1 の証明の方針:

Kato-Tanabe [10] の構成法において $e^{-(t-s)A(t)}$ は $U(t,s)$ の第0次近似である。さて放物型発展作用素においてはその主要な部分は第0次近似と考えられる。即ち第1次近似以後は第0次近似に比べると"おとなしい"。これがこの lemma の意味である。この lemma の主張は Z_β の評価が成立つ事であるが、Z_β は大まかに言って第1次近似以後であるから上述の論法によればその最も主要な部分は第1次近似であろう。この考えは Kato-Tanabe [10] の構成法を検討していくらかの計算を行えば正当化することができる。残る問題は第1~~次近~~次近似の評価になるがこれには作用素 $A(t)$ の分数巾及びそれらの時間に関する微分などについての精密な考察がいる。その際には form の理論と分数巾の理論を結びつけた Kato [9] の方法が参考になる。

References

[1] Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg, L., Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, Comm. Pure Appl. Math., 12, 623-

727(1959); II. 17, 35-92(1964).

[2] Fujie, Y., Tanabe, H., On some parabolic equations of evolution in Hilbert space, Osaka J. Math., 10, 115-130 (1973).

[3] Fujita, H., On the semi-discrete finite element approximation for the evolution equation $u_t + A(t)u = 0$ of parabolic type, Topics in Numerical Analysis III, 143-157, Academic Press, 1977.

[4] Fujita, H., Mizutani, A., On the finite element method for parabolic equations, I: Approximation of holomorphic semigroups, J. Math. Soc. Japan, 28, 749-771 (1976).

[5] Fujita, H., Suzuki, T., On the finite element approximation for evolution equations of parabolic type, (Proc. 3rd IRIA Inter. Symp. on Comp. Sci. and Eng., Versailles, 1977), to appear.

[6] Helfrich, H. P., Fehlerabschätzungen für das Galerkinverfahren zur Lösung von Evolutionsgleichungen, Manus. Math., 13, 219-235(1974).

[7] Helfrich, H. P., Lokale Konvergenz des Galerkinverfahrens bei Gleichungen vom parabolischen Typ in Hilberträumen, Thesis, 1975.

[8] Kato, T., Abstract evolution equations of parabolischen type in Banach and Hilbert spaces, Nagoya Math. J., 5, 93-125 (1961).

[9] Kato, T., Fractional powers of dissipative operators, J. Math. Soc. Japan, 13, 246-274 (1961).

[10] Kato, T., Tanabe, H., On the abstract evolution equations,

Osaka Math. J., 14, 107-133 (1962).

[11] Sammon, P.H., Approximation for parabolic equations with time dependent coefficients, Thesis, 1978.

[12] Sobolevskii, P. E., Parabolic type equations in Banach spaces, Trudy Moscow Math., 10, 297-350 (1961).

[13] Sobolevskii, P. E., On equations of parabolic type in Banach spaces with unbounded time-dependent generators whose fractional powers are of constant domain (in Russian), Dokl. Acad. Nauk SSSR, 138, 59-62 (1961).

[14] Suzuki, T., An abstract study of Galerkin's method for the evolution equation $u_t + A(t)u = 0$ of parabolic type with the Neumann boundary condition, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 25, 25-46 (1978).

[15] Suzuki, T., On the optimal rate of convergence of Galerkin finite element approximation for parabolic equations with Neumann boundary conditions, to appear

[16] Suzuki, T., On the rate of convergence of the difference finite element approximation for parabolic equations, Proc. Japan Acad., 54, Ser. A, 326-331 (1979).

[17] Suzuki, T., On the optimal rate of convergence of the difference finite element approximation for parabolic equations, to appear.

[18] Tanabe, H., On the equations of evolution in a Banach space, Osaka Math. J., 12, 363-376 (1960).

[19] Zlámal, M., Curved elements in finite element method I, SIAM J. Numer. Anal., 10, 229-240 (1973).