

確率測度に関するある種の最
小化問題について

九 大 理 三 苜 至

§ 1. 序 E を実局所凸線型位相空間, $B(E)$ を E 上の位相的 Borel field とする。 φ を E 上の凸関数で次を満たすとする。

- (1). φ は原点 0 に関して対称.
- (2). $\forall m \neq 0 \in E$ に対して $\varphi(m) > \varphi(0)$.
- (3). φ は E 上の上半連続関数.
- (4). $\varphi(0) \neq -\infty, +\infty$.

さて、 μ を $(E, B(E))$ 上の確率測度で、次の様な weight function が定義できるとする。

$$\phi_{\mu}(z) = \int_E \varphi(z-x) d\mu(x) .$$

ここで、次の様な最小化問題を考える。すなわち

$$\phi_{\mu}(m) = \inf_{z \in E} \phi_{\mu}(z)$$

なる m の存在と一意性である。これを最小化問題 $\mathcal{P}(\mu, \varphi)$ と表わすことにする。以下において、 $\mathcal{P}(\mu, \varphi)$ に関する結果

を報告する。

§2. 一般の場合 μ に関して次の定義を設ける。

定義1. μ が $g \in E$ に関して対称であるとは

$$\mu(A) = \mu(2g - A) \quad \text{for } \forall A \in \mathcal{B}(E)$$

なることとする。また $g = 0$ の時を単に対称と呼ぶ。

この時、 ρ の対称性(1)を使って $\phi_\mu(2g - z) = \phi_\mu(z)$ を得る。また ρ の凸性より $\phi_\mu(z)$ も凸関数である。故に次の補題を得る。

補題1. μ が $g \in E$ に関して対称ならば g は $\mathcal{P}(\mu, \rho)$ の解である。

$$\begin{aligned} (\text{証明}) \quad \phi_\mu(g) &= \phi_\mu\left(\frac{2g-z}{2} + \frac{z}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\phi_\mu(2g-z) + \frac{1}{2}\phi_\mu(z) \\ &= \frac{1}{2}\phi_\mu(z) + \frac{1}{2}\phi_\mu(z) \\ &= \phi_\mu(z). \end{aligned}$$

従って、 μ の対称性があれば $\mathcal{P}(\mu, \rho)$ の解の存在が言える。そこで、 μ の対称性に関する次の補題を得た。

定義2. μ が τ -正則であるとは、任意の開集合の有向族 $\{G_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ に対し

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha\right) = \sup_{\alpha \in \Lambda} \mu(G_\alpha)$$

が成立することとする。

補題2 μ が τ -正則であって、 $\forall \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in E'$

に対し、 n 次元分布 $(\langle \cdot, \xi_1 \rangle, \langle \cdot, \xi_2 \rangle, \dots, \langle \cdot, \xi_n \rangle)$ と $(-\langle \cdot, \xi_1 \rangle, -\langle \cdot, \xi_2 \rangle, \dots, -\langle \cdot, \xi_n \rangle)$ とが一致しているならば μ は対称である。ここに E' は E の位相双対である。

証明は E の任意の閉凸集合が、それを含む筒的閉凸包の共通部分になることと μ の τ -正則性を使って完了する。

次に一意性への準備として次の補題を示す。

補題 3. μ が τ -正則ならば、ある $m \in E$ があって m の任意の近傍 O に対し次がみたされる。

$$\mu(O) > 0.$$

(証明) 背理法で示す。 $\forall x \in E$ に対し $\exists O_x$ (x の近傍) があって $\mu(O_x) = 0$ とする。 $\mathcal{P}(E) \equiv \{ E \text{ の有限集合の全体} \}$ 。この時

$$\begin{aligned} 1 &= \mu(E) = \mu\left(\bigcup_{x \in E} O_x\right) \\ &= \sup_{P \in \mathcal{P}(E)} \mu\left(\bigcup_{x \in P} O_x\right) = 0. \end{aligned}$$

これは矛盾である。

定義 3. μ が $g \in E$ に関して凸とは、 A を任意の絶対凸閉集合とする時、任意の $y \in E$ に対し

$$\mu(A+g) \geq \mu(A+g+y)$$

が成立することとする。

この時、次の定理を得る。

定理 1. μ を τ -正則で、 g に関して対称で凸とする。

この時、 g は $\mathcal{P}(\mu, \rho)$ の一意な解である。

(証明) 補題 1 によって、 g は $\mathcal{P}(\mu, \rho)$ の解である。
故に一意性を示せば良い。補題 3 によって $\exists m \in E$ があって、 μ 原素に関する任意の絶対凸閉近傍 V に対し

$$\mu(m+V) > 0。$$

μ の g に関する凸性によって

$$\mu(g+V) \geq \mu(g+V+m-g) = \mu(m+V) > 0。$$

さて、 g 以外に解 h があつたとする。

$$\begin{aligned} & 2 \{ \phi_{\mu}(h) - \phi_{\mu}(g) \} \\ &= \int_E \{ \rho(h-x) + \rho(h-2g+x) - 2\rho(g-x) \} d\mu(x) \\ &= 0。 \end{aligned}$$

そこで、 ρ の凸性と対称性を使うと

$$\begin{aligned} \rho(g-x) &= \rho\left(\frac{h-x}{2} + \frac{-h-x+2g}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \rho(h-x) + \frac{1}{2} \rho(h+x-2g)。 \end{aligned}$$

故に $\rho(h-x) + \rho(h-2g+x) - 2\rho(g-x) \geq 0$ 。

故に $\rho(h-x) + \rho(h-2g+x) = 2\rho(g-x)$ a.e. μ 。

$$\begin{aligned} \text{さらに、} \rho(h-g) &= \rho\left(\frac{h-x}{2} + \frac{h-2g+x}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \{ \rho(h-x) + \rho(h-2g+x) \} \\ &\leq \rho(g-x) \quad \text{a.e. } \mu。 \end{aligned}$$

故に $\mu(x \in E : \rho(x-g) < \rho(h-g)) = 0$ 。

そこで $h \neq g$ だから、 ρ に関する仮定の (2) によって

$$f(a-g) > f(0).$$

f の仮定 (3) を使うと、ある 0 の絶対凸開近傍 V が存在して

$$g+V \subset \{x \in E : f(x-g) < f(a-g)\}$$

μ の g に関する凸性より $\mu(g+V) > 0$ だったがからこれは矛盾である。証明了。

所で以上の様なうまい条件を満たす確率測度 μ は存在するだろうか？

定義 4 μ が $(E, \mathcal{B}(E))$ 上の Gauss 測度であるとは、

$\forall \xi \in E'$ に対し、その特性汎関数

$$\begin{aligned} & \int_E \exp i \langle x, \xi \rangle d\mu(x) \\ &= \exp \left\{ i m(\xi) - \frac{1}{2} V(\xi) \right\} \end{aligned}$$

なる時である。ここに \langle, \rangle は標準双線型形式であり $m(\xi)$ は平均、 $V(\xi)$ は共分散である。 $m(\xi) = 0$ の時を特に中心化されていると言う。

定義 5 μ が $(E, \mathcal{B}(E))$ 上の Radon 測度であるとは

$$\mu(A) = \sup \{ \mu(K) : K \text{ compact } \subset A \}$$

が任意の $A \in \mathcal{B}(E)$ に対して成立する時を言う。

注意. E が Banach 空間で μ が確率測度の時、 τ -正則であることと Radon であることは同値である。

定義 6 μ が $(E, \mathcal{B}(E))$ 上の Gauss 測度の時に E の元

m_μ が次を満たす時平均ベクトルと言う。

$$\langle m_\mu, \xi \rangle = m(\xi) \quad \text{for } \forall \xi \in E'.$$

μ が $(E, \mathcal{B}(E))$ 上の Gaussian Radon 測度の時に平均ベクトル m_μ が E に存在して、 m_μ に関して凸であることは C. Borell によって証明された。[2], [3]。また m_μ に関して対称であることは補題 2 より明らか。以上より定理 1 の系として次を得る。

定理 2 μ が $(E, \mathcal{B}(E))$ 上の Gaussian Radon 測度であって weight function が定義可能ならば、平均ベクトル m_μ は $P(\mu, \rho)$ の一意な解である。

§3. Banach 空間上の Gauss 測度の場合

E を Banach 空間、そのノルムを $\|\cdot\|_E$ とする。 μ が $(E, \mathcal{B}(E))$ 上の Gaussian Radon 測度であれば、Fernique [4] による次の補題がある。

補題 4. $\exists \gamma > 0$ があって $\int_E \exp \gamma \|\cdot\|_E^2 d\mu(x) < +\infty$ 。

注意. この補題は、 μ が E' 上の weak* 位相に関する Radon の時にも $\|\cdot\|_E$ を $\|\cdot\|_{E'}^*$ に代えて成立する。

ここで $\rho = \|\cdot\|_E^n$ を考えると仮定 (1)(2)(3)(4) を満たしている。故に定理 2 の系として次の定理を得る。

定理 3. E を Banach 空間とし、 μ を $(E, \mathcal{B}(E))$ 上の Gaussian Radon 測度とする。この時、平均ベクトル m_μ は $P(\mu, \|\cdot\|_E^n)$ の一意な解である。

さて、 E' 上の weak*-位相に関する Borel field を $W(E', E)$ と表わそう。 μ が $(E', W(E', E))$ 上の Gauss 測度であれば、平均ベクトル m_μ は E' に存在する。そこでもし μ が E' のノルム位相に関する Radon 測度に拡張されるならば、今の定理から m_μ は $\mathcal{P}(\mu, \|\cdot\|_{E'})$ の一意な解となる。そこでこの拡張可能性に対して次の補題が得られた。

補題 5. (I. Mitoma, H. Sato, A. Tortrat [5], [6])

μ が $(E', W(E', E))$ 上の Gaussian Radon 測度である時、 E' のノルム位相に関する Radon 測度に拡張される為の必要十分条件は次で与えられる。

$$\mu(x \in E' : \|x - m_\mu\|_{E'} \leq \gamma) > 0 \quad \forall \gamma > 0.$$

今までの議論は測度の Radon 性に基ついたものであるが次の結果は E のノルムの性質に基ついたものである。

定義 7. ノルム $\|\cdot\|_E$ が狭義凸とは $\|a+b\|_E = \|a\|_E + \|b\|_E$ が成立する為の必要十分条件は $\exists \delta' > 0$ が存在して $b = \delta' a$ である時を言う。

定理 4. $\|\cdot\|_E$ は狭義凸とする。 μ は $(E, \mathcal{B}(E))$ 上の確率測度で次をみたすとする。

(4). $\int_E \|x\|_E d\mu(x) < +\infty$

(5). μ は $g \in E$ に関して対称である

(6). $\mu(x \in E : \|x - g\|_E \leq \gamma) \geq \mu(x \in E : \|x - g - \gamma\|_E \leq \gamma)$

for $\forall y \in E, \forall \gamma > 0$.

この時、 g は $\mathcal{P}(\mu, \|\cdot\|_E)$ の一意な解である。

(証明) g の一意性だけを示せば良い。 g 以外の解を m とする。この時

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \{ \phi_\mu(m) - \phi_\mu(g) \} \\ &= \int_E \{ \|m-x\|_E + \|m-2g+x\|_E - 2\|g-x\|_E \} d\mu(x). \end{aligned}$$

故に

$$2\|g-x\|_E = \|m-x\|_E + \|m-2g+x\|_E \quad \text{a.e. } \mu.$$

$\|\cdot\|_E$ は狭義凸だから $m-2g+x = \rho'(x)(m-x)$ a.e. μ .

故に
$$x = \frac{2g}{\rho'(x)+1} + \frac{\rho'(x)-1}{\rho'(x)+1} m \quad \text{a.e. } \mu.$$

注意 $m \neq g$ だから $\rho'(x) \neq -1$.

故に、 μ は m と g の張る 2 次元部分空間の可測な部分に台を持つている。従って、 μ は E 上のノルムに関する Radon 測度と考えられる。故に、前の定理の証明と同様にして、 $\mu(\{x \in E : \|g-x\|_E < \|m-g\|_E\}) = 0$ 。これは矛盾である。証明了。

この定理の系として次が言える。

系 1. μ を $(E', W(E', E))$ 上の Gauss 測度で weak* 位相に関して Radon とする。この時、もし $\|\cdot\|_{E'}$ が狭義凸であれば平均ベクトル m_μ は $\mathcal{P}(\mu, \|\cdot\|_{E'})$ の一意な解である。

さて、問題 $\mathcal{P}(\mu, \|\cdot\|_E)$ を μ が Gauss 測度であって、 E が数列空間の場合に考える。 ℓ^p ノルムは $(1 < p < +\infty)$ 狭義

凸である。また C_0, l^1 は可分だから Radon 測度となって今までのことから $\mathcal{P}(\mu, \|\cdot\|_E)$ は一意な解を持つ。 l^∞ については一意性が成立しない Gauss 測度を作ることができる。

例 $X_1 = \delta(0), X_2, X_3, \dots, X_n, \dots$ は独立で平均 0 で分散 σ_i^2 の Gauss 型確率変数列とする。 $\sigma_i^2 = \frac{8}{(\log i^2)}$ とする。この時、

$$\sum_{i=2}^{\infty} \exp - \frac{4}{\sigma_i^2} = +\infty$$

$$\sum_{i=2}^{\infty} \exp - \frac{R}{\sigma_i^2} < +\infty \quad (R > 4)。$$

故に確率変数列 $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, \dots)$ は $(l^\infty, W(l^\infty, l^1))$ 上に n 座標関数 $X_n(\cdot)$ の分布が X_n の分布に等しくなる様な中心化された Gauss 測度 μ を定める。 $\mu(x \in l^\infty : \|x\|_{l^\infty} < 2) = 0$ である。この時、 $(1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ は μ は 0 以外の $\mathcal{P}(\mu, \|\cdot\|_{l^\infty})$ の解である。

(証明) $x \in l^\infty$ に対して $Y_i(x) = \sup_{j \neq i} |X_j(x)|$ とする。この時次の補題が成立する。

補題 6 今の場合、 $\mu(x \in l^\infty : Y_i(x) < 2) = 0$ 。

$$2 \{ \phi_\mu(m) - \phi_\mu(0) \}$$

$$= \int_A | |X_1(x)| - Y_1(x) | d\mu(x)。$$

ここに $A = \{x \in l^\infty : | |X_1(x)| - Y_1(x) | < 1\}$ 。故に次を得る。

$$\mu(A) = \mu(x \in l^\infty : Y_1(x) < 1) = 0。$$

故に $\phi_{\mu}(m) = \phi_{\mu}(0)$ である。証明了。

最後にこの問題は参考文献の[1]に触発されて考えたものである。この報告は、すでに出版されている我々の論文[5]に少し形式的変化を加えたものである。

参考文献

- [1]. B. Beaugamy : Points minimaux dans les espaces de Banach. Séminaire Maurey-Schwartz 1974-1975, Exposé N° 18-19.
- [2]. C. Borell : Convex measures on locally convex spaces. Arkiv för Mat. Vol. 12 (1974) pp. 239-252.
- [3]. C. Borell : Gaussian Radon measures on locally convex spaces.
- [4]. X. Fernique : Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes. Ecole d'été de Calcul des Probabilités, St. Flour (1974).
- [5]. J. Mitoma and H. Sato : Minimal Point of a Gaussian Measure. Memo. of the Fac. of Scie. Kyushu Univ. Ser. A. Vol. 31. NO. 1. (1977) pp. 71-86.
- [6]. H. Sato and A. Tortrat : Prolongements τ -régulière de lois des probabilité et application aux lois gaussiennes. C. R. Acad. Sc. Paris, Ser. A, Vol. 280 (1975) pp. 909-911.