数理解析研究所講究録
第357巻 1979年 208-218

ある種の擬微分作用素とその準楕円性への応用

東京電機大 理工学部 荒牧淳一

0. 序

本講演では、特性集合 Σ が有限個の閉錐部分多様体 $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n$ の和集合となる擬微分作用素 P を考察する。ある種の横断性条件と包含性条件の下で P が準楕円型となるための必要十分条件を与える。

$n=1$ のとき、我々の考えるクラスは Helffer [5] によって与えられたクラス $L^{m,\frac{M}{k}}(X;\Sigma)$, さらに $k=2$ のときには Sjöstrand [8] によって与えられたクラス $L^{m,\frac{M}{c}}(X;\Sigma)$ と一致する。(Helffer [4] も参照). $n=1$, $M=k=2$ で Σ が包合的なときには Boutet de Monvel [1] は我々のクラスより一般な $OPS^{-m,-M}$ にパラメトリックスをもつための必要十分条件を得た。これはまた P が損失 1 の準楕円型であるための必要十分条件でもある。一般の M, k については [5] は損失 $\frac{M}{k}$ の準楕円型であることを証明するために、P に対する左パラメトリックスを、

構成した。これは[1]の一般化である。

我々は[5]で開発された手法を使いPに関するある種の不変量を定義し、それを用いてPが準楕円的であるための必要十分条件を述べる。証明については概略を述べるにとどめる。

1. 定義と結果

XをN次元パラコンパクトC^∞-多様体，$T^*X\setminus 0$をXの余接バンドルからゼロ切断面を除いたものとする。

<u>定義 1.1</u>　$\Sigma_1,\Sigma_2,\cdots,\Sigma_n$を$T^*X\setminus 0$における余次元$p_1,p_2,\cdots p_n$の閉錐部分多様体，$m$を実数，$M_1,M_2,\cdots,M_n$を非負整数，$k_1,k_2,\cdots,k_n$を2以上の整数とする。このとき擬微分作用素$P$がクラス$OPL^{m,M_1,\cdots,M_n}_{k_1,\cdots,k_n}(X;\Sigma_1,\Sigma_2,\cdots,\Sigma_n)$に属するとは各局所座標系$U\subset X$において$P$の表象$p(x,\xi)$が次の(1.1)〜(1.3)を満たすときをいう：

(1.1)　$p(x,\xi)\sim\sum_{j=0}^{\infty}p_{m-j}(x,\xi)$，ここで$p_{m-j}\in C^\infty(\mathbb{R}^N\times(\mathbb{R}^N\setminus 0))$であり，$m-j$次の正値斉次性をもつ。

(1.2)　Uに含まれる各コンパクト集合Kに対して，定数$C_K>0$が存在して$(x,\xi)\in K\times(\mathbb{R}^N\setminus 0)$，$|\xi|\geq 1$のとき

$$\frac{|p_{m-j}(x,\xi)|}{|\xi|^{m-j}}\leq C_K\prod_{l=1}^{n}d_l(x,\xi)^{(M_l-k_l j)_+}$$

(1.3) Uに含まれる各コンパクト集合Kに対して，定数$C_K' > 0$が存在して $(x,\xi) \in K \times (\mathbb{R}^N \setminus 0)$，$|\xi| \geq 1$のとき

$$\frac{|p_m(x,\xi)|}{|\xi|^m} \geq C_K' \prod_{\ell=1}^{n} d_\ell(x,\xi)^{M_\ell}$$

ここで $d_\ell(x,\xi) = \inf_{(y,\eta)\in\Sigma_\ell} \{ |y-x| + |\eta - \frac{\xi}{|\xi|}| \}$ であり，$s \in \mathbb{R}$に対して $(s)_+ = \sup(0, s)$ である。

注意 1.2. もしあるiに対して$M_i = 0$ならば
$OPL^{m, M_1, \cdots, M_n}_{k_1, \cdots, k_n}(X; \Sigma_1, \cdots, \Sigma_n) = OPL^{m, M_1, \cdots, M_{i-1}, M_{i+1}, \cdots, M_n}_{k_1, \cdots, k_{i-1}, k_{i+1}, \cdots, k_n}(X; \Sigma_1, \cdots, \Sigma_{i-1}, \Sigma_{i+1}, \cdots, \Sigma_n)$ となる。また $P \in OPL^{m, M_1, \cdots, M_n}_{k_1, \cdots, k_n}(X; \Sigma_1, \cdots, \Sigma_n)$ のとき Pの特性集合Σは$\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n$の和集合となる。

定義 1.3. $q_1, q_2 \in L^{m, M_1, \cdots, M_n}_{k_1, \cdots, k_n}$ ((1.1)～(1.3)をみたす表象のクラス)とするとき，$T^*X \setminus \{0\}$のある錐近傍Uで$q_1 \equiv q_2$とは，$q_1 - q_2 \in L^{m, M_1 + (k_1 - 1), \cdots, M_n + (k_n - 1)}_{k_1, \cdots, k_n}$ であるとする。

このとき次が成立する。

命題 1.4. $P \in OPL^{m, M_1, \cdots, M_n}_{k_1, \cdots, k_n}(X; \Sigma_1, \cdots, \Sigma_n)$ とする。(実際は (1.1) と (1.2) を満たすだけでよい)。このとき，各$\rho \in \Sigma$に対して $I_\rho = \{ i ; \rho \in \Sigma_i \} = (i_1, \cdots, i_s)$ とおくと，あるρの錐近傍Uが存在してUで

$$q \overset{\text{def.}}{=} \exp\left(-\frac{1}{2i} \sum_{\ell=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \frac{\partial}{\partial \xi_\ell}\right) p = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t!} \left(\frac{1}{2i} \sum_{\ell=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \frac{\partial}{\partial \xi_\ell}\right)^t p$$

と定義すると g は $L^{m, M_{i_1},\dots,M_{i_s}}_{k_{i_1},\dots,k_{i_s}} / L^{m, M_{i_1}+(k_{i_1}-1),\dots, M_{i_s}+(k_{i_s}-1)}_{k_{i_1},\dots,k_{i_s}}$ で考えたとき、局所斉次正準変換 τ ; $T^*X\setminus\{0\} \longrightarrow T^*\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$ の F で不変である。このことは F を τ に付随した楕円型フーリエ積分作用素, p' を $P' = FPF^{-1}$ の表象, g' を p' から上の公式により作られる表象とすると $g'(\tau(\rho')) = g(\rho')$, $(\rho' \in U)$ を意味する。

次に $g \sim \sum_{j=0}^{\infty} g_{m-j} \in L^{m,M_{i_1},\dots,M_{i_s}}_{k_{i_1},\dots,k_{i_s}} / L^{m,M_{i_1}+(k_{i_1}-1),\dots,M_{i_s}+(k_{i_s}-1)}_{k_{i_1},\dots,k_{i_s}}$ として $T_\rho(T^*X\setminus\{0\})^{\sum_{\ell=1}^{s}(M_{i_\ell}-k_{i_\ell}\cdot j)}$ 上の $\sum_{\ell=1}^{s}(M_{i_\ell}-k_{i_\ell}\cdot j)$ -線型形式 $\tilde{g}_{m-j}$ を次で定義する：

$X^1_{i_1}, X^2_{i_1}, \dots, X^{M_{i_1}-k_{i_1}\cdot j}_{i_1}, \dots, X^1_{i_s}, \dots, X^{M_{i_s}-k_{i_s}\cdot j}_{i_s} \in T_\rho(T^*X\setminus\{0\})$ に対して

$$\tilde{g}_{m-j}(\rho)\,(X^1_{i_1}, \dots, X^{M_{i_s}-k_{i_s}\cdot j}_{i_s}) = \prod_{\ell=1}^{s} \frac{1}{(M_{i_\ell}-k_{i_\ell}\cdot j)!}\,(\tilde{X}^1_{i_1}\cdots\tilde{X}^{M_{i_s}-k_{i_s}\cdot j}_{i_s}\, g_{m-j})(\rho)$$

ここで $\tilde{X}$ は X の ρ の近傍への拡張である。

注意1.5. (1) 上の $\tilde{g}_{m-j}$ の定義は g のクラスのとり方に独立、また $\tilde{g}_{m-j}$ は対称である。

(2) $n=1$, $M_1 = k_1$ のときは $g_m(x,\xi) = P_m(x,\xi)$, $g_{m-1}(x,\xi) = P_{m-1}(x,\xi) - \frac{1}{2i}\sum_{\ell=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_\ell}\frac{\partial}{\partial \xi_\ell} P_m(x,\xi)$ である。

我々はさらに $\rho \in \Sigma$ に対して次の定義をする。

$$\tilde{g}(\rho, X) = \sum_{j=0}^{J_{I_\rho}} \tilde{g}_{m-j}(\rho)(X,\dots,X), \quad X \in T_\rho(T^*X\setminus\{0\})$$

ここで $J_{I_\rho} = \mathrm{Max}\{M_{i_\ell}/k_{i_\ell} ;\ 1 \le \ell \le s\}$ である。

$$\Gamma_\rho = \{ \tilde{q}_\rho(\rho, X) \; ; \; X \in T_\rho(T^*X \setminus \{0\}) \}。$$

注意 1.6.　　$n=1$, $M_1 = k_1$ のときは

$$\tilde{q}_\rho(\rho, X) = (\text{transversal hessian of } P_m) + (\text{subprincipal symbol})$$

となる。

次に我々は $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n$ に次のような横断性条件と包合性条件を仮定する：

(H.1)　各 $\rho \in \Sigma$ に対して $I_\rho = (i_1, \cdots, i_s)$ とおくとき $p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_s}$ 個の C^∞-実数値斉次関数 $u^k_{i_j}$, $1 \le k \le p_{i_j}$, $1 \le j \le s$, が ρ の錐近傍で存在して、そこで

$$\Sigma_{i_j} = \{ u^1_{i_j} = u^2_{i_j} = \cdots = u^{p_{i_j}}_{i_j} = 0 \}$$

とかける。また $du^k_{i_j}$ は ρ で1次独立であるとする。

(H.2)　各 i, j に対して $\Sigma_i \cap \Sigma_j$ は包合的である。すなわち $u^1_i, \cdots, u^{p_i}_i$, $u^1_j, \cdots, u^{p_j}_j$ を (H.1) の如き関数とするとき $\Sigma_i \cap \Sigma_j$ 上

$\{ u^k_i, u^l_j \} = 0$ が成りたつ。

(H.3)　$\sum_{l=1}^{N} \xi_l \frac{\partial}{\partial \xi_l}$, $H_{u^k_{i_j}}$ $(1 \le k \le p_{i_j}, 1 \le j \le s)$ は ρ で1次独立である。

ここでハミルトン-ヤコビのベクトル場 H_f とポアソンの括弧式はそれぞれ次の公式で定義される：

$$H_f = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right),$$

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} \right).$$

このとき我々は次の定理を得る：

定理 1.7.　$P \in OPL^{m, M_1, \cdots, M_n}_{k_1, \cdots, k_n}(X; \Sigma_1, \cdots, \Sigma_n)$ とする。(H.1), (H.2), (H.3) を仮定するとこのとき P が $\rho \in \Sigma$ で損失 M_{I_ρ} の準楕円型であるための必要十分条件は Γ_ρ が原点を含まないことである。ここで $I_\rho = (i_1, \cdots, i_s)$ とするとき $M_{I_\rho} = \frac{M_{i_1} + \cdots + M_{i_s}}{k_{i_1} + \cdots + k_{i_s}}$ でありまた P が ρ で損失 M_{I_ρ} の準楕円型であるとは $u \in \mathcal{D}'(X)$, ρ で $Pu \in H^s$ のとき ρ で $u \in H^{s+m-M_{I_\rho}}$ が成りたつことであるとする。

さらに我々は次を得る：

系 1.8.　上定理における仮定が成り立つとする。各 $\rho \in \Sigma$ に対して Γ_ρ が原点を含まないとすると、P は損失 M の準楕円型である。ここで $M = \mathrm{Max}\{M_{I_\rho}; \rho \in \Sigma\}$ であり、P が損失 M の準楕円型であるとは、$u \in \mathcal{D}'(X)$, $Pu \in H^s$ のとき $u \in H^{s+m-M}$ が成り立つこととする。

注意 1.9. (1)　我々は定理の証明において P の左パラメトリックスをクラス $L^{M_{I_\rho}-m}_{\rho, \delta}$ に構成する。ここで $\rho = 1 - \frac{1}{k}$, $\delta = 0$, $k = \mathrm{Min}\{k_j; 1 \leq j \leq n\}$ である。(クラス $L^{M_{I_\rho}-m}_{\rho, \delta}$ については Hörmander [5] を参照されたい。)

(2). M_{I_ρ} が $\rho \in \Sigma$ に対して定数ならば系の条件は必要でもある。

(3). $n = 1$ のときこの定理は Helffer [5] によって証明された。

2. 命題1.4の証明の概略.

$\rho\in\Sigma$, $I_\rho=(i_1,\cdots,i_s)$ とすると C^∞-実数値斉次関数 $u_{i_l}^k$ ($1\le k\le p_{i_l}$, $1\le l\le s$) を適当に選んで微局所的に

$$\Sigma_{i_l}=\{u_{i_l}^1=\cdots=u_{i_l}^{p_{i_l}}=0\}$$

とできる。ここで $u_{i_l}^k$ は位数 $\dfrac{1}{k_{i_1}+\cdots+k_{i_s}}$ の斉次性をもつと仮定してよい。次に $U_{i_l}^k$ を主表象が $u_{i_l}^k$ である擬微分作用素とする。このとき $P\in OPL^{m,M_{i_1},\cdots,M_{i_s}}_{k_{i_1},\cdots,k_{i_s}}$ ならば Taylor の公式から P は次のように書ける:

$$P=\sum_{j=0}^{J_{I_\rho}}\ \sum_{\substack{(\alpha)_l\in[1,2,\cdots,p_{i_l}]^{M_{i_l}-k_{i_l}\cdot j}\\ 1\le l\le s}} A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,j}(U)_{i_1}^{(\alpha)_1}\cdots(U)_{i_s}^{(\alpha)_s}$$

ここで $A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,j}$ は位数 $m-\dfrac{M_{i_1}+\cdots+M_{i_s}}{k_{i_1}+\cdots+k_{i_s}}$ の擬微分作用素で記号については次のとおりである:

$$J_{I_\rho}=\mathrm{Max}\left\{\frac{M_{i_l}}{k_{i_l}}\ ;\ 1\le l\le s\right\},$$

$$(\alpha)_l=(\alpha_l^1,\cdots,\alpha_l^{M_{i_l}-k_{i_l}\cdot j}),\qquad \alpha_l^k\in\{1,\cdots,p_{i_l}\}.$$

$$(U)_{i_l}^{(\alpha)_l}=U_{i_l}^{\alpha_l^1}\cdots\cdots U_{i_l}^{\alpha_l^{M_{i_l}-k_{i_l}\cdot j}}\ .$$

次に我々は

$$q_{m-j}=\sigma_{m-j}\Bigl(\sum_{\substack{(\alpha)_l\in[1,\cdots,p_{i_l}]^{M_{i_l}-k_{i_l}\cdot j}\\ 1\le l\le s}} A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,j}(U)_{i_1}^{(\alpha)_1}\cdots(U)_{i_s}^{(\alpha)_s}\Bigr)$$

, $j=0,1,\cdots,J_{I_\rho}$ とおく。

このとき次の補題を必要とする:

補題 2.1. $Q = \sum_{\substack{(\alpha)_l \in [1,\cdots,p_{i_l}]^{M_{i_l}-k_{i_l}j} \\ 1\le l\le s}} A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,j}(U)_{i_1}^{(\alpha)_1}\cdots(U)_{i_s}^{(\alpha)_s}$

を上で得られたものとする。このとき Q の表象 q は次で与えられる：

$$q \equiv \exp\left(\frac{1}{2i}\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial \xi_l}\right)\sigma_{m-j}(Q) \quad \mathrm{mod}\ L^{m,\,M_{i_1}+(k_{i_1}-1),\cdots,M_{i_s}+(k_{i_s}-1)}_{k_{i_1},\cdots,k_{i_s}}。$$

証明については[5]を参照。

この補題を使うと P の表象 p は

$$p \equiv \exp\left(\frac{1}{2i}\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial \xi_l}\right)q \quad \mathrm{mod}\ L^{m,\,M_{i_1}+(k_{i_1}-1),\cdots,M_{i_s}+(k_{i_s}-1)}_{k_{i_1},\cdots,k_{i_s}}$$

で与えられる。故に命題 1.4 は証明された。

3. 定理1.7の証明の概略

(1) 十分性.

$P \in OPL^{m,M_1,\cdots,M_n}_{k_1,\cdots,k_n}(X;\Sigma_1,\cdots,\Sigma_n)$, $\rho\in\Sigma$, $I_\rho=(i_1,\cdots,i_s)$ とする。このとき仮定(H.1), (H.2), (H.3) の下で、ハミルトン－ヤコビの理論を使うと、局所的斉次正準変換 τ ; $T^*X\setminus\{0\}\longrightarrow T^*\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$ で Σ_{i_l} が $\Sigma'_{i_l}=\{(x,\xi)\in T^*\mathbb{R}^N\setminus\{0\}\,;\,\xi_{p_1+\cdots+p_{i_{l-1}}+1}=\cdots=\xi_{p_1+\cdots+p_l}=0\}$, $l=1,2,\cdots,s$ に移るものがある。また定理の条件、結論ともに正準変換の下では不変であるから、我々は $X=\mathbb{R}^N$, $\Sigma_{i_l}=\{(x,\xi)\in T^*\mathbb{R}^N\setminus\{0\}\,;\,\xi_{p_1+\cdots+p_{i_{l-1}}+1}=\cdots=\xi_{p_1+\cdots+p_l}=0\}$ の場合に帰着されたことになる。簡単のために記号 $(U)_{i_l}$ と同様に $(\xi)_{i_l}=(\xi_{p_1+\cdots+p_{i_{l-1}}+1},\cdots,\xi_{p_1+\cdots+p_{i_l}})$ と書く

ことにする。このとき $\mathbb{P}$ は次の形に書ける：

(3.1) $$\mathbb{P} = \sum_{j=0}^{J_{I_\rho}} \sum_{\substack{(\alpha)_\ell \in [1,\cdots,p_{i_\ell}]^{M_{i_\ell}-k_{i_\ell}j} \\ 1 \le \ell \le s}} A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,j} (D_x)_{i_1}^{(\alpha)_1} \cdots (D_x)_{i_s}^{(\alpha)_s},$$

ここで $A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,j}$ は位数 $m - \sum_{\ell=1}^{s} M_{i_\ell} + j\left(\sum_{\ell=1}^{s} k_{i_\ell} - 1\right)$ の擬微分作用素である。このとき命題1.4によれば我々の仮定は次のようになる：

$$\rho \text{ の適当な錐近傍で } \quad P' = \sum_{j=0}^{J_{I_\rho}} P_{m-j} \neq 0 .$$

以下この条件の下で Boutet de Monvel [1] の議論をすこし修正したものを使えば結論が得られる。

(2) 必要性.

ある $\rho = (x^0, \xi^0) \in \Sigma$ で Γ_ρ が原点を含んだとすると、ρ の錐近傍で $\mathbb{P}$ を(3.1)の形に書いておいて次を証明すれば十分である。すなわち $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ で $WF(u) \subset \{(x^0, \lambda\xi^0) ; \lambda > 0\}$, $\mathbb{P}u \in H^s$ (ρ で) であるが $u \notin H^{s+m-M_{I_\rho}}$ となるものの存在を示せばよい。簡単のため次の記号を使う：

$$M = \sum_{\ell=1}^{s} M_{i_\ell}, \quad K = \sum_{\ell=1}^{s} k_{i_\ell},$$

$$x = ((x)_{i_1}, \cdots, (x)_{i_s}, t), \quad \xi = ((\xi)_{i_1}, \cdots, (\xi)_{i_s}, \tau).$$

我々は $x^0 = 0$, $\xi^0 = ((0)_{i_1}, \cdots, (0)_{i_s}, 0, \cdots, 0, \tau_N = 1)$ と仮定してよい。このとき仮定からある $((\xi)_{i_1}, \cdots, (\xi)_{i_s})$ が存在して

$$(3.2)\qquad \sum_{j=0}^{J_{I_s}} \sum_{(\alpha)_s} a_{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,j}(0,\cdots,0,\tau_N)\,(\xi)_{i_1}^{(\alpha)_1}\cdots(\xi)_{i_s}^{(\alpha)_s} = 0 \ .$$

ここで $a_{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,j}$ は $A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,j}$ の位数 $m-M+j(K-1)$ の斉次項である。ここで $((\xi)_{i_1},\cdots,(\xi)_{i_s})$ に重さ 1, τ に重さ $K/(k-1)$ を指定すると (3.2) の左辺は Lascar [9] の意味での $(1, K/(k-1))$ 型 $(Km-M)/(k-1)$ 次斉次表象となる。故に次の命題から結論を得る:

<u>命題 3.1.</u> P が (3.1) の形であり (3.2) をみたすとする。このとき $u\in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ で $WF(u)\subset\{(x^0,\lambda\xi^0);\lambda>0\}$, s で $Pu\in H^s$ であるが $u\notin H^{s+m-M_{I_s}}$ なるものが存在する。

証明については [9] を参照。

<u>例 3.2.</u> (1) $\mathbb{R}^N$ で $P(x,D)=D_1^{M_1}D_2^{M_2}\cdots D_n^{M_n}+\lambda(x,D)$, $(n\le N)$ ここで $\lambda(x,D)$ は位数 $\sum_{i=1}^{n}M_i-1$ の擬微分作用素 ($M_i\ge 2$) である. このとき $M_i=k_i$ とすると P が損失1の準楕円型であるための必要十分条件はすべての $(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ に対して $\xi_1^{M_1}\xi_2^{M_2}\cdots\xi_n^{M_n}+\lambda^0(x,\xi)\neq 0$ となることがわかる。ここで $\lambda^0(x,\xi)$ は $\lambda(x,D)$ の主表象とする.

(2) $\mathbb{R}^3$ で $P(x,D)=D_1^6(D_2^2+D_3^2)+iD_1^3(D_1^4+D_2^4+D_3^4)+D_1^6+D_2^6+$ $+D_3^6$ とする。このとき $M_1=6$, $k_1=3$, $M_2=k_2=2$ とすると P は損失 2 の準楕円型である.

参考文献

[1] Boutet de Monvel,L.: Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators ,Comm.Pure and Appl.Math.,27(1974),585-639.

[2] Duistermaat,J.J and Hörmander,L.: Fourier integral operators II,Acta Math.,128(1972),183-269.

[3] Grigis,M,A and Lascar,R.: Équations locales d'un systéme de sous-variétés involutives,C.R.Acad.Sc.Paris,283(1976) 503-506.

[4] Helffer,B.: Sur une classe d'opérateurs hypoelliptiques à caractéristiques multiples,J.Math.pures et apll.,55(1975) ,207-215.

[5] ________ : Invariant associés a une classe d'opérateurs pseudo-différentiels et applications à L'hypoellipticité, Ann.Inst.Fourier,Grenoble,26(1976),55-70.

[6] Hörmander,L.: Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations,Amer.Math.Soc.Symp.Pure Math.10(1966),Singular integrals 138-183.

[7] __________ : Fourier integral operators I,Acta Math.,127 (1971),79-183.

[8] Sjöstrand,J.: Parametrices for pseudo-differential operators with multiple characteristics,Arkiv för Mat.12(1974),85-130.

[9] Lascar,R.: Propagation des singularités des solutions d'équations pseudo-différentielles quasi homogénes,Ann. Inst.Fourier,Grenoble,27(1977),79-123.