数理解析研究所講究録
第 358 巻 1979 年 173-192

Preference order Markov decision processes

九大 理学部 古川長太

§0. 序

利得関数がベクトル値であるマルコフ決定過程に対して，無限段階の discount case を扱ったものに N. Furukawa [1], [2] があるが，本報告では有限段階の場合の最適利得に関する再帰式と，時間平均基準の場合に関連のある集合間の凸錐による順序付けについて最近得られた結果を紹介する.

§1. 有限段階の最適利得に関する再帰式

N をあるよえられた正整数とし，この章では N 段階問題を取り扱う。

<u>定義 1.1</u> ベクトル値マルコフ決定過程のモデルは，次の5つの要素で記述される。

S: 状態空間（ある可算集合）

A ： 行動空間

(q_{ij}^a) ： 1段階の推移確率

(r_{ij}^a) ： 1段階の利得ベクトル（SAS 上で定義され R^p の値をとる）

d ： 終端利得ベクトル（S 上で定義され R^p の値をとる）

仮定（決定モデルに対する仮定）

(I) A はコンパクト距離空間

(II) (r_{ij}^a) は SAS 上で有界

各 $i, j \in S$ に対し，r_{ij}^a は a について連続

(III) 各 $i, j \in S$ に対し，q_{ij}^a は a について連続

定義 1.2

$\pi = \{\pi_{N-n+1}, \pi_{N-n+2}, \cdots, \pi_N\}$ において，各 j に対し π_j が $S_{N-n+1} \times S_{N-n+2} \times \cdots \times S_j$ から A への map であるとき，π を，残りの n 段階に対する政策と呼ぶ。

$\Pi^n :=$ 残りの n 段階に対する政策の全体

$\pi = \{\pi_{N-n+1}, \pi_{N-n+2}, \cdots, \pi_N\} \in \Pi^n$ に対し

$'\pi := \{\pi_{N-n+2}, \cdots, \pi_N\}$,

$'\Pi^n := \{'\pi \mid \pi \in \Pi^n\}$

とおく。

定義 1.3

$M^p(S) :=$ $S \to \mathbb{R}^p$ への有界な map の全体

各 $a \in A$ に対し $T_a : M^p(S) \to M^p(S)$ を次式で定義する。

$$(T_a u)(i) = \sum_j (r_{ij}^a + u(j))\, q_{ij}^a, \qquad i \in S.$$

定義 1.4

K を $\mathbb{R}^p$ における原点を頂点とする凸錐とし，$K \cap (-K) = \{0\}$ をみたすものとする。K により $\mathbb{R}^p$ 上に半順序 $\preceq$ を次の関係で定義する；

$x, y \in \mathbb{R}^p$ に対し，$x \preceq y \Leftrightarrow y - x \in K$

定義 1.5

$U \subset \mathbb{R}^p$，$U \neq \Phi$ なる U に対し，U の $\preceq$ に関する極大点の全体からなる集合を $e(U)$ で表す。

定義 1.6

$\mathbb{R}^p$ における K から導入された半順序 $\preceq$ によって，次のように $M^p(S)$ 上に自然に半順序（同じく $\preceq$ で表す）が導入される； $u, v \in M^p(S)$ に対し

$$u \preceq v \Leftrightarrow \forall i \in S,\ u(i) \preceq v(i)$$

補助定理 1.1

各 $a \in A$ に対し，T_a は次の意味で単調である。

$$u \precsim v \quad \Rightarrow \quad T_a u \precsim T_a v$$

(証明)

次の補助定理の証明は文献[2]で詳述してあるので省略する。

補助定理 1.2

$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathbb{R}^p$ における（$\precsim$ に関する）単調ネットとする。$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が，(i) ある $x_0 \in \mathbb{R}^p$ が有って $x_0 \precsim x_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda$，(ii) ある $\bar{x} \in \mathbb{R}^p$ があって (x_λ) は $\bar{x}$ に $\mathbb{R}^p$ のノルムで収束，をみたすならば $x_0 \precsim \bar{x}$ が成立する。

補助定理 1.3

空でない任意のコンパクト集合 $U \subset \mathbb{R}^p$ と，任意の点 $x \in U$ に対して，$\{y \in \mathbb{R}^p ;\ x \precsim y\} \cap e(U) \neq \phi$ が成立する。

(証明) 補助定理 1.2 と Zorn の Lemma により容易に証明される。

定義 1.7 (期待利得ベクトル)

$\pi \in \Pi^n$ に対し $\quad (n = 0, 1, \cdots, N)$

$$I^n(\pi)(i_{N-n+1}) := E^{\pi}_{i_{N-n+1}}\left[\sum_{t=N-n+1}^{N} r_{i_t, i_{t+1}}^{\pi_t(i_{N-n+1}, \cdots, i_t)} + d(i_{N+1})\right]$$

ゆえに特に $n=N$ のとき，$\pi \in \Pi^N$ に対し

$$I^N(\pi)(i_1) = E^{\pi}_{i_1}\left[\sum_{t=1}^{N} r_{i_t, i_{t+1}}^{\pi_t(i_1, \cdots, i_t)} + d(i_{N+1})\right]$$

また

$$I^0(\Phi)(i_{N+1}) = d(i_{N+1})$$

定義 1.8 （最適利得ベクトル）

$$U^n(i_{N-n+1}) := e\left[\bigcup_{\pi\in\Pi^n}\{I^n(\pi)(i_{N-n+1})\}\right], \quad n=0, 1, \cdots, N$$

ゆえに特に $n=0$ のとき

$$U^0(i_{N+1}) = I^0(\Phi)(i_{N+1}) = d(i_{N+1}).$$

注意　仮定（I）～（III）と　　　の定理により，$\bigcup_{\pi\in\Pi^n}\{I^n(\pi)(i_{N-n+1})\}$ は $\mathbb{R}^p$ における空でないコンパクト集合となることが証明され（この証明は〔2〕で詳述），したがって補助定理 1.3 により $U^n(i_{N-n+1}) \neq \Phi$ が導かれる。

定義 1.9

F を S から $\mathbb{R}^p$ への set-valued map とし，すべての $i\in S$ に対し $F(i) \neq \Phi$ とする。S から $\mathbb{R}^p$ への (point-valued) map f が

$f(i) \in F(i) \quad \forall i \in S$ 　をみたすとき，f は F の selector であるという。

μ を S 上の測度とし，S から $\mathbb{R}^p$ への map f が

$$f(i) \in F(i) \quad a.e.(\mu) \ \text{on}\ S$$

をみたすとき，f は F の $a.e.(\mu)$ − selector であるという。

定義 1.10

F を S から R^1 への set-valued map とし，すべての $i \in S$ に対し $F(i) \neq \phi$ とする。μ を S 上の測度とし，F の μ に関する積分を次式で定義する。

$$\int F\,d\mu := \left\{ \int f\,d\mu \;\middle|\; f : \text{selector of } F \right\}$$

補助定理 1.4

$$\int F\,d\mu = \left\{ \int f\,d\mu \;\middle|\; f : a.e.(\mu)\text{-selector of } F \right\}$$

（注意） 補助定理 1.4 は，我々の場合 S が可算集合で可測性に関する煩わしいことがすべて除かれるために成立するのであって，S が一般の集合では成立つとは限らない。

補助定理 1.5

$\pi \in \Pi^n$ の第1成分 π_{N-n+1} を任意に固定すると，各 i_{N-n+1} に対して次式が成立する。

$$\bigcup_{'\pi \in {}'\Pi^n} E^{\{\pi_{N-n+1},\,'\pi\}}_{i_{N-n+1}} R^{n-1} = E^{\pi_{N-n+1}}_{i_{N-n+1}} \left[\bigcup_{'\pi \in {}'\Pi^n} E^{'\pi}_{(i_{N-n+1},\, i_{N-n+2})} R^{n-1} \right] \qquad \cdots\cdots (1.1)$$

ただし

$$R^{n-1}=R^{n-1}(i_{N-n+2}, a_{N-n+2}, i_{N-n+3}, \cdots, i_{N+1})$$
$$= \sum_{t=N-n+2}^{N} r^{a_t}_{i_t, i_{t+1}} + d(i_{N+1}).$$

$E^{\pi_{N-n+1}}_{i_{N-n+1}}$ は $q^{\pi_{N-n+1}(i_{N-n+1})}_{i_{N-n+1}, \cdot}$ なる確率測度で i_{N-n+2} についての積分を表す。

(証明)

各 i_{N-n+1} ごとに (1.1) を示せばよいから，各 fixed $a\in A$ に対して

$$\bigcup_{{}^1\pi\in{}^1\Pi^n} E^{\{a,{}^1\pi\}}_{i_{N-n+1}} R^{n-1} = E^{a}_{i_{N-n+1}}\Big[\bigcup_{{}^1\pi\in{}^1\Pi^n} E^{{}^1\pi}_{(i_{N-n+1}, i_{N-n+2})} R^{n-1}\Big] \quad \cdots\cdots (1.2)$$

を示せば十分。

(1.2) において 左辺 ⊂ 右辺 は明らか。

逆に $\forall z \in$ (1.2) の右辺 をとると，定義 1.10 より

$\exists \varphi : S_{N-n+2} \longrightarrow \mathbb{R}^p$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \varphi(t) \in \bigcup_{{}^1\pi\in{}^1\Pi^n} E^{{}^1\pi}_{(i_{N-n+1}, t)} R^{n-1} \quad \forall t \in S_{N-n+2} & \cdots (1.3) \\ z = E^{a}_{i_{N-n+1}} \varphi & \cdots (1.4) \end{cases}$$

(1.3) より 各 $t\in S_{N-n+2}$ に対して

$${}^1\pi^t = \{\pi^t_{N-n+2}, \cdots, \pi^t_N\} \in {}^1\Pi^n \quad \text{が存在して}$$

$$\varphi(t) = E^{{}^1\pi^t}_{(i_{N-n+1}, t)} R^{n-1} \qquad \forall t \in S_{N-n+2}.$$

(R^{n-1} の第1変数は t)

$${}^1\pi^* = \{\pi^*_{N-n+2}, \pi^*_{N-n+3}, \cdots, \pi^*_N\}$$

を次式で定義せよ。

$$\pi^*_j(i_{N-n+1}, i_{N-n+2}, \cdots, i_j) = \pi^t_j(i_{N-n+1}, i_{N-n+2}, \cdots, i_j) \quad \text{if } i_{N-n+1}=t$$
$$j=N-n+2, \cdots, N.$$

これにより確かに ${}^1\pi^* \in {}^1\Pi^n$ となり，

$$\varphi(t) = E^{{}^1\pi^*}_{(i_{N-n+1},t)} R^{n-1} \qquad \forall t \in S$$

が成り立つ。ゆえに (1.4) により

$$z = E^a_{i_{N-n+1}} \varphi = E^a_{i_{N-n+1}} E^{{}^1\pi^*}_{(i_{N-n+1},t)} R^{n-1}$$
$$= E^{\{a,{}^1\pi^*\}}_{i_{N-n+1}} R^{n-1}.$$

ゆえに　$z \in$ (1.2) の左辺　が示され，よって (1.2) が証明された。

補助定理 1.6

$$e\left[\bigcup_{\pi\in{}^1\Pi^n} E^\pi_{(i_{N-n+1}, i_{N-n+2})} R^{n-1}\right] = e\left[\bigcup_{\pi\in\Pi^{n-1}} E^\pi_{i_{N-n+2}} R^{n-1}\right]$$

(証明)

i°_{N-n+1}, i°_{N-n+2} を任意に ~~fix~~ せよ。

$$V := \bigcup_{\pi\in{}^1\Pi^n} E^\pi_{(i^\circ_{N-n+1}, i^\circ_{N-n+2})} R^{n-1}$$

$$W := \bigcup_{\pi\in\Pi^{n-1}} E^\pi_{i^\circ_{N-n+2}} R^{n-1}$$

$\forall x \in e(V)$ をとると，ある $\pi = \{\pi_{N-n+2}, \cdots, \pi_N\} \in {}^1\Pi^n$ に対して

$$z = E^{\pi}_{(i^{o}_{N-n+1},\, i^{o}_{N-n+2})} R^{n-1}$$

と表される。 i^{o}_{N-n+1} は固定されているから，$\pi_j(i^{o}_{N-n+1}, i_{N-n+2}, \cdots, i_N)$ を $(i_{N-n+2}, \cdots, i_N)$ の関数とみて π'_j を次式で定義せよ。

$$\pi'_j(i_{N-n+2}, \cdots, i_j) = \pi_j(i^{o}_{N-n+1}, i_{N-n+2}, \cdots, i_j), \quad j = N-n+2, \cdots, N$$

さらに $\pi' := \{\pi'_{N-n+2}, \cdots, \pi'_N\}$ とおく。 これにより確かに $\pi' \in \Pi^{n-1}$ となり，かつこのとき

$$E^{\pi}_{(i^{o}_{N-n+1},\, i^{o}_{N-n+2})} R^{n-1} = E^{\pi'}_{i^{o}_{N-n+2}} R^{n-1}$$

が成立し，したがって

$$z = E^{\pi'}_{i^{o}_{N-n+2}} R^{n-1}.$$

ゆえに $z \in W$ が示された。

さて，$\hat{\pi} \in \Pi^{n-1}$ があって $z \leqq E^{\hat{\pi}}_{i^{o}_{N-n+2}} R^{n-1}$ となるとする。

ところが $\Pi^{n-1} \subset {}^{1}\Pi^{n}$ だから $E^{\hat{\pi}}_{i^{o}_{N-n+2}} R^{n-1} \in V$

しかるに $z \in e(V)$ としたから $z = E^{\hat{\pi}}_{i^{o}_{N-n+2}} R^{n-1}$

ゆえに $z \in e(W)$，すなわち $e(V) \subset e(W)$ が示された。

逆に $\forall z \in e(W)$ をとると，ある $\pi = \{\pi_{N-n+2}, \cdots, \pi_N\} \in \Pi^{n-1}$ に対して $z = E^{\pi}_{i^{o}_{N-n+2}} R^{n-1}$ と表される。

$\Pi^{n-1} \subset {}^{1}\Pi^{n}$ より明らかに $z \in V$.

さて $\pi^{o} = \{\pi^{o}_{N-n+2}, \cdots, \pi^{o}_N\} \in {}^{1}\Pi^{n}$ があって

$$z \leqq E^{\pi^{o}}_{(i^{o}_{N-n+1},\, i^{o}_{N-n+2})} R^{n-1}$$ となるとする。

i^{o}_{N-n+1} は固定されているから，前半と同様に $\pi^{*} \in \Pi^{n-1}$ を作って

$$E^{\pi^\circ}_{(i^\circ_{N-n+1},\, i^\circ_{N-n+2})} R^{n-1} = E^{\pi^*}_{i^\circ_{N-n+2}} R^{n-1}$$

と出来る。これにより

$$z \doteqdot E^{\pi^*}_{i^\circ_{N-n+2}} R^{n-1} \in W.$$

ところが $z \in e(W)$ ととったから $z = E^{\pi^*}_{i^\circ_{N-n+2}} R^{n-1} = E^{\pi^\circ}_{(i^\circ_{N-n+1}, i^\circ_{N-n+2})} R^{n-1}$. ゆえに $z \in e(V)$ となり, $e(W) \subset e(V)$ が示された。

補助定理 1.7

G が S から $\mathbb{R}^p$ への compact-set-valued map で, すべての $i \in S$ に対し $G(i) \neq \phi$ とする。このとき次の関係が成立する.

$$e\Big[\bigcup_{a\in A} E^a_i\{r^a_{it} + G(t)\}\Big] = e\Big[\bigcup_{a\in A} E^a_i\{r^a_{it} + e(G(t))\}\Big].$$

ここに E^a_i は $q^a_{i\cdot}$ による t に関する積分を表す。

(証明)

i は全体を通じて固定されているから, 上式の表現を簡単にして

$$e\Big[\bigcup_{a\in A} E^a\{r(a,t) + G(t)\}\Big] = e\Big[\bigcup_{a\in A} E^a\{r(a,t) + e(G(t))\}\Big] \quad \cdots\cdots (1.5)$$

を証明することにする。

$$V := \bigcup_{a\in A} E^a\{r(a,t) + G(t)\}$$

$$W := \bigcup_{a\in A} E^a\{r(a,t) + e(G(t))\}$$

$\forall z \in e(V)$ をとると, ある $a_1 \in A$ があって

$$z \in E^{a_1}\{r(a_1,t) + G(t)\}.$$

定義 1.10 により，G の selector g があって

$$z = E^{a_1}\{r(a_1,t) + g(t)\} = E^{a_1}r(a_1,t) + E^{a_1}g(t). \quad \cdots\cdots(1.6)$$

$\xi := E^{a_1}g(t)$ とおき．

$\boxed{}$ $\xi \in E^{a_1}[e(G(t))]$ を示そう。

これを示すには 補助定理 1.4 により，$g(t) \in e(G(t))$ a.e. (g^{a_1})

を示せばよい。 $g(t) \in G(t)$ $\forall t \in S$ は g が G の selector より

明らか。 $T \doteqdot \{t \in S\ ;\ g^{a_1}(t) > 0\}$

$t_0 \in T$ を任意に固定せよ。 $p \in G(t_0)$ なる p で $g(t_0) \precsim p$

なるものがあるとする． $\hat{g}$ を次式で定義せよ。

$$\hat{g}(t) = \begin{cases} p & \text{if } t = t_0 \\ g(t) & \text{if } t \neq t_0 \end{cases}$$

したがって $g(t) \precsim \hat{g}(t)$ $\forall t \in S$，かつ $\hat{g}$ は G の selector.

補助定理 1.1 により $E^{a_1}g(t) \precsim E^{a_1}\hat{g}(t)$.

ゆえに $z = E^{a_1}r(a_1,t) + E^{a_1}g(t) \precsim E^{a_1}r(a_1,t) + E^{a_1}\hat{g}(t)$

$$= E^{a_1}\{r(a_1,t) + \hat{g}(t)\} \in V.$$

しかるに $z \in e(V)$ としたから

$$z = E^{a_1}\{r(a_1,t) + g(t)\} = E^{a_1}\{r(a_1,t) + \hat{g}(t)\}.$$

したがって $E^{a_1}[\hat{g} - g] = 0$. $t_0 \in T$ だから，これにより

$\hat{g}(t_0) = g(t_0) = p$. ゆえに $g(t) \in e(G(t))$ a.e. (g^{a_1}) が示され

$\boxed{}$ が証明された。

上の結果と (1.6) により 直ちに $z \in W$ が分る。

次に $z \lesssim w$ なる $w \in W$ があるとせよ。自明な関係 $W \subset V$ により $w \in V$. ところが $z \in e(V)$ としたから $z = w$ となり，したがって $z \in e(W)$ が示され，$e(V) \subset e(W)$ が示された。

次に逆に，$\forall z \in e(W)$ をとれ。$W \subset V$ により $z \in V$. $z \lesssim v$ なる $v \in V$ があるとせよ。$a_1 \in A$ と，G の selector $\dot{h}$ があって $v = E^{a_1} r(a_1, t) + E^{a_1} h(t)$ となる.

各 $t \in S$ に対し $h(t) \in G(t)$ だから，補助定理 1.3 により

各 $t \in S$ に対し $\exists z_t$ s.t. $h(t) \lesssim z_t$ かつ $z_t \in e(G(t))$.

各 t に z_t を対応させる map を h' とおけば，h' は $e(G(\cdot))$ の selector であって，かつ $h(t) \lesssim h'(t)$ $\forall t \in S$ となる.

したがって $E^{a_1} h(t) \lesssim E^{a_1} h'(t)$ となり，ゆえに

$$v = E^{a_1} r(a_1, t) + E^{a_1} h(t) \lesssim E^{a_1} r(a_1, t) + E^{a_1} h'(t) \equiv v'$$

したがって $z \lesssim v \lesssim v'$ かつ $v' \in W$. ところが $z \in e(W)$ としたから $z = v' = v$. ゆえに $z \in e(V)$ が示され，これにより $e(W) \subset e(V)$ が示された。

<u>**定理**</u>　最適利得ベクトルの列 $\{U^n\}$ は次の漸化式をみたす.

$$U^n(i_{N-n+1}) = e\left[\bigcup_{a \in A} E^a_{i_{N-n+1}} \{ r^a_{i_{N-n+1}, t} + U^{n-1}(t) \} \right] \qquad n = 1, 2, \cdots, N$$

$$U^0 \equiv d.$$

ここに $E^a_{i_{N-n+1}}$ は確率測度 $\mathcal{T}^a_{i_{N-n+1},\cdot}$ による t に関する積分を表す。

（証明）

$$U^n(i_{N-n+1})$$
$$= e\Big[\bigcup_{\pi\in\Pi^n} E^{\pi}_{i_{N-n+1}}\{r + R^{n-1}\}\Big]$$
$$= e\Big[\bigcup_{\pi\in\Pi^n}\big(E^{\pi_{N-n+1}}_{i_{N-n+1}} r + E^{\pi}_{i_{N-n+1}} R^{n-1}\big)\Big]$$
$$= e\Big[\bigcup_{\pi_{N-n+1}}\Big\{E^{\pi_{N-n+1}}_{i_{N-n+1}} r + \bigcup_{'\pi\in{}'\Pi^n} E^{\{\pi_{N-n+1},\,'\pi\}}_{i_{N-n+1}} R^{n-1}\Big\}\Big]$$

補助定理 1.5 により

$$= e\Big[\bigcup_{\pi_{N-n+1}}\Big\{E^{\pi_{N-n+1}}_{i_{N-n+1}} r + E^{\pi_{N-n+1}}_{i_{N-n+1}}\Big(\bigcup_{'\pi\in{}'\Pi^n} E^{'\pi}_{(i_{N-n+1},\, i_{N-n+2})} R^{n-1}\Big)\Big\}\Big]$$
$$= e\Big[\bigcup_{a\in A} E^{a}_{i_{N-n+1}}\Big\{r^a_{i_{N-n+1},t} + \bigcup_{'\pi\in{}'\Pi^n} E^{'\pi}_{(i_{N-n+1},\, t)} R^{n-1}\Big\}\Big]$$

補助定理 1.7 により

$$= e\Big[\bigcup_{a\in A} E^{a}_{i_{N-n+1}}\Big\{r^a_{i_{N-n+1},t} + e\Big[\bigcup_{'\pi\in{}'\Pi^n} E^{'\pi}_{(i_{N-n+1},\, t)} R^{n-1}\Big]\Big\}\Big]$$

補助定理 1.6 により

$$= e\Big[\bigcup_{a\in A} E^{a}_{i_{N-n+1}}\Big\{r^a_{i_{N-n+1},t} + e\Big[\bigcup_{\pi\in\Pi^{n-1}} E^{\pi}_{t} R^{n-1}\Big]\Big\}\Big]$$
$$= e\Big[\bigcup_{a\in A} E^{a}_{i_{N-n+1}}\Big\{r^a_{i_{N-n+1},t} + U^{n-1}(t)\Big\}\Big].$$

よって、定理は証明された。

§2 凸錐による集合間の順序づけ

この章では§1で与えた凸錐Kを使って，定義1.4の一つの自然な拡張であるような，集合間の順序づけについて述べる。A, B, C, D などは特にことわりがない場合でも常に$\mathbb{R}^p$の空でない部分集合を表すものとしよう。

定義 2.1

$$K(x) := \{ y \in \mathbb{R}^p \ ; \ x \preccurlyeq y \}$$
$$-K(x) := \{ y \in \mathbb{R}^p \ ; \ y \preccurlyeq x \}$$

ここに，$\preccurlyeq$ は言うまでもなく定義1.4で導入されたものである。

定義 2.2

$$K^+(A) := \bigcup_{\substack{x \\ -K(x) \supset A}} K(x)$$
$$K^-(A) := \bigcup_{\substack{x \\ K(x) \supset A}} (-K(x))$$

補助定理 2.1

$K^+(A)$, $K^-(A)$ はともに凸錐である。(頂点は原点とは限らない)

(証明)

$K^+(A)$について示そう。cone であることは明らか。

次に $z_1, z_2 \in K^+(A)$ とする。$K^+(A)$ の定義より次のことが成立つ。

ある x_1, x_2 があって

$$z_1 \in K(x_1), \quad z_2 \in K(x_2)$$

ただし　$A \subset -K(x_1), \quad A \subset -K(x_2).$

ゆえに　$\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 \in K(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$　$\cdots\cdots$ (2.1)

$A \subset (-K(x_1)) \cap (-K(x_2))$　$\cdots\cdots$ (2.2)

ここに　$0 \leqq \lambda \leqq 1.$

次に　$(-K(x_1)) \cap (-K(x_2)) \subset -K(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$　$\cdots\cdots$ (2.3)

を示そう。

$$\forall y \in (-K(x_1)) \cap (-K(x_2))$$

$$\therefore\ y = x_1 - k_1 = x_2 - k_2, \quad k_1, k_2 \in K$$

$$\therefore\ x_1 - x_2 = k_1 - k_2$$

$$y = x_1 - k_1 = (\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) + (1-\lambda)(x_1 - x_2) - k_1$$

$$= (\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) + (1-\lambda)(k_1 - k_2) - k_1$$

$$= (\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) - (\lambda k_1 + (1-\lambda) k_2) \in -K(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2).$$

ゆえに (2.3) が示された。　次に (2.2), (2.3) より

$A \subset -K(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$　$\cdots\cdots$ (2.4)

(2.1), (2.4) より

$$\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 \in K^+(A)$$

ゆえに $K^+(A)$ は凸錐であることが示された。

$K^-(A)$ についても同様である。

補助定理 2.2

(i) $K^+(D) \subset K(d)$ for $\forall d \in D$

(ii) $x \in K^+(D) \Rightarrow K(x) \subset K^+(D)$

(証明)

(i) $\forall z \in K^+(D)$ をとると

$z \in K(x_0)$ for some x_0 with $-K(x_0) \supset D$

後のことより、$d \in D$ を任意にとると

$$d = x_0 - k \quad \text{for some } k \in K$$

ゆえに $x_0 = d + k \in K(d)$

以上より $z \in K(d)$

(ii) $\forall z \in K(x)$ をとると

$z = x + k, \quad k \in K$

一方、仮定より $x \in K(x_0)$ for some x_0 with $-K(x_0) \supset A$

∴ $x = x_0 + k', \quad k' \in K.$

∴ $z = x + k = x_0 + k' + k \in K(x_0)$

以上より $z \in K^+(A)$

定義 2.3

$$A \preceq B \underset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & B \cap A^c \subset K^+(A) \\ \text{(ii)} & A \cap B^c \subset K^-(B) \end{cases}$$

ただし (i), (ii) の左辺の集合が空の場合も許す

定 理

$\mathbb{R}^p$の空でない部分集合の全体を $2^{\mathbb{R}^p}$ で表す.

(i) 定義 2.3 による $\preccurlyeq$ は $2^{\mathbb{R}^p}$ 上の半順序である.

(ii) A, B がともに 1 点集合のとき, 定義 2.3 による $\preccurlyeq$ は定義 1.4 による $\mathbb{R}^p$ 上のもとの $\preccurlyeq$ と一致する。

(証明)

(i) 反射律: 定義より明らか ($\because$ $A \cap A^c = \phi$)

推移律:

$A \preccurlyeq B$ かつ $B \preccurlyeq C$ とする.

$$C \cap A^c = C \cap A^c \cap (B^c \cup B)$$

$$= [(C \cap B^c) \cap A^c] \cup [C \cap (B \cap A^c)] \quad \cdots\cdots (2.5)$$

$(C \cap B^c) \cap A^c \subset C \cap B^c \subset K^+(B)$ $\quad$ ($\because$ $B \preccurlyeq C$)

K^+の単調性より $\quad K^+(B) \subset K^+(B \cap A^c)$

$\therefore$ $(C \cap B^c) \cap A^c \subset K^+(B \cap A^c)$

$\forall b \in B \cap A^c$ に対し 補助定理 2.2 (i) より

$\subset K(b)$.

一方 $A \preccurlyeq B$ だから $\quad B \cap A^c \subset K^+(A)$

ゆえに上記の b は $\quad b \in K^+(A)$

ゆえに 補助定理 2.2 (ii) より $\quad K(b) \subset K^+(A)$

以上より $\quad (C \cap B^c) \cap A^c \subset K^+(A) \quad \cdots\cdots (2.6)$

次に $A \preccurlyeq B$ より

$$C \cap (B \cap A^c) \subset B \cap A^c \subset K^+(A) \qquad \cdots (2,7)$$

(2,5), (2,6), (2,7) より

$$C \cap A^c \subset K^+(A).$$

同様にして　$A \cap C^c \subset K^-(C)$　が示される.

ゆえに　$A \precsim C$　が成立.

<u>反対称律</u>：

$A \precsim B$　かつ　$B \precsim A$　とする.

ゆえに　$B \cap A^c \subset K^+(A) \cap K^-(A) \qquad \cdots (2,8)$

$\boxed{1}$　A が 1点集合のとき

$K^+(A) \cap K^-(A) = A$　となるから　(2,8) より

$B \cap A^c \subset A$

これは　$B \cap A^c = \phi$　のときだけ成立.

$\boxed{2}$　A が 2点以上を含むとき

$K^+(A) \cap K^-(A) = \phi$　となるから (2,8) より

$B \cap A^c = \phi.$

以上 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ どちらの場合でも　$B \cap A^c = \phi$　∴ $A \supset B$

同様にして　$A^c \cap B = \phi$　すなわち　$A \subset B$　が示される.

以上より　$A = B$　が成立

§3.　後記

ベクトル値評価関数に関するプロセスの最適化を企て

るとき，スカラー値評価の場合の通常の動的計画的特質を出来るだけ保存しながら解析がすゝめられてゆくためには，本報告における補助定理1.1の作用素の単調性が極めて基本的であり，また特に無限段階のプロセスを相手にするときは単調性に加えて補助定理1.2の *uncountable transitivity* が必要になってくる。これらのどちらも凸錐の特徴が発揮されて成り立つ性質であるが，一般に多目的計画においてはどんな凸錐によっても表現されない評価基準が数多く有り，それらについては上記の2つの性質のうち特に単調性（今はもはや凸錐で導入されるわけではないが）の成立しないものが多い。

単調性が成立しないということは，もはやそれは動的計画的ないしはマルコフ決定過程的接近が不可能ということであり，別の解析方法が必要ということである。このように凸錐で導入されない評価基準に関するプロセスの最適化を試みるに当って，通常の1段階問題に対する多目的計画のようでなく *dynamics* の特長を生かした形での解析方法については，今後の研究と発展がまたれる所である。

参考文献

[1] N. Furukawa : Vector-valued Markovian Decision Processes with Countable State Space. (Proc. Int. Conf. on Markov Decision Processes, Univ. of Manchester, 1978 に掲載予定)

[2] N. Furukawa : Characterisation of Optimal Policies in Vector-valued Markovian Decision Processes. (Mathematics of Operations Research に掲載予定)