数理解析研究所講究録
第 358 巻 1979 年 160-172



# 停止時間をもつ n 人非協力マルコフゲームについて

新大 理　　田中謙輔

## §1. 問題の定式化について

ここでは停止時間をもつ連続時間の非協力 n 人マルコフゲームを $2(n+2)$ 個の組 $(S, S', A_1, A_2, \cdots, A_n, q, r^{(1)}, r^{(2)}, \cdots r^{(n)}, \alpha)$ で決定する：(1) $S=\{1, 2, \cdots, m\}$ はシステムの有限状態空間，(2) $S'$ は $S$ の部分集合でシステムの停止集合，(3) $A_i$, $i=1, 2, \cdots, n$, は 1 次元ユークリッド空間の空でないボレル集合でプレイヤー $i$ の行動空間，(4) $q = q_{s,\cdot}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ は各 $(s, a_1, a_2, \cdots, a_n) \in S \times \prod_{i=1}^{n} A_i$ に対して，$S$ 上の有限値関数で状態変化の推移率，(5) $r^{(i)}$, $i=1, 2, \cdots, n$, は $S \times \prod_{i=1}^{n} A_i$ の上の有界ボレル可測関数でプレイヤー $i$ の利得，(6) $\alpha$ は正の実数で割引因子．

このゲームでは各々のプレイヤー $i$ がシステムの状態を連続的に観測し，互に相談又は協力することなく現在の状態 $s \in S$ のみによって行動 $a_i \in A_i$ を選択する．この結果各プ

レイヤー$i$は利得$r_s^{(i)}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$を得てシステムの状態$s$は停止集合$S'$に達するまで$q_{s,s'}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$に従って新しい状態$s'$に移る。ここで最適化問題はシステムが$S'$に達するまで，このようなゲームを続けるとき各プレイヤー$i$の合計割引き期待利得を最大にすることである。

各プレイヤー$i$の戦略$\pi^{(i)} = \pi^{(i)}(t)$はシステムの過去の歴史とは独立で現在の状態のみに依存していると仮定し$\{\mu_t^{(i)}\}$で定める。ただし$\mu_t^{(i)}$は各々の$s$と$t \in [0, \infty)$に対して$(A_i, B(A_i))$の上の確率測度$\mu_t^{(i)}(\cdot|s)$であり，各々の$M \in B(A_i)$と$s$に対して$[0, \infty)$上のルベーグ可測関数$\mu_\cdot^{(i)}(M|s)$であるとする。ここで$B(A_i)$は$A_i$におけるボレル集合体としている。このような各プレイヤー$i$の戦略$\pi^{(i)} = \pi^{(i)}(t)$をマルコフ戦略と呼び，特に各々の$t \in [0, \infty)$に対して$\mu_t^{(i)}$が$S$から$P(A_i)$への写像$\mu^{(i)}$で時間について独立であるとき$\pi^{(i)} = \pi^{(i)}(t)$を定常戦略と呼ぶことにする。ただし$P(A_i)$は$(A_i, B(A_i))$の上の確率測度の全体としている。$\Pi^{(i)}$はプレイヤー$i$のマルコフ戦略の全体を示すことにする。

この話しを通して各$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \prod_{i=1}^{n} A_i$に対応する推移率行列$Q(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \{q_{s,s'}(a_1, a_2, \cdots, a_n);\ s, s' \in S\}$に次のような仮定をおくことにする。

<u>仮定1.</u>　各々の $s, s' \in S$ に対して $q_{s,s'}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ は $\prod_{i=1}^{n} A_i$ の上の連続関数であり，すべての $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \prod_{i=1}^{n} A_i$ に対して $q_{s,s'}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \geqq 0$，$s \neq s'$，$\sum_{s'} q_{s,s'}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0$，$|q_{s,s}(a_1, a_2, \cdots, a_n)| \leqq M$ とする．ただしMはある正の実数である．

したがって各プレイヤーのマルコフ戦略の組 $(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots, \pi^{(n)})$ に対応する推移率は，各々の $t \geqq 0$ に対して

$$q_{s,s'}(t, \pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots, \pi^{(n)}) = \int \cdots \int q_{s,s'}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \prod_{l=1}^{n} d\mu_t^{(l)}(a_l)$$

と定義できて，仮定1より $q_{s,s'}(t, \pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots, \pi^{(n)}) \geqq 0$，$s \neq s'$，$\sum_{s'} q_{s,s'}(t, \pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots, \pi^{(n)}) = 0$，$|q_{s,s}(t, \pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots, \pi^{(n)})| \leqq M$ をみたしている．このとき上の条件より次のようなコロモゴロフの微分方程式をみたしている $Q(t, \pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots, \pi^{(n)})$ に対応する推移確率行列 $F(t, t', \pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots, \pi^{(n)}) = \{f_{s,s'}(t, t', \pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots, \pi^{(n)}) ; s, s' \in S\}$ が一意に決まる：

$$\frac{\partial}{\partial t'} F(t, t', \pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots, \pi^{(n)}) = F(t, t', \pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots, \pi^{(n)}) Q(t', \pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots, \pi^{(n)}),$$

ただし $F(t, t, \pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots, \pi^{(n)}) = I$　　a.e $t' \in [t, \infty)$．

ゲームは常に時刻0から出発するものとし，$F(0, t, \pi^{(1)}, \cdots, \pi^{(n)})$ のかわりに $F(t, \pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots, \pi^{(n)})$ と書くことにする．

仮定2. 各々の$i$と$s \in S - S'$に対して$r_s^{(i)}(a_1, a_2, \cdots; a_n)$は$\prod_{i=1}^{n} A_i$の上の連続関数であり，各々の$i$と$k \in S'$に対して$r_k^{(i)}(a_1, a_2, \cdots; a_n) = \gamma^{(i)}(k)$とする。

したがって各プレイヤーがマルコフ戦略の組$(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots, \pi^{(n)})$を用いたときのプレイヤー$i$の状態$s$と時刻$t$における期待利得率は

$$r_s^{(i)}(t, \pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots, \pi^{(n)}) = \int \cdots \int r_s^{(i)}(a_1, a_2, \cdots; a_n) \prod_{l=1}^{n} d\mu_t^{(l)}(a_l), \quad s \in S - S'$$

と

$$r_k^{(i)}(t, \pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots, \pi^{(n)}) = \gamma^{(i)}(k) \quad , \quad k \in S'$$

で与えられるので，合計割引期待利得を次のように定義する：

$$\psi_s^{(i)}(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots, \pi^{(n)}) = E^{(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots, \pi^{(n)})}\Big[\int_0^{\tau} e^{-\alpha t} r_{X(t)}^{(i)}(t, \pi^{(1)}, \cdots, \pi^{(n)})\,dt +$$

$$+ e^{-\alpha\tau}\gamma^{(i)}(X(\tau)) \,\Big|\, X(0) = s\Big],$$

ただし$\tau$は$s$から停止集合$S'$への最初の到達時間で，$X(t)$は推移確率行列$F(t, \pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots, \pi^{(n)})$に対応している可測なマルコフ過程とする。ここでマルコフ戦略の組$\{\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots, \pi^{(n)}\}$とすべての$i$と$s$に対して

$$\psi_s^{(i)}(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots, \pi^{(n)}) = \sup_{\sigma^{(i)} \in \Pi^{(i)}} \psi_s^{(i)}(\pi^{(1)}, \cdots, \sigma^{(i)}, \cdots, \pi^{(n)})$$

が成立するとき$\{\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots, \pi^{(n)}\}$を平衡点と呼び，各マルコフ

戦略$\pi^{(i)}$はプレイヤー$i$の平衡戦略と呼ぶことにする．また$\alpha=0$のときも

$$\psi_s^{(i)}(\pi^{(1)},\pi^{(2)},\cdots,\pi^{(n)})=E^{(\pi^{(1)},\pi^{(2)},\cdots,\pi^{(n)})}\Big[\int_0^{\tau} r_{X(t)}^{(i)}(t,\pi^{(1)},\pi^{(2)},\cdots,\pi^{(n)})dt+$$

$$+\ \gamma^{(i)}(X(\tau))\ \big|\ X(0)=s\Big]$$

と定義し，平衡点や各プレイヤーの平衡戦略も同様に定義することにする．

## §2. 平衡定常戦略の存在について

まず最初に次のような記号と仮定をおくことにする．

$\left(\prod_{i=1}^{n}P(A_i)\right)^S$ ： $S$から$\prod_{i=1}^{n}P(A_i)$への写像の全体，

$$\bar{\mu}=(\mu^{(1)},\mu^{(2)},\cdots,\mu^{(n)})\ \in\left(\prod_{i=1}^{n}P(A_i)\right)^S,$$

$$\hat{\mu}^{(i)}=(\mu^{(1)},\cdots,\mu^{(i-1)},\mu^{(i+1)},\cdots,\mu^{(n)})\ \in\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}P(A_j)\right)^S,$$

$$(\bar{\mu};\sigma^{(i)})=(\mu^{(1)},\cdots,\mu^{(i-1)},\sigma^{(i)},\mu^{(i+1)},\cdots,\mu^{(n)}),\ \sigma^{(i)}\in(P(A_i))^S,$$

$$r_s^{(i)}(\bar{\mu})=\int\cdots\int r_s^{(i)}(a_1,a_2,\cdots,a_n)\prod_{\ell=1}^{n}d\mu^{(\ell)}(a_\ell),$$

$$q_{s,s'}(\bar{\mu})=\int\cdots\int q_{s,s'}(a_1,a_2,\cdots,a_n)\prod_{\ell=1}^{n}d\mu^{(\ell)}(a_\ell).$$

<u>仮定3.</u>　各$A_i$，$i=1,2,\cdots,n$，は有界閉集合とする．

したがって仮定1，仮定2，仮定3から$\prod_{i=1}^{n}P(A_i)$は弱位相で

コンパクトな距離空間となり，各々の $s$，$s'$，$i$ に対して $r_s^{(i)}(\bar{\mu})$ と $q_{s,s'}(\bar{\mu})$ は $\prod_{i=1}^{n} P(A_i)$ の上で有界な連続関数となる．

ここで $X_i^m$, $i=1,2,\cdots,n$, は $S' \ni k$ に対応する $k$ 番目の要素が $r^{(i)}(k)$ なる値である $m$ 次元ベクトル空間とし，$X_i^m \ni v$ に対して $\|v\| = \max_s |v_s|$ とおくとき，各 $X_i^m$ は完備な距離空間となる．次に定常戦略の組 $\bar{\mu} = (\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \cdots, \mu^{(n)})$ に対応する新しい推移確率行列 $P(\bar{\mu})$ を次のように定義する：

$$P(\bar{\mu}) \equiv I + M^{-1} Q(\bar{\mu}),$$

ただし $I$ は恒等行列であり，$M$ は仮定1における正の実数である．すなわち，$(s, s')$ 要素は

$$p_{s,s'}(\bar{\mu}) \equiv \delta_{s,s'} + M^{-1} q_{s,s'}(\bar{\mu})$$

によって与えられている．

さらに各 $i$ に対して写像 $T^{(i)}: X_i^m \to X_i^m$ を次のように定義する： $v \in X_i^m$ と $\bar{\mu} \in \left(\prod_{i=1}^{n} P(A_i)\right)^S$ に対して

$$(T^{(i)} v)(s) \equiv \max_{a^{(i)} \in P(A_i)} \Big\{ (\alpha + M)^{-1} r_s^{(i)}(\bar{\mu}; a^{(i)}) +$$

$$+ M(\alpha + M)^{-1} P(\bar{\mu}; a^{(i)}) v(s) \Big\}, \quad s \in S - S'$$

$$(T^{(i)} v)(k) \equiv r^{(i)}(k) \quad , \quad k \in S',$$

ただし $P(\bar{\mu}; a^{(i)})v(s) = \sum_{s'} p_{s,s'}(\bar{\mu}; a^{(i)}) v_{s'}$ を示している。このとき $0 < M(\alpha+M)^{-1} < 1$ より $T^{(i)}$ は $X_i^m$ での縮小写像となり，$X_i^m$ は完備な距離空間であるから不動点定理よりただ一つの不動点 $V^{(i)}(\bar{\mu}^{(i)}) = (V_1^{(i)}(\bar{\mu}^{(i)}), V_2^{(i)}(\bar{\mu}^{(i)}), \cdots, V_m^{(i)}(\bar{\mu}^{(i)}))$ が存在する。よって次の式が成立する：

$$V_s^{(i)}(\bar{\mu}^{(i)}) = \max_{a^{(i)} \in P(A_i)} \{ (\alpha+M)^{-1} r_s^{(i)}(\bar{\mu}; a^{(i)}) + $$

$$+ M(\alpha+M)^{-1} P(\bar{\mu}; a^{(i)}) V^{(i)}(\bar{\mu}^{(i)})(s) \}, \quad s \in S - S'$$

$$V_k^{(i)}(\bar{\mu}^{(i)}) = \gamma^{(i)}(k) \quad , \quad k \in S'.$$

上の式を変形することによって

$$\alpha V_s^{(i)}(\bar{\mu}^{(i)}) = \max_{a^{(i)} \in P(A_i)} \{ r_s^{(i)}(\bar{\mu}; a^{(i)}) + Q(\bar{\mu}; a^{(i)}) V^{(i)}(\bar{\mu}^{(i)})(s) \}$$
$$s \in S - S',$$

$$V_k^{(i)}(\bar{\mu}^{(i)}) = \gamma^{(i)}(k) \quad , \quad k \in S'$$

を得ることができる。

次に $\bar{\mu}$ と $V^{(i)}(\bar{\mu}^{(i)})$ に対して

$$K_s^{(i)}(\bar{\mu}; a^{(i)}) \equiv r_s^{(i)}(\bar{\mu}; a^{(i)}) + Q(\bar{\mu}; a^{(i)}) V^{(i)}(\bar{\mu}^{(i)})(s), \quad s \in S - S'$$

と

$$K_k^{(i)}(\bar{\mu}; a^{(i)}) \equiv \gamma^{(i)}(k) \quad , \quad k \in S'$$

を定義し，さらに $G^{(i)}(\bar{\mu}^{(i)}) \equiv \{ \lambda^{(i)}; K_s^{(i)}(\bar{\mu}; \lambda^{(i)}) = \max_{a^{(i)} \in P(A_i)} K_s^{(i)}(\bar{\mu}; a^{(i)}), \forall s \in S \}$ を定義する。ここで写像 $G : (\prod_{i=1}^n P(A_i))^S \to (\prod_{i=1}^n P(A_i))^S$ を次のように定義する：各々の $\bar{\mu}$ に対して

$$G(\bar{\mu}) = \{\bar{\lambda}=(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(n)});\ \lambda^{(i)} \in G^{(i)}(\mu^{(i)}),\ i=1,2,\cdots,n\}.$$

このとき $G^{(i)}(\mu^{(i)})$ は空でなく，閉で凸な部分集合であるので，写像 $G$ は点から閉凸集合への写像となる．したがって拡張された不動点定理より写像 $G$ の不動点 $\bar{\mu}_* \in G(\bar{\mu}_*)$ が存在する．ただし $\bar{\mu}_* = (\mu_*^{(1)}, \mu_*^{(2)}, \cdots, \mu_*^{(n)})$ とおくことにする．すなわち

$$\alpha V_s^{(i)}(\mu_*^{(i)}) = \max_{a^{(i)} \in P(A_i)} \{ r_s^{(i)}(\bar{\mu}_*; a^{(i)}) + \sum_{s'} q_{s,s'}(\bar{\mu}_*; a^{(i)}) V_{s'}^{(i)}(\mu_*^{(i)}) \}$$

$$= r_s^{(i)}(\bar{\mu}_*) + \sum_{s'} q_{s,s'}(\bar{\mu}_*) V_{s'}^{(i)}(\mu_*^{(i)}), \quad s \in S-S',$$

と

$$V_k^{(i)}(\mu_*^{(i)}) = \gamma^{(i)}(k), \quad k \in S',$$

が成立している．

上の結果を用いて次の定理を証明することができる．

<u>定理 1.</u>　このゲームには平衡点が存在して，各プレイヤーは平衡定常戦略をもっている．

<u>証明</u>　定常戦略の組 $\mu_*^{(i)}$ とプレイヤー $i$ の任意のマルコフ戦略 $\pi^{(i)}$ に対して，$\bar{\mu}_*$ の性質より任意の $t \geq 0$ で次式が成立する：

$$\alpha V_s^{(i)}(\mu_*^{(i)}) \geq r_s^{(i)}(t, \bar{\mu}_*; \pi^{(i)}) + Q(t, \bar{\mu}_*; \pi^{(i)}) V^{(i)}(\mu_*^{(i)})(s), \quad s \in S-S'. \quad (*)$$

またコロモゴロフの微分方程式を用いると，任意の $s \in S-S'$ に対して

$$V_s^{(i)}(\mu_*^{(i)}) = R_\alpha^{(\overline{\mu}_*;\pi^{(i)})}(\alpha V^{(i)}(\mu_*^{(i)}) - Q(t,\overline{\mu}_*;\pi^{(i)})V^{(i)}(\mu_*^{(i)}))(s)$$

が得られる．ただし $V \in X_i^m$ に対して

$$R_\alpha^{(\overline{\mu}_*;\pi^{(i)})}V(s) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} F(t,\overline{\mu}_*;\pi^{(i)})V(s)\,dt$$

で $R_\alpha^{(\overline{\mu}_*;\pi^{(i)})}$ は定義されている．

このとき強マルコフ性より次の式が成立する：

$$E^{(\overline{\mu}_*;\pi^{(i)})}[e^{-\alpha\tau}V^{(i)}(\mu_*^{(i)})(X(\tau)) \mid X(0)=s] - V_s^{(i)}(\mu_*^{(i)})$$

$$= E^{(\overline{\mu}_*;\pi^{(i)})}\Big[\int_0^\tau e^{-\alpha t}(Q(t,\overline{\mu}_*;\pi^{(i)})V^{(i)}(\mu_*^{(i)})$$

$$- \alpha V^{(i)}(\mu_*^{(i)}))(X(t))\,dt \mid X(0)=s\Big].$$

次に(*)式の両辺を積分し，任意の $s \in S-S'$ に対して

$$E^{(\overline{\mu}_*;\pi^{(i)})}\Big[\int_0^\tau e^{-\alpha t} r_{X(t)}^{(i)}(t,\overline{\mu}_*;\pi^{(i)})\,dt + \int_0^\tau e^{-\alpha t}(Q(t,\overline{\mu}_*;\pi^{(i)})V^{(i)}(\mu_*^{(i)})$$

$$- \alpha V^{(i)}(\mu_*^{(i)}))(X(t))\,dt \mid X(0)=s\Big] \leqq 0$$

が得られる．

したがって，任意の $s\in S-S'$ に対して次式が成立する：

$$V_s^{(i)}(\mu_*^{(i)}) \geq E^{(\pi_*;\pi^{(i)})}\Big[\int_0^{\tau} e^{-\alpha t} r_{X(t)}^{(i)}(t,\pi_*;\pi^{(i)})\,dt + e^{-\alpha\tau}\gamma^{(i)}(X(\tau))\,\Big|\,X(0)=s\Big]$$

$$=\psi_s^{(i)}(\pi_*;\pi^{(i)}).$$

また任意の $k\in S'$ に対しては，明らかに次の式が成立する：

$$V_k^{(i)}(\mu_*^{(i)})=\gamma^{(i)}(k).$$

同様にして次のような式が得られる：

$$V_s^{(i)}(\mu_*^{(i)})=E^{(\pi_*)}\Big[\int_0^{\tau} e^{-\alpha t} r_{X(t)}^{(i)}(t,\pi_*)\,dt + e^{-\alpha\tau}\gamma^{(i)}(X(\tau))\,\Big|\,X(0)=s\Big]$$

$$=\psi_s^{(i)}(\pi_*) \qquad , s\in S-S',$$

$$V_k^{(i)}(\mu_*^{(i)})=\gamma^{(i)}(k)$$

$$=\psi_k^{(i)}(\pi_*) \qquad , k\in S'.$$

よって $\pi_*=(\mu_*^{(1)},\mu_*^{(2)},\cdots,\mu_*^{(n)})$ はこのゲームの平衡点で，$\pi_*$ の各要素 $\mu_*^{(i)}$ はプレイヤー $i$ の平衡定常戦略である。かくて定理は証明されたことになる。

## §3. 割引因子 $\alpha=0$ のときの平衡定常戦略の存在について

まず最初に前に述べた仮定の外に次のような仮定をおくことにする.

仮定4. 任意の $\bar{\mu}$ に対して

$$\max_{s\in S-S'} \sum_{\substack{s'\in S-S' \\ \neq s}} \frac{q_{s,s'}(\bar{\mu})}{|q_{s,s}(\bar{\mu})|} \leqq \alpha^* < 1$$

なる正の実数 $\alpha^*$ が存在するとする.

次に上のような仮定のもとで写像 $T^{(i)}: X_i^m \longrightarrow X_i^m$ を次のように定義する: $v\in X_i^m$ と $\bar{\mu}$ に対して

$$(T^{(i)}v)(s) \equiv \max_{a^{(i)}\in P(A_i)} \left\{ \frac{r_s^{(i)}(\bar{\mu};a^{(i)})}{|q_{s,s}(\bar{\mu};a^{(i)})|} + \sum_{s'\neq s} \frac{q_{s,s'}(\bar{\mu};a^{(i)})}{|q_{s,s}(\bar{\mu};a^{(i)})|} v_{s'} \right\},$$
$$s\in S-S',$$

$$(T^{(i)}v)(k) \equiv \gamma^{(i)}(k) \qquad , k\in S'.$$

このとき写像 $T^{(i)}$ は仮定4より, $X_i^m$ での縮小写像となりただ一つの不動点 $V^{(i)}(\bar{\mu}^{(i)}) = (V_1^{(i)}(\bar{\mu}^{(i)}), V_2^{(i)}(\bar{\mu}^{(i)}), \cdots; V_m^{(i)}(\bar{\mu}^{(i)}))$ が存在する. すなわち

$$V_s^{(i)}(\bar{\mu}^{(i)}) = \max_{a^{(i)}\in P(A_i)} \left\{ \frac{r_s^{(i)}(\bar{\mu};a^{(i)})}{|q_{s,s}(\bar{\mu};a^{(i)})|} + \sum_{s'\neq s} \frac{q_{s,s'}(\bar{\mu};a^{(i)})}{|q_{s,s}(\bar{\mu};a^{(i)})|} V_{s'}^{(i)}(\bar{\mu}^{(i)}) \right\},$$
$$s\in S-S',$$

$$V_k^{(i)}(\bar{\mu}^{(i)}) = \gamma^{(i)}(k) \qquad , k\in S'$$

が成立する．したがって上の式を変形することによって

$$0=\max_{a^{(i)}\in P(A_i)}\left\{r_s^{(i)}(\bar{\mu};a^{(i)})+Q(\bar{\mu};a^{(i)})V^{(i)}(\hat{\mu}^{(i)})(s)\right\}\ ,\qquad s\in S-S',$$

$$V_k^{(i)}(\hat{\mu}^{(i)})=\gamma^{(i)}(k)\ ,\quad k\in S'$$

が得られる．このとき §2 におけると同様の議論によって

$$\begin{aligned}0&=\max_{a^{(i)}\in P(A_i)}\left\{r_s^{(i)}(\bar{\mu}_*;a^{(i)})+\sum_{s'\neq s}q_{s,s'}(\bar{\mu}_*;a^{(i)})V_{s'}^{(i)}(\hat{\mu}_*^{(i)})\right\},\qquad s\in S-S',\\&=r_s^{(i)}(\bar{\mu}_*)+\sum_{s'\neq s}q_{s,s'}(\bar{\mu}_*)V_{s'}^{(i)}(\hat{\mu}_*^{(i)})\end{aligned}$$

と

$$V_k^{(i)}(\hat{\mu}_*^{(i)})=\gamma^{(i)}(k)\qquad k\in S'$$

が成立するような $V^{(i)}(\hat{\mu}_*^{(i)})$ と $\bar{\mu}_*$ が存在する．

このとき，すべての仮定のもとで次の定理を証明することができる．

**定理２.**　すべてのマルコフ戦略の組 $\{\pi^{(1)},\pi^{(2)},\cdots,\pi^{(n)}\}$ に対して $E^{(\pi^{(1)},\pi^{(2)},\cdots,\pi^{(n)})}[\tau]<\infty$ ならば，割引因子 $\alpha=0$ のときも，このようなゲームには平衡点が存在して，各プレイヤーは平衡定常戦略をもっている．

# 参考文献

1 P.Kakumanu, "Continuous time Markov decision models with applications to optimization problems", Tech. Rep. 63, Dept, O.R., Cornell University.

2 P.Kakumanu, "Continuous discountrd Markov decision model with countable state and action space", Ann. Math. Statist., 42(1971), 919 - 926.

3 A.Maitra and T.Parthasarathy, "On stochastic games", J. Opti. Theory and Appli., 5(1970), 289 - 300.

4 K.Tanaka and K.Wakuta, "On continuous time Markov games with countable state space", J. O.R., Japan, 21(1978), 17 - 28.

5 K.Tanaka and H.Homma, "Continuous time non-cooperative n-person Markov games", Bull. Math. Statist., 18(1978), 93 - 105.

6 K.Tanaka and H.Homma, "Non-cooperative n-person semi-Markov game", to appear.