数理解析研究所講究録
第 358 巻 1979 年 14-30

従属確率変数列が与えられたときのRobbins-Monro型確率近似法

福岡大 理学部 渡辺 正文

§1. 序

Robbins-Monro型確率近似法；$\{W_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を $x \in \mathbb{R}$ をパラメーターとする確率変数の列とし，分布関数は x に依存し未知とする．$E[W_n(x)] = M_n(x)$, $n=1,2,\cdots$ とおき，十分大なる正の整数 n に対して方程式

(1.1) $$M_n(x) = 0$$

の解 $x=\theta_n$（存在すると仮定）を推定する逐次的な手法は次の形で与えられる（*Robbins-Monro procedure*）；

(1.2) $$\begin{cases} X_0 \equiv \text{任意の定数} \\ X_{n+1} = X_n - a_n W_n(X_n), \quad n=1,2,\cdots \end{cases}$$

ここで $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は正の実数列で

(1.3) $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

を満たす．このとき

(1.4) $$E[W_n(X_n) \mid X_1,\cdots,X_n] = M_n(X_n) \quad a.s.\ , n=1,2,\cdots$$

なる仮定のもとで

(1.5) $\lim_{n\to\infty} |X_n - \theta_n| = 0 \quad a.s.,$

(1.6) $\lim_{n\to\infty} E|X_n - \theta_n|^2 = 0$

等が成り立つための十分条件が色々と研究されている([6]).

特に，上の確率近似法を応用しようとするとき，例えばパターン分類問題における（統計的）識別関数の学習とか与えられた入力と出力の組の列を用いて未知関数を学習する問題等([3])においては，仮定(1.4)が満たされなければ直接確率近似法の収束定理を適用出来ない．すなわち(1.4)が満たされる自然な仮定として観測列（学習列）は独立な確率変数列であることが要求される．独立でない場合には(1.4)がかならずしも満たされるとは限らない．本報告は(1.4)がかならずしも成り立たぬときのRobbins-Monro型確率近似法を考察する．すなわち従属確率変数列が与えられたときの確率近似法の収束定理を与える．前回の報告(1977.1.26,「数理計画と決定過程論」数理研講究録299,[8])において筆者は(1.4)が成り立たぬときのR-M型確率近似法を与えた．[8]においてはある「大数の法則」が成り立つ条件（あるmixing-条件）のもとで考察した．本報告においても同様の仮定のもとでさらに一般化したものを考える．すなわち，[8]においては

(1.7) $\quad W_n(x) = (x-\theta_n)A_n(Y_n) + \Gamma_n(Y_n), \quad n=1,2,\cdots$

ここで，$\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は従属確率変数の列，と展開出来ることを仮定した．今回は次の様に展開出来る場合を仮定する．

(1.8) $\quad W_n(x) = (x-\theta_n)A_n(x,Y_n) + \Gamma_n(x,Y_n), \quad n=1,2,\cdots.$

また，収束は〔8〕と同様に a.s. 収束（確率 1 での収束）を考察する．

§2．問題設定と Lemma

・$\mathbb{R}^k$；k 次元 Euclid 空間（k は正の整数）．

・$\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$；$\mathbb{R}^M$- valued randon vectors の列で独立とは限らぬし，またその分布は未知とする．

・$\Phi_n(x,y) = (\Phi_n^{(1)}(x,y), \cdots \Phi_n^{(N)}(x,y)), \quad n=1,2,\cdots$；

$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ なる可測写像（i.e. $\Phi_n^{(i)}(\cdot,\cdot)$ は Borel 関数）．

<u>Problem</u> 十分大なる n（正の整数）に対して方程式

(2.1) $\quad E[\Phi_n(x,Y_n)] = \mathbf{0}$

の解 $x=\theta_n$ を求めよ．ここで $\mathbf{0}$ は $\mathbb{R}^N$ のゼロベクトル．

上の問題に対し，各 $n=1,2,\cdots$ と (x,Y_n) に対して

(2.2) $\quad W_n(x) = \Phi_n(x,Y_n)$

なる r.v.'s の列 $\{W_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $(x \in \mathbb{R}^N)$ を利用出来るとする．

<u>Procedure</u>

(2.3) $$\begin{cases} X_1 \equiv \text{任意の } \mathbb{R}^N \text{ の定数ベクトル} \\ X_{n+1} = X_n - a_n W_n(X_n), \quad n=1,2,\cdots \end{cases}$$

ここで

(2.4) $\quad W_n(X_N) = \Phi_n(X_n, Y_n)$,

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は正の実数列とする.

記号

- $\langle\cdot,\cdot\rangle$; $\mathbb{R}^N$ の内積, i.e. $x=(x_1,\cdots,x_N)$, $x'=(x_1',\cdots,x_N')$

$$\langle x, x'\rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i x_i' .$$

- $\|\cdot\|$; $\mathbb{R}^N$ のノルム, i.e. $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$.
- $\|\cdot\|_N$; $N\times N$-行列の operator ノルム, i.e. $\|A\|_N = \sup_{\|x\|\leq 1}\|xA\|$.
- I ; $N\times N$-単位行列.

さらに, ベクトルは全て横ベクトルとする.

Lemma 1 (クロネッカーの補題)

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$; 実数列で $\sum x_n$ が有限な値に収束.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$; 0 に収束する正の単調減少列.

とすると次のことが成り立つ.

(2.5) $\quad \lim_{n\to\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} x_k/a_k = 0$.

Lemma 2 ([7])

$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ は非負の実数列とし, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は非負の実数列で次の不等式を満たす.

(2.6) $\quad x_{n+1} \leqq (1-\alpha_{n+1})x_n + \alpha_n\beta_n + K_n$, $n=1,2,\cdots$.

さらに

(i) $\quad \lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$

(ii) $\lim_{n\to\infty}\beta_n = 0 \quad (\sup_n \beta_n < \infty)$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} K_n < \infty$

が成り立つならば $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \ (\sup_n x_n < \infty)$.

<u>Lemma 3 ([5])</u>

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ を非負の実数列とし，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は非負実数列で次の不等式を満たす

$$x_{n+1} \leqq \max\{a,\ (1+b_n)x_n + d_n\},\quad n=1,2,\cdots$$

ここで

(i) $a>0$, (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} d_n < \infty$

が成り立つならば $\sup_n x_n < \infty$.

<u>Lemma 4</u>

$\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とし次のことを満たす

(i) $0 \leqq h_n \ (n \geqq 1)$, $\lim_{n\to\infty} h_n = 0 \ (\sup_n h_n < \infty)$

(ii) $0 < a_n < 1 \ (n \geqq 1)$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$,

$\sup_n |1/a_n - 1/a_{n+1}| < \infty$

(iii) $\lim_{n\to\infty} c_n/a_n = 0 \quad (\sup_n |c_n/a_n| < \infty)$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} d_n < \infty$

(v) $\lim_{n\to\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} b_k/a_k = 0 \quad (\sup_n |a_n \sum_{k=1}^{n} b_k/a_k| < \infty)$

さらに，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は非負実数列で次の不等式を満たす

(2.7) $$x_{n+1} \leqq \max\{h_n,\ (1-a_n)x_n + b_n + c_n + d_n\},\ n=1,2\cdots$$

このとき，次のことが成り立つ

(2.8) $$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \qquad (\sup_n x_n < \infty) .$$

略証)

N, n を任意の整数とし $N < n$ とする．また，$A_{n+1,n} \equiv 1$,
$A_{k,n} = \prod_{t=k}^{n} (1 - a_t)$ $(k \leq n)$ とおくと次のことが成立．

$$x_{n+1} \leq \max_{N\leq k\leq n} \{ A_{k+1,n} h_k \} + A_{N,n} x_N + 2 \max_{N\leq k\leq n} \left| \sum_{j=k}^{n} A_{j+1,n} B_j \right|$$

ここで $B_n = b_n + c_n + d_n$ $(n \geq 1)$ とする．このとき，

(1) $$\max_{N\leq k\leq n} \{A_{k+1,n} h_k\} \leq \sup_{N\leq k} \{h_k\}$$

(2) $$\lim_{n\to\infty} A_{N,n} = 0 \qquad (\forall \text{ fixed } N)$$

(3) $$\left| \sum_{j=k}^{n} A_{j+1,n} B_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} A_{j+1,n} (|c_j| + |d_j|) + \left| \sum_{j=k}^{n} A_{j+1,n} b_j \right|$$

ここで Lemma 2 より $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} A_{j+1,n} (|c_j| + |d_j|) = 0$
(有界)．従って $\lim_{n\to\infty} \max_{N\leq k\leq n} \left| \sum_{j=k}^{n} A_{j+1,n} b_j \right| = 0$ を示すとよい．

$$\begin{cases} s_n = a_n \sum_{j=1}^{n} b_j/a_j & (n \geq 1) \\ s_0 \equiv 0, \quad a_0 \neq 0 \end{cases}$$

とおくと，$b_j/a_j = s_j/a_j - s_{j-1}/a_{j-1}$ $(j \geq 1)$

従って
$$\sum_{j=k}^{n} A_{j+1,n} b_j = a_n A_{n+1,n} \frac{s_n}{a_n} - a_k A_{k+1,n} \frac{s_{k-1}}{a_{k-1}} + \sum_{j=k}^{n-1} \frac{s_j}{a_j} (a_j A_{j+1,n} - a_{j+1} A_{j+2,n})$$

; Abel の変換．

よって，$\left| \sum_{j=k}^{n} A_{j+1,n} b_j \right| \leq |s_n| + C_0 |s_{k-1}| + C_1 \sum_{j=k}^{n-1} a_{j+1} |s_j| A_{j+2,n}$

従って $\max_{N \leq k \leq n} \left| \sum_{j=k}^{n} A_{j+1,n} b_j \right| \leq (C_0+1) \sup_{N-1 \leq k} |\delta_k| + C_1 \sum_{j=1}^{N-1} a_{j+1} |\delta_j| A_{j+2,n}$

ここで，C_0，C_1 は正の定数．したがって Lemma 2 と

$\lim_{n\to\infty} |\delta_n| = 0$ より証明される．□

<u>Lemma 5</u> (A strong law of large numbers ([2])

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$；確率空間．

$\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$　；$\mathcal{A}$ の sup-σ-fields の列

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$　；実数値 r.v.'s の列で各 X_n は $\mathcal{B}_n$－可測

(i) ∃正の整数 n_0，$\varlimsup_{n\to\infty} \phi\left(\bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i, \bigvee_{i=n+n_0}^{\infty} \mathcal{B}_i \right) < 1$

ここで　$\phi(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = \sup_{B \in \mathcal{A}_2} \{ \text{ess.sup} \, | P(B|\mathcal{A}_1) - P(B) | \}$

($\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ の従属係数)

(ii)　$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^{1/2} < \infty$　，ここで $\rho_n = \sup_m \phi(\mathcal{B}_m, \mathcal{B}_{m+n})$

(iii) $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ を単調増加な正の実数列とし $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$

とし，$\sum_{n=1}^{\infty} E(X_n - EX_n)^2 / k_n^2 < \infty$ が成り立つ．

このとき，$\lim_{n\to\infty} k_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i) = 0$　a.s.

が成り立つ．

<u>Lemma 6</u>

T_n，$n=1,2,\cdots$ を $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ なる可測変換とし

(2.9)　$\| T_n(r) \|^2 \leq \max \{ h_n, (1-\alpha_n) \|r\|^2 \}$，$r \in \mathbb{R}^N$, $n=1,2,\cdots$

を満たす．ここで $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ は実数列で

(i)　$h_n \geq 0$　$(n \geq 1)$　，　$\lim_{n\to\infty} h_n = 0$

(ii)　$0 < \alpha_n < 1$　$(n \geq 1)$　，　$\alpha_n \downarrow 0$　$(n\to\infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty \quad , \quad \sup_n |\alpha_n^{-1} - \alpha_{n+1}^{-1}| < \infty$$

また，X_1を$\mathbb{R}^N$-valued r.v. とし $X_2, X_3, \cdots$ を次の様に定義する；　$X_{n+1} = T_n(X_n) + U_n + V_n$ ，$n = 1, 2, \cdots$ ，

ここで　$\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}^N$-valued r.v.'s の列で

(iii)　$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{-1} \| U_n \| = 0$　a.s.

(iv)　$^\exists$ 正の単調非増加列 $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n \beta_n^{-1} \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{-1} V_k \right\| = 0 \quad \text{a.s.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-1} \beta_n^2 \| V_n \|^2 < \infty \quad \text{a.s.} \quad (\text{or } \sup_n \alpha_n^{-1} \beta_n \| V_n \| < \infty \text{ a.s.})$$

(v)　$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \| T_n(X_n) - T_{n+1}(X_{n+1}) \| < \infty$　a.s. .

以上が成り立つならば　$\lim_{n\to\infty} \| X_n \| = 0$　a.s. となる。

<u>略証)</u>

$$\| X_{n+1} \|^2 \leqq \max\Big\{ Z_n, \left(1 - \frac{\alpha_n}{2}\right) \| X_n \|^2 + 2\alpha_n \langle T_n(X_n), V_n' \rangle + 2\alpha_n^2 \| V_n' \|^2 + 4\alpha_n \| U_n' \|^2 \Big\}$$

$$\left(\leqq \max\Big\{ Z_n, \left(1 - \frac{\alpha_n}{4}\right) \| X_n \|^2 + 6\alpha_n \| V_n' \|^2 + 4\alpha_n \| U_n' \|^2 \Big\} \right)$$

ここで，　$Z_n = 2(h_n + \| U_n + V_n \|^2)$，$V_n' = \alpha_n^{-1} V_n$，$U_n' = \alpha_n^{-1} U_n$.

このとき，次の (1) ~ (3) が仮定より成り立つ.

(1)　$\lim_{n\to\infty} Z_n = 0$　a.s.

(2)　$\lim_{n\to\infty} \| U_n' \|^2 = 0$　a.s.

(3)　$\lim_{n\to\infty} \alpha_n \| V_n' \|^2 = 0$　a.s.

さらに

(4) $$\lim_{n\to\infty} \alpha_n \sum_{k=1}^{n} \langle T_k(X_k),\ V_k' \rangle = 0 \quad \text{a.s.}$$

が成り立つと Lemma 4 により定理は証明される.

(4)の証明;

$$Y_n = \alpha_n \sum_{k=1}^{n} \langle T_k(X_k),\ V_k' \rangle$$

$$S_0 \equiv 0 \ , \quad S_n = \alpha_n \beta_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} V_k'$$

とおくと Abel の変換により次式を得る.

$$\|Y_n\| \leqq \beta_n \|S_n\| \|T_n\| + \alpha_n \sum_{k=1}^{n} \|T_{k+1} - T_k\| \alpha_k^{-1} \beta_k \|S_k\|$$

ここで

$$\beta_{n+1} \|X_{n+1}\|^2 \leqq \max\Big\{ \beta_n \gamma_n,\ (1-\frac{\alpha_n}{4}) \beta_n^2 \|X_n\|^2 + 6\alpha_n \beta_n^2 \|V_n'\| + 4\alpha_n \beta_n^2 \|U_n'\|^2 \Big\}.$$

したがって Lemma 4 により

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n^2 \|T_n\|^2 \leqq \lim_{n\to\infty} \beta_n^2 \|X_n\|^2 + \beta_n^2 h_n = 0 \quad \text{a.s.}$$

(有界 a.s.). よって lemma 1 より $\lim_{n\to\infty} \|Y_n\| = 0$ a.s.

したがって (4) が示された. $\square$

<u>例</u> $a_n = n^{-1}$, $\quad X_{n+1} = T_n(X_n) + n^{-1} U_n' + n^{-1} V_n'$, $n = 1, 2, \cdots$

(iii)' $$\lim_{n\to\infty} \|U_n'\| = 0 \quad \text{a.s.}$$

(iv)' $$\lim_{n\to\infty} \|n^{-1} \sum_{k=1}^{n} V_k'\| = 0 \quad \text{a.s.}$$

$$\sup_n n^{-1} \|V_n'\| < \infty \quad \text{a.s.}$$

(v)' $$\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n(X_n) - T_{n+1}(X_{n+1})\| < \infty \quad \text{a.s.}$$

が成り立つときは Lemma 6 において $\beta_n = 1$ として条件を満たす. 従って $\lim_{n\to\infty} \|X_n\| = 0$ a.s. となる.

§3. Main Result

<u>Assumptions</u>　以下において δ は正の実数で $0<\delta\leqq 1/11$ とする．$\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}^N$ のベクトル列とする．さらに，$\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ は σ-fields の列とし，$\mathcal{B}_n=\sigma(Y_n)$ $(n=1,2,\cdots)$ とする．

(A 0)　$0<a_n<1$ $(n\geqq 1)$, $a_n\downarrow 0$ $(n\to\infty)$.

(A 1)　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\infty$.

(A 2)　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1+\delta}<\infty$.

(A 3)　$\sup_n |a_n^{-1}-a_{n+1}^{-1}|<\infty$.

(H 0)　$\Phi_n(x,y)=(x-\theta_n)A_n(x,y)+T_n(x,y)$, $n=1,2,\cdots$, $x\in\mathbb{R}^N$, $y\in\mathbb{R}^M$．ここで，各 n に対し $A_n(x,y)$ は $N\times N$-行列で (i,j) 成分 $=\sum_{p=1}^{M_1} f_n^{ijp}(x)\,g_n^{ijp}(y)$，$M_1$ は正の整数．
$T_n(x,y)$ は $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^M\to\mathbb{R}^N$ なる可測写像で，第 i 成分は $\sum_{p=1}^{M_2}\gamma_n^{ip}(x)\,\varepsilon_n^{ip}(y)$，$M_2$ は正の整数．ここで f_n^{ijp}, g_n^{ijp}, γ_n^{ijp}, ε_n^{ip} は全て実数値 Borel 関数とする．

(H 1)　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1+\delta}\,E[\max_{i,j,p}\{g_n^{ijp}(Y_n)\}^2]<\infty$.

(H 2)　$\sup_{x;\,n,i,j,p}|f_n^{ijp}(x)|\leqq K_1<\infty$.

(H 3)　$\exists K_2>0$; $\sup_{n,i,j,p}|f_n^{ijp}(x)-f_n^{ijp}(x')|$
$$\leqq K_2\|x-x'\| \quad (x,x'\in\mathbb{R}^N).$$

(H 4)　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{2\delta}\sup_{x;\,i,j,p}|f_n^{ijp}(x)-f_{n+1}^{ijp}(x)|<\infty$.

(H 5)　$\exists\alpha_0>0$; $\langle x-\theta_n,(x-\theta_n)A_n(x,y)\rangle\geqq 0$
$(y\in\mathbb{R}^M,\ \|x-\theta_n\|>\alpha_0)$.

(H 6) $\exists d_1 > 0$, $\exists$ 非負実数列 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$;

$$\langle x-\theta_n , (x-\theta_n) E[A_n(x,Y_n)] \rangle \geqq d_1 \|x-\theta_n\|^2$$

$$\text{if } \|x-\theta_n\|^2 > h_n$$

(H 7) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1+\delta} E[\max_{i,p} \varepsilon_n^{ip}(Y_n)]^2 < \infty$

(H 8) $E[\varepsilon_n^{ip}(Y_n)] = 0 \quad (1 \leqq i \leqq N,\ 1 \leqq p \leqq M_1,\ 1 \leqq n)$

(H 9) $\sup_{\substack{x,n\\i,p}} |\gamma_n^{ip}(x)| \leqq K_3 < \infty$

(H 10) $\exists K_4 > 0$; $\sup_{n,i,p} |\gamma_n^{ip}(x) - \gamma_n^{ip}(x')| \leqq K_4 \|x - x'\|$

(H 11) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{2\delta} \sup_{x,i,p} |\gamma_n^{ip}(x) - \gamma_{n+1}^{ip}(x)| < \infty$

(H 12) $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} \|\theta_n - \theta_{n+1}\| = 0$

(H 13) $\exists n_0$ (正の整数) ; $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \phi(\bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i , \bigvee_{i=n+n_0}^{\infty} \mathcal{B}_i) < 1$

(H 14) $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{m} \phi(\mathcal{B}_m , \mathcal{B}_{m+n})^{1/2} < \infty$

〔注〕仮定 (A 0) と (H 8) より θ_n は方程式

$$E[\Phi_n(x,Y_n)] = 0$$

の解となる.

<u>THEOREM</u>

仮定 (A 0) ~ (A 3), (H 0) ~ (H 14) が成り立つならば §2 で定義された procedure のもとで次のことが成り立つ.

(3.1) $\lim_{n\to\infty} \|X_n - \theta_n\| = 0$ a.s.

上の定理は以下の補題と §2 の Lemma を用いて示される.

補題1

(i) (H 1), (H 2) が成り立つならば次のことが成り立つ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1+\delta} E\| A_n(X_n, Y_n)\|_N^2 < \infty \quad ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1+\delta} \sup_x E\| A_n(x, Y_n)\|_N^2 < \infty \quad .$$

(ii) (H 7), (H 9) が成り立つならば次のことが成り立つ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1+\delta} E\| T_n(X_n, Y_n)\|^2 < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1+\delta} \sup_x E\| T_n(x, Y_n)\|^2 < \infty$$

証) 省略.

補題2 仮定 (H 0) ~ (H 2), (H 5), (H 7), (H 9), (H 12) が成り立つならば次のことが成り立つ;

$\exists$ a.s. finite r.v. $L_0 > 0$; $\|X_n - \theta_n\| \leqq a_n^{-\delta} L_0$ a.s.

略証) (2.3) と (H 5) より

$$\|X_{n+1} - \theta_{n+1}\| \leqq \max\Big\{ d_0(1 + a_n\|A_n(X_n, Y_n)\|_N) + a_n\|T_n(X_n, Y_n)\| + \|\theta_n - \theta_{n+1}\|, \ (1 + a_n^2\|A_n(X_n, Y_n)\|_N^2)\|X_n - \theta_n\| + a_n\|T_n(X_n, Y_n)\| + \|\theta_n - \theta_{n+1}\| \Big\}$$

従って, Lemma 3 と補題1 とにより $a_n^{\delta}\|X_n - \theta_n\|$ は a.s. 有界となる. □

補題3 補題2の仮定が成立しさらに (A 3) が成り立つならば次の (i), (ii) が成り立つ.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{2\delta} \|X_n - X_{n+1}\| < \infty$ a.s. ,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{2\delta} \| T_n(X_n) - T_{n+1}(X_{n+1})\| < \infty$ a.s. ,

ここで，　$T_n(x) = (x-\theta_n)(I - a_n\hat{A}_n(x))$，　$\hat{A}_n(x) = E[A_n(x, Y_n)]$.

<u>略証)</u>

$$\|X_n - X_{n+1}\| \leqq a_n\|X_n-\theta_n\|\,\|A_n(X_n,Y_n)\|_N + a_n\|T_n(X_n,Y_n)\|$$
$$\leqq L_0 a_n^{1-\delta}\|A_n(X_n,Y_n)\|_N + a_n\|T_n(X_n,Y_n)\| .$$

従って (i) が成り立つ．一方

$$\|T_n(X_n) - T_{n+1}(X_{n+1})\| \leqq \|X_n - X_{n+1}\| + \|\theta_n - \theta_{n+1}\| + a_n\|X_n-\theta_n\|\,\|\hat{A}_n(X_n)\|_N$$
$$+\ a_{n+1}\|X_{n+1}-\theta_{n+1}\|\,\|\hat{A}_{n+1}(X_{n+1})\|_N .$$

ここで　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1+2\delta}\|X_n-\theta_n\|\,\|\hat{A}_n(X_n)\|_N \leqq L_0\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1+\delta}\|\hat{A}_n(X_n)\|_N < \infty$ a.s.

$$a_n^{2\delta}a_{n+1}\|X_{n+1}-\theta_{n+1}\|\,\|\hat{A}_{n+1}(X_{n+1})\|_N = a_{n+1}^{1+2\delta}\|X_{n+1}-\theta_{n+1}\|\,\|\hat{A}_{n+1}(X_{n+1})\|_N\left(a_n/a_{n+1}\right)^{\delta}.$$

仮定 (A3) より　$\sup_n (a_n/a_{n+1})^{\delta} < \infty$.　従って，(i) が成り立つことより (ii) も成り立つ．□

<u>補題4</u>

(i) (H1)～(H6), (H12)～(H14), (A0)～(A3) が成り立つならば　$\lim_{n\to\infty} a_n^{1-2\delta}\|\sum_{k=1}^{n} V_k\| = 0$　a.s.

ここで　$V_k = (X_k-\theta_k)(\hat{A}_k(X_k) - A_n(X_n,Y_n))$　$(k=1,2,\cdots)$.

(ii) (H7)～(H14), (A0)～(A3) が成り立つならば

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{1-2\delta}\|\sum_{k=1}^{n} U_k\| = 0 \quad \text{a.s.}$$

ここで　$U_k = T_k(X_k, Y_k)$　$(k=1,2,\cdots)$.

<u>証明)</u>　$X_n - \theta_n \stackrel{おく}{=} x_n = (x_n^1, \cdots, x_n^N)$，　$Z_n \stackrel{おく}{=} a_n^{1-2\delta}\sum_{k=1}^{n} V_k$.

V_nの第i-成分を V_n^i とすると

$$V_n^i = \sum_{j=1}^{N} x_n^j \sum_{p=1}^{M_i} f_n^{ijp}(X_n)(\hat{g}_n^{ijp} - g_n^{ijp}(Y_n)),$$

ここで $\hat{g}_n^{ijp}=E[g_n^{ijp}(Y_n)]$, Zの才i成分をZ_n^iとおくと

$$Z_n^i = a_n^{1-2\delta}\sum_{k=1}^{n} V_k^i = a_n^{1-2\delta}\sum_{j=1}^{N}\sum_{p=1}^{M_i}\sum_{k=1}^{n}\{x_k^j f_k^{ijp}(X_k)(\hat{g}_k^{ijp}-g_k^{ijp}(Y_k))\}.$$

さらに，次の様に Z_n^{ijp}, S_n^{ijp} を定義する.

$$Z_n^{ijp} = a_n^{1-2\delta}\sum_{k=1}^{n} x_k^i f_k^{ijp}(X_k)(\hat{g}_k^{ijp}-g_k^{ijp}(Y_k)),$$

$$S_n^{ijp} = a_n^{1-\hat{\delta}}\sum_{k=1}^{n}(\hat{g}_k^{ijp}-g_k^{ijp}(Y_k)), \quad S_0^{ijp}=0.$$

ここで，$\underline{\hat{\delta}=5\delta}$ とする. このとき，(H1), (H13), (H14) と $0<\delta\leqq 1/11$ $(1+\delta\leqq 2-2\hat{\delta})$ より *Lemma* 5 を用いて

$\lim_{n\to\infty}|S_n^{ijp}|=0$ a.s. を得る. 従って，ある正の a.s. 有限な r.v. L_1 が存在して $|S_n^{ijp}|\leqq L_1$ a.s.

となる. 一方 Abel の変換より

$$Z_n^{ijp} = a_n^{1-2\delta}x_n^j f_n^{ijp}(X_n)a_n^{\hat{\delta}-1}S_n^{ijp} + a_n^{1-2\delta}\sum_{k=1}^{n-1}a_k^{\hat{\delta}-1}(x_k^j f_k^{ijp}(X_k)- x_{k+1}^j f_{k+1}^{ijp}(X_{k+1}))S_k^{ijp}.$$

$$|Z_n^{ijp}| = a_n^{\hat{\delta}-2\delta}|S_n^{ijp}||f_n^{ijp}(X_n)||x_n^j| + a_n^{1-2\delta}\sum_{k=1}^{n}a_k^{\hat{\delta}-1}|S_k^{ijp}||x_k^j f_k^{ijp}(X_k)-x_{k+1}^j f_{k+1}^{ijp}(X_{k+1})|.$$

以下 i,j,p を省略して表す.

$$|x_k f_k(X_k) - x_{k+1}f_{k+1}(X_{k+1})|$$
$$\leqq |x_k-x_{k+1}||f_{k+1}(X_{k+1})| + |x_k|(|f_k(X_k)-f_{k+1}(X_k)| + |f_{k+1}(X_k)-f_{k+1}(X_{k+1})|)$$
$$\leqq K_1(\|X_k-X_{k+1}\|+\|\theta_k-\theta_{k+1}\|) + L_0 a_k^{-\delta}(\tau_k + K_2\|X_k-X_{k+1}\|)$$
$$= (K_1+K_2 a_k^{-\delta}L_0)\|X_k-X_{k+1}\| + K_1\|\theta_k-\theta_{k+1}\| + a_k^{-\delta}\tau_k L_0,$$

ここで $\tau_k = \sup_{x,i,j,p}|f_k^{ijp}(x)-f_{k+1}^{ijp}(x)|$. 従って

$$|Z_n^{ijp}| \leqq K_1 a_n^{\hat{\delta}-3\delta}|S_n^{ijp}|\cdot L_0 + L_1 a_n^{1-2\delta}\Big\{\sum_{k=1}^{n}a_k^{\hat{\delta}-1}(K_1+K_2 a_k^{-\delta}L_0)\|X_k- X_{k+1}\| + K_1\sum_{k=1}^{n}a_k^{\hat{\delta}-1}\|\theta_k-\theta_{k+1}\| + L_0\sum_{k=1}^{n}a_k^{\hat{\delta}-\delta-1}\tau_k\Big\}.$$

ここで $\hat{\delta} = 5\delta$ より

(3.2) $$K_1 a_n^{2\delta} |S_n^{ijP}| L_0 \longrightarrow 0 \quad \text{a.s.} \quad \text{as } n\to\infty .$$

補題3(i)とLemma 1により

(3.3) $$a_n^{1-2\delta}\sum_{k=1}^{n} a_k^{\hat\delta-1}(K_1+K_2 a_k^{-\delta}L_0)\|X_k - X_{k+1}\| \longrightarrow 0 \quad \text{a.s. as } n\to\infty .$$

また $\|\theta_k-\theta_{k+1}\| \leqq C a_k$ と Lemma 1 により

(3.4) $$a_n^{1-2\delta}\sum_{k=1}^{n} a_k^{\hat\delta-1}\|\theta_k-\theta_{k+1}\| \longrightarrow 0 \quad \text{as } n\to\infty .$$

さらに，仮定(H4)とLemma 1により

(3.5) $$a_n^{1-2\delta}\sum_{k=1}^{n} a_k^{\hat\delta-\delta-1}\tau_k \longrightarrow 0 \quad \text{as } n\to\infty$$

以上 (3.1)～(3.5) より $\lim_{n\to\infty} |Z_n^{ijP}| = 0$ a.s..

したがって $\lim_{n\to\infty} \|Z_n\| = 0$ a.s. となる．(ii)もまた同様にして証明出来る．$\square$

定理の証明)

(2.3)より

$$X_{n+1}-\theta_{n+1} = (X_n-\theta_n)(I - a_n\hat{A}_n(X_n)) + U_n + V_n + W_n ,$$

ここで $U_n = a_n \Gamma_n(X_n,Y_n)$, $V_n = a_n(X_n-\theta_n)(\hat{A}_n(X_n) - A_n(X_n,Y_n))$,

$W_n = (\theta_n - \theta_{n+1})$ とする．§2 の lemma 6 において

$T_n(x) = (x-\theta_n)(I-a_n\hat{A}_n(x))$, $\beta_n = a_n^{2\delta}$, $\alpha_n = d_1 a_n$

とおいて lemma 6 の条件を満たすことを示すとよい．

$\|x\|^2 \leqq h_n$ のとき；

$$\|T_n(x)\|^2 \leqq 2h_n(1+a_n^2\sup_x\|\hat{A}_n(x)\|^2) \equiv \hat{h}_n .$$

$\|x\|^2 > \hat{h}_n$ のとき；

$\|T_n(x)\|^2 \leq (1-\alpha_1 a_n)\|x\|^2$ （仮定(H6)より）

従って

$$\|T_n(x)\|^2 \leq \max\{\hat{h}_n,\ (1-\alpha_1 a_n)\|x\|^2\}, \quad n=1,2,\cdots.$$

一方，補題1と補題2より $\beta_n = a_n^{2\delta}$ に注意して

・ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1} a_n^{4\delta} a_n^2 \|T_n(X_n,Y_n)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1+4\delta}\|T_n(X_n,Y_n)\|^2 < \infty$ a.s.

・ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1} a_n^{4\delta} a_n^2 \|X_n-\theta_n\|^2 \|\hat{A}_n(X_n) - A_n(X_n,Y_n)\|_N^2$

$\leq L_2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1+\delta}\|A_n(X_n,Y_n)\|_N^2 < \infty$ a.s.，ここで

L_2はa.s.有限な正のr.v.．さらに補題3(ii)が成り立つことよりLemma 6の条件が全て満たされる．よって証明された．□

References

[1] Lóev, M. ; *Probability Theory*. Van Nostrand, 1960.

[2] Iosifescu, M. and Theodorescu, R. ; *Random processes and learning*. Springer, 1969.

[3] Mendel, J.M. and Fu, K.S. ; *Addaptive, learning and pattern recognition system, Theory and application*. Academic Press, 1970.

[4] Robbins, H. and Monro, S. ; A stochastic

approximation method. Ann. Math. Stat., 22 (1951), 400-407.

[5] Venter, J.H. ; On Dvoretzky stochastic approximation theorems. Ann. Math. Stat., 37 (1966), 1534-1544.

[6] Wasan, M.T. ; Stochastic approximation method. Cambrige Univ. Press, 1969.

[7] Watanabe, M. ; On asymptotically optimal algorithms for pattern classification problems. Bull. Math. Stat., Vol. 15, No. 3-4 (1973), 31-48.

[8] Watanabe, M. ; An almost sure convergence theorem in a stochastic approximation method with dependent random variables. Bull. Math. Stat., Vol. 18, No. 3-4 (1979), 95-112.