数理解析研究所講究録
第 358 巻 1979 年 31-56

Optimal return and optimality equation in controlled Markov jump processes

九大・理　大坪義夫

§1. はじめに

連続時間マルコフ過程における最適化問題は、多数の文献で論じられている。Miller[10], Kakumanu[8], Doshi[2], Yasuda[18], Pliska[12], Stone[15] は、マルコフ決定過程における最適政策問題を, Fakeev[5], Thompson[17], Shiryayev[14] は、最適停止問題を，それぞれ扱かっている。また、離散時間の場合に、Hordijk[7], Furukawa[6], Rieder[13] が、停止決定問題を扱かっている。ここでは、[6]に基づいて、終端利得をもつマルコフ・ジャンプ過程における最適化問題を、control として policy と stopping rule の両方を考えた場合について述べる。

§2. 問題の定式化

controlled Markov jump process は、5つの組（Z, A,

g, λ, Q）で表現される。ここに、

(1) <u>state space S</u>：Polish space の空でない Borel subset,

<u>$Z \equiv S \times \mathbb{R}_+$</u>，ただし $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$．

(2) <u>action space A</u>：Polish space の空でない Borel subset.

（$\mathcal{B}(S)$, $\mathcal{B}(Z)$, $\mathcal{B}(A)$ をそれぞれ S, Z, A の Borel field とする。）

(3) <u>terminal reward g</u>：Z 上の有界実数値関数で、次をみたす； (i) 各 $t \geq 0$ に対して、$g(\cdot, t)$ は $\mathcal{B}(S)$-可測，
(ii) 各 $x \in S$ に対して、$g(x, \cdot)$ は $\mathbb{R}_+$ 上で右連続．

(4) <u>"jump rate" λ</u>：$Z \times A \to \mathbb{R}_+$ と <u>Markov kernel Q</u> は、次の条件をみたす；

(i) 各 $t \geq 0$ に対して，$\lambda(\cdot, t, \cdot)$ は $\mathcal{B}(S) \times \mathcal{B}(A)$ ー可測．

(ii) 各 $(x, a) \in S \times A$ に対して，$\lambda(x, \cdot, a)$ は $\mathbb{R}_+$ 上で右連続．

(iii) 自然数 $M < \infty$ が存在して，すべての $(z, a) \in Z \times A$ に対して，$0 < \lambda(z, a) < M$．

(iv) 各 $(z, a) \in Z \times A$ に対して，$Q(\cdot \mid z, a)$ は $\mathcal{B}(S)$ 上の確率測度．

(v) 各 $(x, t, a) \in Z \times A$ に対して，$Q(\{x\} \mid x, t, a) = 0$．

(vi) 各 $(x, a) \in S \times A$ に対して，$Q(\Lambda \mid x, \cdot, a)$ はすべての $\Lambda \in \mathcal{B}(S)$ に独立に，$\mathbb{R}_+$ 上で区分的定数で右連続、かつ有限区間で有限個の不連続点をもつ．

(vii) 各 $t \geq 0$, $\Lambda \in \mathcal{B}(S)$ に対して、$Q(\Lambda \mid \cdot, t, \cdot)$ は $\mathcal{B}(S) \times \mathcal{B}(A)$ −可測.

<u>policy π</u> : $Z \to A$ は次をみたすものとする;

(i) 各 $t \geq 0$ に対して、$\pi(\cdot, t)$ は $\mathcal{B}(S)/\mathcal{B}(A)$ 一可測.

(ii) 各 $x \in S$ に対して、$\pi(x, \cdot)$ は R_+ 上で区分的定数で右連続、かつ有限区間で有限個の不連続点をもつ.

$\Pi \equiv$ このような policy π の全体.

各 $\pi \in \Pi$ に対応する <u>jump process Z^π</u> $= (Z_t^\pi)_{t \geq 0} = (X_t^\pi, t)_{t \geq 0}$ は、次の確率法則にしたがって定める;

$$P_{(x,s)}^\pi [\nu(x,s) \leq t] = 1 - \exp\left\{-\int_s^{s+t} \lambda(x, s', \pi(x, s'))\, ds'\right\},$$

$$P_{(x,s)}^\pi [X_{t+s}^\pi \in \Lambda \mid \nu(x,s) = t] = Q(\Lambda \mid x, s+t, \pi(x, s+t)),$$

$$(x,s) \in Z, \quad t \geq 0, \quad \Lambda \in \mathcal{B}(S),$$

ただし、$\nu(x,s)$ は時刻 s で、state x を出発して random time $\nu(x,s)$ の間、そこにとどまる holding time である。このとき、Blumental-Getoor [1, Chap. I, §12] と同様にして、Z^π は Markov jump process になる。それで、<u>sample space Ω</u> を次をみたす関数 $\omega : R_+ \to Z$ の全体と考えてよい; (i) 各 $t \geq 0$ に対して、$y \in S$ が存在して、$\omega(t) = (y, t)$. (ii) 各 $t \geq 0$ に対して、左極限 $\omega(t-0)$

をもつ。 (iii) 各 $t \geq 0$ に対して、 $\omega(t) = (x, t)$ のとき、 $h > 0$ が存在してすべての $h' \in [0, h]$ に対して、 $\omega(t+h') = (x, t+h')$。 各 $\omega, \omega' \in \Omega$ に対して、

$$\rho(\omega, \omega') = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{\rho_j(\omega, \omega')}{1+\rho_j(\omega, \omega')}$$

により、Ωを距離付けすると、Ω は Polish space になる。ただし、ρ_jは 区间 $[j-1, j)$ 上の Ω における Skorohod metric である。 このことについては、Parthasarathy [11, Chap. VII, §6] と Kuratowski [9, Chap. III, §33] を参照されたい。

各 $0 \leq s \leq t$ に対して、 $\mathcal{F}_t^s \equiv \sigma(\omega(s') : s \leq s' \leq t)$, $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_\infty^0$。 各 $\pi \in \Pi$, $s \geq 0$ に対して、

$$C_s(\pi) \equiv \left\{ \text{stopping time } \tau \text{ w.r.t. } \{\mathcal{F}_t^s\}_{t \geq s} \ \middle| \ \text{すべての } x \in S \text{ に対して. } P_{(x,s)}^{\pi}(s \leq \tau < \infty) = 1 \right\}$$

とおく。

<u>$\pi \in \Pi$, $\tau \in C_s(\pi)$ に対応する期待利得</u>:

$$\varphi_\tau^\pi(x, s) \equiv E_{(x,s)}^\pi [g(Z_\tau^\pi)] \qquad (x, s) \in Z.$$

このとき、<u>問題</u>は、<u>optimal return</u> $u^*(x, s) = \sup_{\pi \in \Pi, \tau \in C_s(\pi)} \varphi_\tau^\pi(x, s)$ をみつけることである。 $((x, s) \in Z)$。

$\pi^* \in \Pi$ かつ $\tau \in C_s(\pi)$, $s \geq 0$ とする。組 (π^*, τ^*) が <u>optimal</u> とは、すべての $(x,s) \in Z$ に対して、 $u^*(x,s) = \varphi_{\tau^*}^{\pi^*}(x,s)$ のとき

にいう。

§3. Universal measurability

X, Y を Polish space の空でない Borel subset とする。

$P(X) \equiv X$ 上のすべての確率測度の全体.

$P(Y|X) \equiv X$ を与えたときの Y 上の条件付確率測度の全体.

$\bar{P}(X) \equiv p \in P(X)$ なる dirac 測度 p の全体.

$\bar{P}(Y|X) \equiv p \in P(Y|X)$ なる dirac 測度 p の全体.

X と Y の product space を XY とかく。

・$H_n \equiv A\mathbb{R}_+^\circ\Omega \cdots\cdots A\mathbb{R}_+^\circ\Omega$ ($3n$ factors) $n \geq 1$,

$H \equiv A\mathbb{R}_+^\circ\Omega \cdots\cdots\cdots$, ただし、$A$ は action space,

$\mathbb{R}_+^\circ = \mathbb{R}_+ - \{0\}$, Ω は sample space.

$\tilde{P}(H) \equiv H$ 上の確率測度で次をみたすものの全体;

すべての $p \in \tilde{P}(H)$ に対して、$p = p_1 p_2 p_3 \cdots\cdots$,

ここで、

$p_1 \in \bar{P}(A\mathbb{R}_+^\circ)$,

$p_2 \in P(\Omega \mid A\mathbb{R}_+^\circ)$,

$p_{2n+1} \in \bar{P}(A\mathbb{R}_+^\circ \mid H_n)$,

$p_{2n+2} \in P(\Omega \mid H_n A\mathbb{R}_+^\circ)$, $n \geq 1$ 。

$\tilde{\mathrm{P}}(H)$ に σ^*-field を与えると、$\tilde{\mathrm{P}}(H)$ は Polish space の Borel subset になる。$\tilde{\mathrm{P}}(H_n)$, $n \geq 1$ についても同様に定義する。(cf. [3])

各 $\pi \in \Pi$, $(x, s) \in Z$ に対して、

$$\mu(x, s) \equiv \inf\{t - s \mid \pi(x, s) \neq \pi(x, t),\ t > s\},$$

$$\nu_1 \equiv \min\{\nu(x,s), \mu(x,s)\},\quad \nu_n \equiv \min\{\nu(\omega(\xi_{n-1})), \mu(\omega(\xi_{n-1}))\},$$

$n \geq 2$, ただし、$\xi_0 = s$, $\xi_m = s + \nu_1 + \cdots + \nu_m$, $m \geq 1$.

各 $\omega \in \Omega$, $n \geq 1$ に対して、$\omega_n : \mathbb{R}_+ \to Z$ をすべての $t \geq 0$ に対し、

$$\omega_n(t) = \begin{cases} (x_{n-1}(\omega), t) & \text{if } t < \xi_n(\omega), \\ (x_n(\omega), t) & \text{otherwise}, \end{cases}$$

と定める。ただし、$x_m(\omega)$ は $\omega(\xi_m) = (x_m(\omega), \xi_m(\omega))$, $m \geq 1$ となる state である。

$\Omega_n \equiv \omega_n\ (\omega \in \Omega)$ の全体, $n \geq 1$.

各 $n \geq 1$, $\omega \in \Omega$ に対し、

$$t_{n1} \equiv \mu(x_n(\omega), \xi_n(\omega)),\quad t_{nk} \equiv \mu(x_n(\omega), \xi_n(\omega) + t_{n1} + \cdots + t_{nk-1}),$$
$k \geq 2$.

$$T_{nk}(\omega) \equiv \xi_n(\omega) + t_{n1} + \cdots + t_{nk},\quad n \geq 1,\ k \geq 1.$$

$$D_{nl} \equiv \left\{ (\omega, \omega') \in \Omega\Omega \;\middle|\; \begin{array}{l} x_n(\omega) = x_l(\omega') \text{ かつ} \\ [\xi_n(\omega), \xi_n(\omega) + t_n) \cap [\xi_l(\omega'), \xi_l(\omega') + t_l') \neq \emptyset \end{array} \right\}$$

$n \geq 1$, $1 \leq l \leq n$,

ただし、 $t_n = \mu(\omega(\xi_n))$, $t'_\ell = \mu(\omega'(\xi_\ell))$.

$I_{n\ell}$: $D_{n\ell}$ 上の indicator .

各 $\pi \in \Pi$, $n \geq 1$, $s \geq 0$ に対して

$H^{\pi}_{n}(s) \equiv A \mathbb{R}^{\circ}_{+} \Omega_1 \cdots A \mathbb{R}^{\circ}_{+} \Omega_n$,

$\mathcal{B}(H^{\pi}_{n}(s))$: $H^{\pi}_{n}(s)$ の Borel field .

<u>Lemma 3.1.</u> $\pi \in \Pi$, $z = (x, s) \in Z$, $p \in \tilde{P}(H)$ とする。このとき、 $p = P^{\pi}_{z}$ であるため必要十分条件は、すべての $n \geq 1$ に対して、 $E_{nm} \in \mathcal{B}(H^{\pi}_{n}(s))$, $m \geq 1$ が存在して、すべての $m \geq 1$ に対し、 $p(E_{nm}) = P^{\pi}_{z}(E_{nm})$ 。

証明は長くなるので略す。

次の2つの lemma は、Strauch [16] の Lemma 7.1, 7.2 に類似な結果である。

<u>Lemma 3.2.</u> r が ZH 上の任意の有界Borel-可測関数であるとする。このとき、 pr は $Z\tilde{P}(H)$ 上で Borel-可測である。

$M(H_n) \equiv H_n$ 上の有界なBorel-可測関数の全体， $n \geq 1$.

$\Lambda \equiv \{ (z, p) \in Z\tilde{P}(H) \mid p = P^{\pi}_{z} \text{ for some } \pi \in \Pi \}$.

<u>Lemma 3.3.</u> Λ は、$Z\widetilde{P}(H)$ の Borel subset である。

（証明） 簡単にふれる；

$r_{nm}, m \geq 1$ を $\widetilde{P}(H_n)$ の点を separate する $M(H_n)$ の countable subset とする、$n \geq 1$。

各 $m \geq 1$ に対して、

$$\Lambda_{1m} \equiv \left\{ (z,p) \in Z\widetilde{P}(H) \;\middle|\; \begin{array}{l} \int r_{1m}(a_1, t_1, \omega)\, dp(a_1, t_1, \omega) \\ \qquad = \int r_{1m}(a_1, t_1, \omega)\, dP_z^{(a_1, t_1)}(\omega_1)\, dp(a_1, t_1) \end{array} \right\},$$

$$\Lambda_{nm} \equiv \left\{ (z,p) \in Z\widetilde{P}(H) \;\middle|\; \begin{array}{l} \int r_{nm}(a_1, t_1, \omega, \cdots, a_n, t_n, \omega)\, dp(a_1, \cdots, \omega) \\ = \int r_{nm}(a_1, \cdots, \omega)\, dP_{\omega(\xi_{n-1})}^{(a_n, t_n)}(\omega_n)\, dp(a_1, \cdots, a_n, t_n) \end{array} \right\},$$

$$n \geq 2,$$

ただし、$\pi \in \Pi, z \in Z$, $\omega \in \Omega$ に対し、$\pi(z) = a_1, \mu(z) = t_1$, $\pi(\omega(\xi_n)) = a_{n+1}$, $\mu(\omega(\xi_n)) = t_{n+1}$, $n \geq 1$, また、$P_{\omega(\xi_{n-1})}^{(a_n, t_n)}$ は、Ω_n 上の確率測度 $P_{\omega(\xi_{n-1})}^{\pi}$ を表わす。

$$\widehat{\Lambda}_{n\ell} \equiv \left\{ (z,p) \in Z\widetilde{P}(H) \;\middle|\; \begin{array}{l} \iint I_{n\ell}\, p_{2n+1}(a_\ell, \xi_\ell(\omega) + t'_\ell - \xi_n(\omega) \mid \omega(\xi_n)) \\ \qquad \cdot dp\, dp = p \otimes p(D_{n\ell}) \end{array} \right\},$$

$$n \geq 1,\ 1 \leq \ell \leq n.$$

$$\overline{\Lambda}_j \equiv \left\{ (z,p) \in Z\widetilde{P}(H) \;\middle|\; p\left(\lim_{k \to \infty} T_{jk}(\omega) = \infty\right) = 1 \right\}, \quad j \geq 1.$$

このとき、

$$\Lambda = \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \Lambda_{1m}\right) \cap \left[\bigcap_{n=2}^{\infty} \left\{ \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \Lambda_{nm}\right) \cap \left(\bigcap_{\ell=1}^{n-1} \widehat{\Lambda}_{n-1\,\ell}\right) \right\}\right] \cap \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{\Lambda}_j\right)$$

となり、それで Lemma 3.2 から Λ は、$Z\widetilde{P}(H)$ の Borel subset である。□

<u>Theorem 3.1.</u> τを、すべての$\pi\in\Pi$, $s\geq 0$に対して$\tau\in C_{s(\pi)}$となるようなstopping timeとする。このとき、$v^* = \sup_{\pi\in\Pi} \varphi^{\pi}_{\tau}$は、Z上でuniversally measurableである。

(証明). w_zを、initial stateが$z\in Z$であるようなsample pathとすると、$g(w_z(\tau))$はZH上の有界Borel-可測な関数である。これとLemma 3.2から、$\bar{v}(z,p) = \int g(w_z(\tau))\,dp$は$(z,p)$のBorel-可測関数である。

ところが、$v^*(z) = \sup_{p\in\Lambda_z} \bar{v}(z,p)$、ただし、$\Lambda_z = \{p \mid (z,p)\in\Lambda\}$。 $B_\alpha = \Lambda\cap\{(z,p)\in Z\mathcal{P}(H) \mid \bar{v}(z,p) > \alpha\}$とすると、Lemma 3.3から、$B_\alpha$はBorel。

$C_\alpha = \{z \mid v^*(z) > \alpha\}$とすると、これは$B_\alpha$のprojectionなのでanalytic。ゆえにC_αはuniversally measurable setである。□

§4. Optimal return

次の定義は、Shiryayev [14] に類似なものである。

<u>Definition 4.1.</u> fを、Z上の有界なuniversally measurableな関数とする。

(i) 自然数$N<\infty$と$\pi\in\Pi$に対して

fが(N,π)- excessive

$\Longleftrightarrow$ 各 $(x,s)\in S\times[0,N)$ に対して、

$$f(x,s)\geq E^{\pi}_{(x,s)}[f(Z^{\pi}_{t})], \quad t\in[s,N],$$

$$\lim_{t\downarrow s} f(Z^{\pi}_{t}) \geq f(x,s) \qquad P^{\pi}_{(x,s)}\text{-a.s.}$$

(ii) $N<\infty$ に対して

f が N-excessive

$\Longleftrightarrow$ すべての $\pi\in\Pi$ に対して、f が (N,π)-excessive.

(iii) f が excessive

$\Longleftrightarrow$ すべての $N<\infty$ に対して、f が N-excessive.

(iv) f が "majorant of g"

$\Longleftrightarrow$ すべての $z\in Z$ に対して、$f(z)\geq g(z)$.

<u>Definition 4.2.</u> f を、"majorant of g" かつ N-excessive な関数とする。

f : smallest N-excessive majorant of g

$\Longleftrightarrow$ 任意の "majorant of g" かつ N-excessive な関数 h に対して、すべての $z\in S\times[0,N]$ に対し $f(z)\leq h(z)$.

(同様にして、smallest excessive majorant of g を定義する。)

各々の自然数 $N<\infty$ と $\pi\in\Pi$ に対して、列 $\{v^{n}_{N}(\pi)\}_{n=0,1,2,\cdots}$ を次の関係式で定める；

$$v_N^n(\pi)(x,s) = \max\left\{ g(x,s),\ E_{(x,s)}^{\pi}\left[v_N^n(\pi)(Z_{k_n(s)}^{\pi}) \right] \right\},$$
$$\text{if } (x,s) \in S \times [0,N),$$

$$v_N^n(\pi)(x,s) = g(x,s) \qquad \text{otherwise},$$

ただし、$k_n(s) = \min_i \{ i\cdot 2^{-n} \mid i\cdot 2^{-n} > s \}$.

各 $N<\infty$, $\pi\in\Pi$ に対して、

$$v_N(\pi)(x,s) \equiv \lim_{n\to\infty} v_N^n(\pi)(x,s), \qquad (x,s)\in Z,$$

$$V^N(\pi)(x,s) \equiv \begin{cases} \sup_{\tau\in C_s^N(\pi)} \varphi_\tau^\pi(x,s) & \text{if } (x,s)\in S\times[0,N), \\ g(x,s) & \text{otherwise}, \end{cases}$$

とおく、ただし、$C_s^N(\pi) \equiv \{ \tau\in C_s(\pi) \mid P_{(x,s)}^{\pi}(\tau\leqq N) = 1,\ x\in S \}$.

各々の自然数 $m<\infty$, $N<\infty$ と各 $\pi\in\Pi$ に対して、

$$\Gamma_N^m(\pi) \equiv \{ z \mid v_N(\pi)(z) \leqq g(z) + \tfrac{1}{m} \},$$

$$\sigma_N^m \equiv \inf\{ t\geqq s \mid Z_t^\pi \in \Gamma_N^m(\pi) \}, \qquad s\geqq 0,$$

とおく。

<u>Theorem 4.1.</u> 各々の $N<\infty$, $\pi\in\Pi$ に対して、

(i) すべての $(x,s)\in Z$ に対し、$v_N(\pi)(x,s) = V^N(\pi)(x,s)$.

(ii) $v_N(\pi)$ は、(N,π)-excessive.

(iii) 各 $x\in S$ に対し、$v_N(\pi)(x,\cdot)$ は $\mathbb{R}_+$ 上で右連続.

(iv) 各々の $m<\infty$ とすべての $(x,s)\in Z$ に対して、

$$v_N(\pi)(x,s) \leqq \varphi_{\sigma_N^m}^{\pi}(x,s) + \frac{1}{m}.$$

証明は長くなるので略す。

各 $N<\infty$ に対して、

$$U^N(x,s) \equiv \begin{cases} \sup_{\pi\in\Pi,\, \tau\in C_s^N(\pi)} \varphi_\tau^\pi(x,s) & \text{if } (x,s)\in S\times[0,N), \\ q(x,s) & \text{otherwise}, \end{cases}$$

とおく。

<u>Theorem 4.2.</u> 各 $N<\infty$ とすべての $(x,s)\in Z$ に対して、

$$U^N(x,s) = \sup_{\pi\in\Pi} v_{N(\pi)}(x,s) .$$

(証明). Theorem 4.1 の (i) からすぐ。□

各 $N<\infty$, $n\geq 0$ に対して、U_N^n を次の関係式で定める;

$$U_N^n(x,s) = \max\left\{ q(x,s),\ \sup_{\pi\in\Pi} E_{(x,s)}^\pi\left[U_N^n(Z_{\tau_{n(s)}}^\pi)\right]\right\}$$
$$\text{if } (x,s)\in S\times[0,N),$$

$$U_N^n(x,s) = q(x,s) \qquad \text{otherwise}.$$

また、 $U_N(x,s) = \lim_{n\to\infty} U_N^n(x,s)$, $(x,s)\in Z$ とおく。

<u>Lemma 4.1.</u> f を、Z 上の有界な universally measurable 関数とする。このとき、各々の $\pi\in\Pi$, $(x,s)\in Z$, $r\in(s,\infty)$ に対して、$\lim_{t\downarrow s} E_{(x,t)}^\pi[f(Z_r^\pi)] = E_{(x,s)}^\pi[f(Z_r^\pi)]$.

(証明). 各 $\pi\in\Pi$, $s<t<r$ に対して、

$$E_{(x,s)}^\pi[f(Z_r^\pi)] = E_{(x,s)}^\pi\left[E_{Z_t^\pi}^\pi[f(Z_r^\pi)]\right]$$
$$= \left(1-G^\pi(x,s:t-s)\right)E_{(x,t)}^\pi[f(Z_r^\pi)]$$
$$+ \int_0^{t-s} G^\pi(x,s:dw)\,Q(dy'|x,s+w,\pi(x,s+w)).$$

$$\cdot P^{\pi}(y', s+w : t, dy) E^{\pi}_{(y,t)}[f(Z^{\pi}_{r})] ,$$

ただし、$G^{\pi}(x,s : h) = P^{\pi}_{(x,s)}(\nu(x,s) \leq h)$, $h \geq 0$,

$$P^{\pi}(x,s ; t, \Lambda) = P^{\pi}_{(x,s)}(X^{\pi}_{t} \in \Lambda) , \quad t \geq s , \quad \Lambda \in \mathcal{B}(S).$$

$\|f\| = \sup_{z \in Z} |f(z)|$ とすると

$$\left| E^{\pi}_{(x,s)}[f(Z^{\pi}_{r})] - E^{\pi}_{(x,t)}[f(Z^{\pi}_{r})] \right| \leq G^{\pi}(x,s : t-s)\|f\| + (t-s)\|f\|.$$

$\|f\| < \infty$, $G^{\pi}(x,s : t-s) \to 0$ (as $t \to s$) なので、

$$\lim_{t \downarrow s} E^{\pi}_{(x,t)}[f(Z^{\pi}_{r})] = E^{\pi}_{(x,s)}[f(Z^{\pi}_{r})] . \quad \square$$

<u>Lemma 4.2.</u> すべての $\pi \in \Pi$ に対して、f^{π} は、Z 上の有界で universally measurable な関数とする。$(x,s) \in Z$ とする。このとき、すべての $\tilde{\pi} \in \Pi$ に対して、$\liminf_{t \downarrow s} f^{\tilde{\pi}}(x,t) \geq f^{\tilde{\pi}}(x,s)$ ならば、任意の $\pi \in \Pi$ に対して、

$$\liminf_{t \downarrow s} \sup_{\tilde{\pi} \in \Pi} f^{\tilde{\pi}}(Z^{\pi}_{t}) \geq \sup_{\tilde{\pi} \in \Pi} f^{\tilde{\pi}}(x,s) \quad P^{\pi}_{(x,s)}\text{-a.s.}.$$

(証明)、π を任意の policy とする。

$\Omega^{\pi}(x,s) \equiv \{\omega \in \Omega \mid Z^{\pi}_{s}(\omega) = (x,s)\}$ とすると $P^{\pi}_{(x,s)}(\Omega^{\pi}(x,s)) = 1$ 。

また、各 $\omega \in \Omega^{\pi}(x,s)$ に対して、$h > 0$ が存在して、すべての $t \in [s, s+h)$ に対し $Z^{\pi}_{t}(\omega) = (x,t)$ 。これより、

$\liminf_{t \downarrow s} \sup_{\tilde{\pi} \in \Pi} f^{\tilde{\pi}}(x,t) \geq \sup_{\tilde{\pi} \in \Pi} f^{\tilde{\pi}}(x,s)$ を示せば十分である。

ところが、条件より、

$$\liminf_{t \downarrow s} \sup_{\tilde{\pi} \in \Pi} f^{\tilde{\pi}}(x,t) \geq \sup_{\tilde{\pi} \in \Pi} \liminf_{t \downarrow s} f^{\tilde{\pi}}(x,t) \geq \sup_{\tilde{\pi} \in \Pi} f^{\tilde{\pi}}(x,s) . \quad \square$$

各$\pi\in\Pi$, $N<\infty$, $s\geq 0$, $n\geq 0$ に対して.

$$C_s^{N,n}(\pi) \equiv \{\tau\in C_s^N(\pi) \mid \tau = s \text{ or } k\cdot 2^{-n}, k=0,1,2,\cdots,N\cdot 2^{-n}\}.$$

任意の$\tau\in C_s^N(\pi)$ と 各 $n\geq 0$ に対して.

$$\tau(n) = \begin{cases} s & \text{if } \tau = s, \\ k\cdot 2^{-n} & \text{if } (k-1)\cdot 2^{-n} \leq \tau < k\cdot 2^{-n},\ s<\tau<N, \\ N & \text{otherwise}, \end{cases}$$

とおくと $\tau(n)\in C_s^{N,n}(\pi)$.

<u>Theorem 4.3.</u> 各$N<\infty$ に対して $U^N = u_N$ on Z.

(証明). 明らかに $S\times[N,\infty)$ 上では $U^N = u_N$ 。

$N<\infty$, $(x,s)\in S\times[0,N)$ を任意とする。Furukawa[6] の Theorem 4.1 から、各$n\geq 0$ に対して、u_N^n は 離散時間の場合の意味で、smallest N-excessive majorant of g である。したがって、Shiryayev [14, Chap. II] の Lemma 5 より、任意の $\pi\in\Pi$, $\tau\in C_s^N(\pi)$ に対して.

$$u_N^n(x,s) \geq E_{(x,s)}^{\pi}\left[u_N^n(Z_{\tau(n)}^{\pi})\right] \geq E_{(x,s)}^{\pi}\left[g(Z_{\tau(n)}^{\pi})\right] = \varphi_{\tau(n)}^{\pi}(x,s).$$

path $w\in\Omega$ と gの性質から

$$\lim_{h\to 0+} g(Z_{t+h}^{\pi}(w)) = g(Z_t^{\pi}(w)), \quad t\geq 0,$$

なので, $n\to\infty$ とすると $u_N(x,s) \geq \varphi_\tau^{\pi}(x,s)$ 。

よって. $u_N(x,s) \geq U^N(x,s)$ 。

一方、[6] の Theorem 3.2 から. 各$n\geq 0$ に対して.

$$u_N^n(x,s) = \sup_{\pi\in\Pi,\ \tau\in C_s^{N,n}(\pi)} \varphi_\tau^{\pi}(x,s) .$$

$C_s^{N,n}(\pi) \subset C_s^N(\pi)$ なので、 $u_N^n(x,s) \leqq U^N(x,s)$。

$n\to\infty$ とすると、 $u_N(x,s) \leqq U^N(x,s)$。 □

<u>Theorem 4.4</u> 各 $N<\infty$ に対して、

(i) u_N は Z 上で universally measurable.

(ii) u_N は smallest N-excessive majorant of g.

(証明). (i). Theorem 4.1-(i), 4.2, 4.3 から

$$u_N(x,s) = \begin{cases} \lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{\pi\in\Pi} \varphi^{\pi}_{\sigma_N^m}(x,s) & \text{if } (x,s)\in S\times[0,N), \\ g(x,s) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

Theorem 3.1 により、 $\sup\limits_{\pi\in\Pi} \varphi^{\pi}_{\sigma_N^m}$ は $S\times[0,N)$ 上で、universally measurable なので、 u_N は Z 上で universally measurable である。

(ii). 最初に、 任意の $\pi\in\Pi$ と各 $(x,s)\in S\times[0,N)$ に対して、 $\lim\limits_{t\downarrow s} u_N(Z_t^\pi) \geqq u_N(x,s)$ $P^\pi_{(x,s)}$-a.s. を示す。 $n\geqq 0$ を任意にとる。 Lemma 4.1 から、各 $k=1,2,\cdots,N\cdot 2^{n}$, $(x,s)\in S\times[N-k\cdot 2^{-n}, N-(k-1)\cdot 2^{-n})$ に対して、

$$\lim_{t\downarrow s} E^{\tilde\pi}_{(x,t)}\left[u_N^n(Z^{\tilde\pi}_{k_n(s)})\right] = E^{\tilde\pi}_{(x,s)}\left[u_N^n(Z^{\tilde\pi}_{k_n(s)})\right] \text{ for all } \tilde\pi\in\Pi.$$

これと Lemma 4.2 から、任意の $\pi\in\Pi$ と各 $k=0,1,\cdots,N\cdot 2^{n}$, $(x,s)\in S\times[N-k\cdot 2^{-n}, N-(k-1)\cdot 2^{-n})$ に対して、

$$\liminf_{t\downarrow s} \sup_{\tilde\pi\in\Pi} E^{\tilde\pi}_{Z_t^\pi}\left[u_N^n(Z^{\tilde\pi}_{k_n(s)})\right] \geqq \sup_{\tilde\pi\in\Pi} E^{\tilde\pi}_{(x,s)}\left[u_N^n(Z^{\tilde\pi}_{k_n(s)})\right]$$
$$P^\pi_{(x,s)}\text{-a.s.}$$

したがって、u_N^n の定め方から、任意の $\pi\in\Pi$ と各 k,
$(x,s)\in S\times[N-k\cdot2^{-n}, N-(k-1)\cdot2^{-n})$ に対して、

$$\liminf_{t\downarrow s} u_N^n(Z_t^\pi) \geqq u_N^n(x,s) \quad P_{(x,s)}^\pi\text{-a.s.},$$

すなわち、これは任意の $\pi\in\Pi$ と各 $(x,s)\in S\times[0,N)$ に対して成立する。 $u_N=\sup_{n\geqq0} u_N^n$ なので、$n\to\infty$ とすると、任意の $\pi\in\Pi$ と各 $(x,s)\in S\times[0,N)$ に対して、

$$(4.1)\quad \liminf_{t\downarrow s} u_N(Z_t^\pi) \geqq u_N(x,s) \quad P_{(x,s)}^\pi\text{-a.s.}。$$

次に、各 $\pi\in\Pi$, $(x,s)\in S\times[0,N)$ とすべての $t\in[s,N]$ に対して、 $u_N(x,s)\geqq E_{(x,s)}^\pi[u_N(Z_t^\pi)]$ を示す。
$\pi\in\Pi$ と $(x,s)\in S\times[0,N)$ を任意にとる。 $t=s$ のとき、明らかに、 $u_N(x,s)=E_{(x,s)}^\pi[u_N(Z_t^\pi)]$ 。
各 $t\in T_s^N\equiv\{k\cdot2^{-n}\mid k\cdot2^{-n}>s,\ k=1,2,\cdots,N\cdot2^{-n},\ n=0,1,\cdots\}$ に対して、$t=k\cdot2^{-n}$ となる n と k がとれる。u_N^n の定め方から、

$$u_N^n(x,s)\geqq E_{(x,s)}^\pi[u_N^n(Z_{k\cdot2^{-n}}^\pi)]=E_{(x,s)}^\pi[u_N^n(Z_t^\pi)]。$$

$n\to\infty$ とすると、

$$(4.2)\quad u_N(x,s)\geqq E_{(x,s)}^\pi[u_N(Z_t^\pi)]。$$

各 $t\notin T_s^N\cup\{s\}$ に対しては、列 $\{t_m\}_{m=1}^\infty$ を $t_m\in T_s^N$ $m=1,2,\cdots$, $t_m\downarrow t$ (as $m\to\infty$) となるようにとれる。(4.1), (4.2) と Fatou の lemma より、

$$u_N(x,s)\geqq E_{(x,s)}^\pi[\liminf_{m\to\infty} u_N(Z_{t_m}^\pi)]\geqq E_{(x,s)}^\pi[u_N(Z_t^\pi)]。$$

さらに u_N は、明らかに、"majorant of q"。

N-excessive な u_N の "smallest" 性については、省略する。□

任意の $\pi \in \Pi$, $\tau \in C_s(\pi)$ と各 $(x,s) \in Z$ に対して、
$P^{\pi}_{(x,s)}(\tau < \infty) = 1$ であり、また、g は有界なので、明らかに、 $\liminf_{N \to \infty} \int_{(\tau > N)} g^-(Z^{\pi}_N)\, dP^{\pi}_{(x,s)} = 0$, ただし、$g^- = \max\{0, -g\}$。

$u \equiv \lim_{N \to \infty} u_N$ とおく。

<u>Theorem 4.5.</u> (i) u は Z 上で universally measurable.
(ii) u は、smallest excessive majorant of g.
(iii) Z 上で $u = u^*$.
(iv) 各 $x \in S$ に対して、$u(x,\cdot)$ は $\mathbb{R}_+$ 上で右連続。

(証明) (i), (ii) は Theorem 4.4 から簡単に示される。
(iii) $\pi \in \Pi$, $(x,s) \in Z$, $\tau \in C_s(\pi)$ を任意にとる。各 $N < \infty$ に対して、 $\tau_N \equiv \min(\tau, N)$ とおくと、$\tau_N \in C^N_s(\pi)$ なので、

$$\int_{(\tau \le N)} g(Z^{\pi}_{\tau})\, dP^{\pi}_{(x,s)} = E^{\pi}_{(x,s)}[g(Z^{\pi}_{\tau_N})] - \int_{(\tau > N)} g(Z^{\pi}_N)\, dP^{\pi}_{(x,s)}$$
$$\le U^N(x,s) + \int_{(\tau > N)} g^-(Z^{\pi}_N)\, dP^{\pi}_{(x,s)} .$$

$N \to \infty$ とすると、 $E^{\pi}_{(x,s)}[g(Z^{\pi}_{\tau})] \le u(x,s)$ 。

したがって、π としては、任意なので、$u^*(x,s) \leqq u(x,s)$。

逆に、u^* と U^N の定義より、各 $N<\infty$ に対して、$U^N(x,s) \leqq u^*(x,s)$。$N\to\infty$ とすると、$u(x,s) \leqq u^*(x,s)$。

(iv)、(ii)により、u は、excessive であるので、Blumental-Getoor [1, Chap.II, Therem 2.12] から、各 $(x,s)\in Z$ に対して、mapping $t \longrightarrow u(Z_t^\pi)$ は $[s,\infty)$ 上で右連続、$P^\pi_{(x,s)}$-a.s.。各 $\pi\in\Pi$, $(x,s)\in Z$ に対して、

$\hat{\Omega}^\pi(s) \equiv \{\omega\in\Omega \mid t\to u(Z_t^\pi)$ が $[s,\infty)$ 上で右連続$\}$ とすると、各 $\pi\in\Pi$, $(x,s)\in Z$ に対して、$P^\pi_{(x,s)}(\hat{\Omega}^\pi(s)\cap\Omega^\pi(x,s))=1$,

さらに、$\omega\in\hat{\Omega}^\pi(s)\cap\Omega^\pi(x,s)$ に対して、$h>0$ が存在して、すべての $t\in[s,s+h)$ に対して、$Z_t^\pi(\omega)=(x,t)$。したがって、各 $\pi\in\Pi$, $(x,s)\in Z$ に対して、

$$\lim_{t\downarrow s} u(x,t) = \lim_{t\downarrow s} u(Z_t^\pi) = u(Z_s^\pi) = u(x,s) \quad P^\pi_{(x,s)}\text{-a.s.}。$$

ゆえに、各 $x\in S$ に対して、$u(x,\cdot)$ は $\mathbb{R}_+$ 上で右連続。□

§5. Optimality equation

$F \equiv Z$ 上の有界Borel-可測な関数の全体.

各 $\pi\in\Pi$ に対して、$\tilde{F}^\pi$ を、各 $(x,s)\in Z$ に対し、$\lim_{t\downarrow 0} E^\pi_{(x,s)}[f(Z^\pi_{s+t})] = f(x,s)$ となるような $f\in F$ の全体とおく。

各 $\pi\in\Pi$, $f\in\tilde{F}^\pi$ に対して、

$$h(x,s) \equiv \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \left\{ E^{\pi}_{(x,s)}[f(Z^{\pi}_{s+t})] - f(x,s) \right\}, \quad (x,s) \in Z,$$

が存在して、$h \in F^{\pi}$ のとき、$h = A^{\pi} f$ とかき、operator A^{π} の定義域を $\mathcal{D}(A^{\pi})$，また $\mathcal{D}(A) \equiv \bigcap_{\pi \in \Pi} \mathcal{D}(A^{\pi})$ とおく。

<u>Lemma 5.1.</u> $f \in F$ は、$\frac{d^+}{ds} f$ が存在して有界かつ、各 $x \in S$ に対して、$\frac{d^+}{ds} f(x,\cdot)$ が R_+ 上で右連続であるような関数とする。このとき、$f \in \mathcal{D}(A)$、かつ、任意の $\pi \in \Pi$ と各 $(x,s) \in Z$ に対して、

$$A^{\pi} f(x,s) = \frac{d^+}{ds} f(x,s) + \lambda(x,s,\pi(x,s)) \left[\int_S f(y,s) Q(dy|x,s,\pi(x,s)) - f(x,s) \right].$$

(証明). Stone[15] と同様にして証明できる。([15] の Lemma 3.1)

$\Gamma \subset Z$ が次のことをみたすとき、Γ を admissible stopping set という；各 $x \in S$ と任意の有限区間 I に対して、非負の整数 $m < \infty$ と $\{\Gamma_n\}_{n=0}^{m}$ が存在して、

(i) $\Gamma_0 = \Phi$ かつ $\Gamma_n, n = 1, 2, \cdots, m$ は closed または left-closed な区間

(ii) $\Gamma(x) \cap I = \bigcup_{n=0}^{m} \Gamma_n$，ただし、$\Gamma(x) = \{ s \geq 0 \mid (x,s) \in \Gamma \}$。

任意の $\pi \in \Pi$ と admissible stopping set Γ に対して、

$$\tau_{\Gamma} \equiv \inf \{ t \geq s \mid Z^{\pi}_{t} \in \Gamma \} , \quad s \geq 0 ,$$

とおく。$\mathcal{J}$ を、すべての $\pi \in \Pi$，$s \geq 0$ に対して $\tau_{\Gamma} \in C_s(\pi)$ となる admissible stopping set Γ の全体とする。

h ; $0 < h \leqq \infty$ を fix する。各 $\pi \in \Pi$, $(x,s) \in Z$, $\Gamma \in \mathcal{J}$ に対して、 $\delta_1(\Gamma) \equiv \min\{h, \nu(x,s), \tau_\Gamma - \eta_0\}$ とおく。ただし、$\eta_0 = s$ 。同様にして、

$$\delta_n(\Gamma) \equiv \min\{h, \nu(Z^\pi_{\eta_{n-1}}), \tau_\Gamma - \eta_{n-1}\}, \quad n \geqq 2,$$

とおく。ただし、$\eta_m = s + \delta_1(\Gamma) + \cdots + \delta_m(\Gamma)$, $m \geqq 1$ 。

任意の $\pi \in \Pi$ と、各 $(x,s) \in Z$, $\Lambda \in \mathcal{B}(S)$, $w \geqq 0$ に対して、

$$H^\pi(x,s,\Lambda,w) \equiv P^\pi_{(x,s)}[X^\pi_{\eta_1} \in \Lambda \text{ かつ } \delta_1(\Gamma) \leqq w], \Gamma \in \mathcal{J},$$

とおく。

<u>Definition 5.1.</u> $\Gamma \in \mathcal{J}$ とする。

$\pi^* \in \Pi$ が Γ-optimal

$\Longleftrightarrow$ すべての $(x,s) \in Z$ に対して、$\varphi^{\pi^*}_{\tau_\Gamma}(x,s) = \sup_{\pi \in \Pi} \varphi^\pi_{\tau_\Gamma}(x,s)$ 。

$\pi^* \in \Pi$ を Γ-optimal として、各 $\pi \in \Pi$ に対して、

$$\psi^\pi(x,s) \equiv \int_Z \varphi^{\pi^*}_{\tau_\Gamma}(y, s+w)\, H^\pi(x,s,dy,dw), \quad (x,s) \in Z,$$

とおく。

<u>Lemma 5.2.</u> $\Gamma \in \mathcal{J}$ とする。 $\pi^* \in \Pi$ が Γ-optimal ならば、すべての $(x,s) \in Z$ に対して、

$$\varphi^{\pi^*}_{\tau_\Gamma}(x,s) = \sup_{\pi \in \Pi} \psi^\pi(x,s) \quad 。$$

(証明). Stone [15] の Theorem 5.1 と同様にして、証明できる。

$\Gamma^* \equiv \{z \in Z \mid u^*(z) = g(z)\}$ とおいて、特に $\sigma^* = \tau_{\Gamma^*}$ とおく。さらに、subset $B \subset Z$ に対して、

$$S(B) \equiv \{x \in S \mid (x,s) \in B \quad \text{for some } s \geq 0\}$$

とする。

<u>Theorem 5.1.</u> $\Gamma^* \in \mathcal{J}$ かつ、$S(\Gamma^*)$ 上で $\frac{d^+}{ds} g$ が存在し有界で、各 $x \in S(\Gamma^*)$ に対して、$\frac{d^+}{ds} g(x,\cdot)$ は $\mathbb{R}_+$ 上で右連続であると仮定する。このとき、

(π^*, σ^*) : optimal

$\rightleftarrows$ (i) $\varphi^{\pi^*}_{\sigma^*} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$

(ii) $\varphi^{\pi^*}_{\sigma^*}$: majorant of g

(iii) $\varphi^{\pi^*}_{\sigma^*}$ が次の関係式をみたす；

$$\begin{cases} \max\limits_{\pi \in \Pi} \mathcal{A}^\pi f(z) = 0 & \text{for all } z \notin \Gamma^*, \\ f(z) = g(z) & \text{for all } z \in \Gamma^*. \end{cases}$$

(証明). (π^*, σ^*) が optimal とする。$\Gamma^* \in \mathcal{J}$ なので π^* は明らかに Γ^*-optimal。

$(x,s) \notin \Gamma^*$ とすると $\Gamma^* \in \mathcal{J}$ なので、$h > 0$ が存在して、すべての $h' \in [0,h]$ に対して $(x, s+h) \notin \Gamma^*$。それで、$\delta_1(\Gamma^*) = \min\{h, \nu(x,s)\}$ としてよい。Lemma 5.2により、任意の $\pi \in \Pi$ に対して、

$$\varphi^{\pi^*}_{\sigma^*}(x,s) \geq \int_Z \varphi^{\pi^*}_{\sigma^*}(y, s+w)\, H^\pi(x,s,dy,dw)$$

$$= \left(1 - G^{\pi}(x, s : h)\right) \varphi^{\pi*}_{\rho*}(x, s+h) \ +$$

$$+ \int_0^h G^{\pi}(x, s; dw) \int_S \varphi^{\pi*}_{\rho*}(y, s+w)\, Q\,(dy \mid x, s+w,\ \pi(x, s+w))$$

$$= \exp\left\{-\int_0^h \lambda(x, s+s', \pi(x, s+s')\, ds'\right\} \cdot \varphi^{\pi*}_{\rho*}(x, s+h)$$

$$+ \int_0^h \lambda(x, s+w, \pi(x, s+w)) \exp\left\{-\int_0^w \lambda(x, s+s', \pi(x, s+s'))\, ds'\right\} \cdot$$

$$\cdot \int_S \varphi^{\pi*}_{\rho*}(y, s+w)\, Q\,(dy \mid x, s+w, \pi(x, s+w))\, dw\ .$$

π と Q の性質から、十分小さい h をとると、

$$\varphi^{\pi*}_{\rho*}(x, s) \geq \exp\left\{-\int_0^h \lambda^{\pi}(x, s+s')\, ds'\right\} \cdot \varphi^{\pi*}_{\rho*}(x, s+h)$$

$$+ \int_0^h \lambda^{\pi}(x, s+w) \exp\left\{-\int_0^w \lambda^{\pi}(x, s+s')\, ds'\right\} \cdot$$

$$\cdot \int_S \varphi^{\pi*}_{\rho*}(y, s+w)\, Q^{\pi}(dy \mid x, s)\, dw\ ,$$

ただし、 $\lambda^{\pi}(x, s+s') \equiv \lambda(x, s+s', \pi(x, s))$, $s' \in [0, h]$

$$Q^{\pi}(\cdot \mid x, s) \equiv Q(\cdot \mid x, s, \pi(x, s))\ 。$$

したがって、

$$\frac{1}{h}\left[\varphi^{\pi*}_{\rho*}(x, s) - \varphi^{\pi*}_{\rho*}(x, s+h)\right]$$

$$\geq \frac{1}{h} \int_0^h \lambda^{\pi}(x, s+w) \exp\left\{-\int_0^w \lambda^{\pi}(x, s+s')\, ds'\right\} \cdot \tag{5.1}$$

$$\cdot \left[\int_S \varphi^{\pi*}_{\rho*}(y, s+w)\, Q^{\pi}(dy \mid x, s) - \varphi^{\pi*}_{\rho*}(x, s+h)\right] dw\ 。$$

(5.1) において、$\pi = \pi^*$ とすると 等式が成立する。g が有界であるので、$\varphi^{\pi*}_{\rho*}$ も有界。 これと λ の有界性から、

(5.1) において、$\pi=\pi^*$ とすると右辺は有界である。このとき、十分小さい $h>0$ に対して、

$$\left|\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}(x,s)-\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}(x,s)\right| \leq h\cdot L \quad 。$$

これは、すべての $(x,s)\notin\Gamma^*$ に対して、$\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}(x,s)$ は s で右連続であることを示している。したがって、(5.1) で、$\pi=\pi^*$ とし、$h\to 0+$ とすると、$\frac{d^+}{ds}\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}$ が $(\Gamma^*)^c$ 上で存在し、有界であり、さらに、すべての $(x,s)\notin\Gamma^*$ に対して、$\frac{d^+}{ds}\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}(x,s)$ は s で右連続である。よって、(5.1) において $h\to 0+$ とすると、任意の $\pi\in\Pi$ に対して、

$$-\frac{d^+}{ds}\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}(x,s) \geqq \lambda^{\pi}(x,s)\left[\int_S \varphi^{\pi^*}_{\rho^*}(y,s)\,Q^{\pi}(dy\,|\,x,s)-\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}(x,s)\right]$$

これより、すべての $z\notin\Gamma^*$ に対して、

$$\max_{\pi\in\Pi} \mathcal{A}^{\pi}\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}(z)=0 \quad 。$$

また、$(x,s)\in\Gamma^*$ に対しては、$\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}(x,s)=g(x,s)$、それで、$\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}$ は Lemma 5.1 での f の条件をみたす。したがって、$\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$。さらに、明らかに、$\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}\geqq g$ なので、必要性は証明された。

次に十分性を示す。(i)〜(iii) を仮定する。このとき、任意の $\pi\in\Pi$ と各 $(x,s)\notin\Gamma^*$ に対して、

$$\mathcal{A}^{\pi}\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}(x,s) \leqq 0 \quad 。$$

$\pi\in\Pi$, $m<\infty$, $N<\infty$ を任意にとる。すべての $z\in Z$ に対して、 $u^*(z)\geqq v_N(\pi)(z)\geqq g(z)$ なので、$\Gamma^*\subset\Gamma^m_N(\pi)$。

したがって，$\sigma_N^m \leq \sigma^*$ となり，それで，

(5.2) $$E_{(x,s)}^{\pi}\left[\int_s^{\sigma_N^m} \mathcal{A}^{\pi} \varphi_{\sigma^*}^{\pi*}(Z_t^{\pi})\,dt\right] \leq 0 \quad , \quad (x,s) \notin \Gamma^* .$$

しかるに，Dynkin [4, p133] の Corollary から，

$$E_{(x,s)}^{\pi}\left[\int_s^{\sigma_N^m} \mathcal{A}^{\pi} \varphi_{\sigma^*}^{\pi*}(Z_t^{\pi})\,dt\right] = E_{(x,s)}^{\pi}\left[\varphi_{\sigma^*}^{\pi*}(Z_{\sigma_N^m}^{\pi})\right] - \varphi_{\sigma^*}^{\pi*}(x,s).$$

これと (5.2) から，

$$\varphi_{\sigma^*}^{\pi*}(x,s) \geq E_{(x,s)}^{\pi}\left[\varphi_{\sigma^*}^{\pi*}(Z_{\sigma_N^m}^{\pi})\right], \quad (x,s) \notin \Gamma^* .$$

$\varphi_{\sigma^*}^{\pi*} \geq g$ なので，Theorem 4.1 の (iv) から，

$$\varphi_{\sigma^*}^{\pi*}(x,s) \geq E_{(x,s)}^{\pi}\left[g(Z_{\sigma_N^m}^{\pi})\right] \geq v_{N(\pi)}(x,s) - \frac{1}{m},$$
$$(x,s) \notin \Gamma^* .$$

したがって，$\pi \in \Pi$ について supremum をとって，$m \to \infty$

$N \to \infty$ とすると，Theorem 4.2, 4.3, 4.5 より，

$$\varphi_{\sigma^*}^{\pi*}(x,s) \geq u^*(x,s) \quad , \quad (x,s) \notin \Gamma^* .$$

また，$(x,s) \in \Gamma^*$ に対しては，$\sigma^* = 0$ なので，$\varphi_{\sigma^*}^{\pi*}(x,s) = g(x,s) = u^*(x,s)$。ゆえに，すべての $z \in Z$ に対して，

$$\varphi_{\sigma^*}^{\pi*}(z) = u^*(z) \quad . \quad \square$$

参考文献

[1]. R.M. Blumental and R.K. Getoor, Markov Processes and Potential Theory, Academic Press, New York, (1968).

[2]. B. Doshi, Continuous time control of Markov processes

on an arbitrary state space: discounted rewards, Ann. Statist. 4 (1976), 1219-1235.

[3]. L. Dubins and D. Freedman, Measurable sets of measure, Pacific J. Math. 14 (1965), 1211-1222.

[4]. E.D. Dynkin, Markov Processes-I, Springer-Verlag, Berlin, (1965).

[5]. A.G. Fakeev, Optimal stopping of a Markov process, Theory Prob. Appl., 16 (1971), 694-696.

[6]. N. Furukawa, Functional equations and Markov potential theory in stopped decision processes, Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ., Ser. A, 29 (1975), 329-347.

[7]. A. Hordijk, Dynamic Programming and Markov Potential Theory, Mathematisch Centrum, Amsterdam, (1974).

[8] P. Kakumanu, Continuously discounted Markov decision model with countable state and action space, Ann. Math. Statist., 42 (1971), 919-926.

[9]. K. Kuratowski, Topology-I, Academic Press, New York, (1966).

[10] B.L. Miller, Finite state continuous time Markov decision processes with an infinite planning horizon, J. Math. Anal. Appl., 22 (1968), 552-569.

[11]. K. R. Parthasarathy, Probability Measures on Metric Spaces, Academic Press, New York, (1967).

[12]. S. R. Pliska, Controlled jump processes, Stoch. Proc. Appl., 3 (1975), 259-282.

[13] U. Rieder, On stopped decision processes with discrete time parameter, Stoch. Proc. Appl., 3 (1975), 365-383.

[14]. A. N. Shiryayev, Statistical sequential analysis, Transl. Math. Monograph., Amer. Math. Soc., (1973).

[15]. L. D. Stone, Necessary and sufficient conditions for optimal control of semi-Markov jump processes, SIAM J. Control, 11 (1973), 187-201.

[16] R. E. Strauch, Negative dynamic programming, Ann. Math. Statist., 37 (1966), 871-890.

[17]. M. E. Thompson, Continuous parameter optimal stopping problems, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, 19 (1971), 302-318.

[18]. M. Yasuda, On the existence of optimal control in continuous time Markov decision processes, Bull. Math. Statist., 15 (1972), 7-17.