数理解析研究所講究録
第 360 巻 1979 年 49-58

Steady Motion of a Vortex Filament

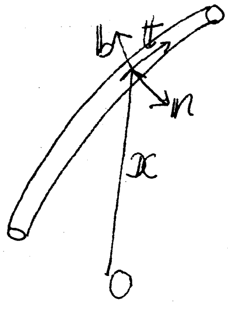
京大 数理研 木田 重雄

§1. 要旨

無限に細い渦糸の運動は、いわゆる Localized induction equation に支配される。[1)~4)] この方程式の軸対称的な定常解を求める。解は三つのパラメータを含み、他の著者[5)~8)]によって既に得られている解の一般化になっている。解の線形安定性については改めて報告する。

§2. Localized induction equation

渦糸の運動は、その太さが充分細い時には、いわゆる Localized induction equation



$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = \frac{\kappa c}{4\pi}\boldsymbol{b}\log\frac{L}{\sigma} + \mathbb{C} \qquad (2\text{-}1)$$

で記述される事が知られている。ここに、$\mathbf{x}$は流体要素の位置、tは時間、κは渦糸の循環、cは点$\mathbf{x}$における渦糸の曲率、$\mathbf{b}$は従法線ベクトル、Lは渦糸の代表的長さ、σは渦糸の断面における長さ、$\mathbb{C}$は$O(1)$の量で、他の渦糸から誘導される速度を含んでいる。方程式(2-1)は任意の渦度分布に対して成り立つ。また誘導速度は渦糸に垂直であるから、渦糸は決して伸び縮みしない。

(2-1)の右辺第二項を落とし、適当なscale変換を行なうと、

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \dot{\mathbf{X}} \times \ddot{\mathbf{X}} \qquad (2\text{-}2)$$

が得られる。但し、$\mathbf{X} = \mathbf{X}(s,t)$は渦糸の位置ベクトル、$\cdot$は渦糸の長さ$s$による微分を表わす。

渦糸が変形しないで運動する場合には、一般に、

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = -C\dot{\mathbf{X}} + \Omega\hat{z} \times \mathbf{X} + V\hat{z} + W\hat{x}(t) \qquad (2\text{-}3)$$

と書ける。ここに、C, Ω, V, Wは定数で、$\hat{z}$, $\hat{x}(t)$はそれぞれz方向、zに垂直な方向の単位ベクトルである。
以下では、軸対称的な場合$(W=0)$

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = -C\dot{\mathbf{X}} + \Omega\hat{z} \times \mathbf{X} + V\hat{z} \qquad (2\text{-}4)$$

を考える。但し、$\dot{\mathbf{X}}$, $\hat{z} \times \mathbf{X}$, $\hat{z}$は一次独立とする。*次頁脚注)

この時、(2-2)は、

$$-C\dot{\mathbf{x}} + \Omega\,\hat{z}\times\mathbf{x} + V\hat{z} = \dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}} \qquad (2\text{-}5)$$

となる。また、(2-2)より

$$\frac{\partial}{\partial t}|\dot{\mathbf{x}}| = 0 \qquad (2\text{-}6)$$

であるから

$$|\dot{\mathbf{x}}| = 1 \qquad (2\text{-}7)$$

と規格化する。

§3. $\Omega = 0$ の場合（上記の一次従属の場合に当る）

①$V = 0$ なら $C = 0$ となり、解は 直線

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}s + \mathbf{b} \qquad (\,|\mathbf{a}| = 1\,) \qquad (3\text{-}1)$$

である。

②$V \neq 0$ なら、解は、z軸に平行な軸をもつらせんである。

直角座標 (x, y, z) で表わすと

＊前頁脚注) $\dot{\mathbf{x}}$, $\hat{z}\times\mathbf{x}$, $\hat{z}$ が一次従属の場合は、①z軸を軸とするらせん、②z軸に平行な直線 のどちらかになる。

$$\begin{cases} x = \pm \dfrac{\sqrt{V^2 - C^2}}{V^2} \cos V(S-S_0) + x_0 \\ y = \pm \dfrac{\sqrt{V^2 - C^2}}{V^2} \sin V(S-S_0) + y_0 \\ z = \dfrac{C}{V} S + z_0 \end{cases} \qquad (3\text{-}2)$$

である。但し、x_0, y_0, z_0, S_0 は定数であり、$V^2 \geqq C^2$ なる条件が必要である。このらせんはz軸方向へ速度 $(1+\frac{C^2}{V^2})V$ で動いていると見なす事ができる。

§4. $C=V=0$, $\delta>0$ の場合[6)]

この場合の解は平面曲線で、円筒座標 (r, θ, z) を用いると、

$$\begin{cases} r = -\dfrac{2k}{\sqrt{\delta}} \,\mathrm{cn}\,(\sqrt{\delta}(S-S_0)\,|\,k) \\ z = S - S_0 - \dfrac{2}{\sqrt{\delta}} E(\sqrt{\delta}(S-S_0)\,|\,k) + z_0 \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases} \qquad (4\text{-}1)$$

と書ける。ここに S_0, z_0 は定数で、cn はヤコビの楕円関数である。母数 k は振幅を表わすパラメータと考えられ、渦糸が交叉しない条件から $0 \leqq k \leqq 0.8551$ である。また、E は第二種楕円積分

$$E(u|k) = \int_0^u dn^2(u'|k)\,du' \qquad (4\text{-}2)$$

である。

$k \to 0$ の時 (4.1) は三角関数型の関係を表わす。[9]

$$\begin{cases} r \approx -\dfrac{2k}{\sqrt{\mathfrak{B}}}\cos\sqrt{\mathfrak{B}}\,(s-s_0) \\ z \approx -(s-s_0)+z_0 \end{cases} \qquad (4\text{-}3)$$

§5. $\mathfrak{B}>0$ の場合

円筒座標 (r, θ, z) を用いて (2-5), (2-7) を書き表わすと、

$$\begin{cases} -C\dot{r} = r\dot{\theta}\ddot{z} - (2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\dot{z} & (5\text{-}1) \\ -Cr\dot{\theta} + \mathfrak{B}r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\dot{z} - \dot{r}\ddot{z} & (5\text{-}2) \\ -C\dot{z} + V = \dot{r}(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}) - r\dot{\theta}(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2) & (5\text{-}3) \end{cases}$$

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 = 1 \qquad (5\text{-}4)$$

となる。(5-1), (5-3) より

$$\dot{z} = -\frac{\mathfrak{B}}{2}(R-A) \qquad (5\text{-}5)$$

が得られる。ここに

$$R = r^2 \qquad (5\text{-}6)$$

で、Aは積分定数である。

さて、スケール変換

$$\tilde{S}=\sqrt{\delta}S,\ \tilde{R}=\delta R,\ \tilde{V}=V/\sqrt{\delta},\ \tilde{C}=C/\sqrt{\delta},\ \tilde{A}=\delta A \quad (5\text{-}7)$$

を行ない(5-1)~(5-6)を書き換える。その後、簡単のために~を省略する。これは最初から$\delta=1$と置いた場合に対応している。多少の計算の後、

$$\dot{\theta}=\frac{V}{2}+\frac{1}{R}\left(C-\frac{AV}{2}\right) \quad (5\text{-}8)$$

$$\dot{R}^2+R^3+(V^2-2A)R^2+(A^2-4-2AV^2+4VC)R+(2C-AV)^2=0 \quad (5\text{-}9)$$

が得られる。

$$R^3+(V^2-2A)R^2+(A^2-4-2AV^2+4VC)R+(2C-AV)^2=0 \quad (5\text{-}10)$$

の三根を $\alpha, \beta, -\gamma$ ($\alpha \geqq \beta \geqq 0,\ \gamma \geqq 0$) とすると、

$$R=\beta+(\beta-\alpha)\ \mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{\alpha+\gamma}}{2}S \Big/ \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\gamma}}\right) \quad (5\text{-}11)$$

と表わされる。Rの周期は、

$$\frac{4K\left(\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\gamma}}\right)}{\sqrt{\alpha+\gamma}} \quad (5\text{-}12)$$

である。ここにKは第一種完全楕円積分である。

(5-11)を(5-5)に代入し、sで積分すると、

$$z=\left(\frac{A}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)s-\sqrt{\alpha+\gamma}\,E\left(\frac{\sqrt{\alpha+\gamma}}{2}s\,\middle|\,\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\gamma}}\right) \tag{5-13}$$

が得られる。第二種楕円積分は

$$E\left(u+2K(k)|k\right)=E(u|k)+2E(k) \tag{5-14}$$

なる条件を満す。ここにEは第二種完全楕円積分である。従って、zが周期的であるためには、

$$\frac{A+\gamma}{\alpha+\gamma}=\frac{E\left(\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\gamma}}\right)}{K\left(\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\gamma}}\right)} \tag{5-15}$$

が必要かつ充分な条件となる。

(5-11)を(5-8)に代入し、sで積分すると、

$$\theta=\frac{V}{2}s+\frac{2C-AV}{\alpha\sqrt{\alpha+\gamma}}\Pi\left(\frac{\sqrt{\alpha+\gamma}}{2}s\,\middle|\,\frac{\alpha-\beta}{\alpha},\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\gamma}}\right) \tag{5-16}$$

が得られる。但し Π は第三種楕円積分で、

$$\Pi(u|l,k)=\int_0^u\frac{du'}{1-l\,\mathrm{sn}^2(u'|k)} \tag{5-17}$$

で定義される。

以上により、変形しない渦糸の形は、(5-11),(5-13)及び(5-16)で表わされる事が分った。その形は三つのパラメータ C, V, A(又は α,β,γ)の値によって異なり、一般に

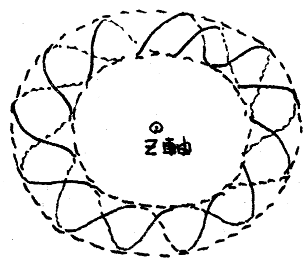
は閉曲線とはならず無限の長さを持つ。特に、パラメータ間に次の関係があれば解は閉曲線となる。

$$\frac{2D\cdot K\left(\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\gamma}}\right)}{\sqrt{\alpha+\gamma}}+\frac{2(2C-AD)}{\alpha\sqrt{\alpha+\gamma}}\Pi\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha},\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\gamma}}\right)=\frac{2n}{m}\pi \tag{5-18}$$

但し、

$$\Pi(l,k)=\Pi(K(k)\,|\,l,k) \tag{5-19}$$

で、mとnは互に素な整数である。
この時、渦糸は右図の様なドーナツの表面をm回巻きつき、z軸の回りをn回まわった後、もとの位置にもどる。



[$m=13,\ n=2$ の場合]

§4は§5の特別の場合 $(C=D=0)$ である。

§6. 解の安定性

前節で得た解の安定性を線形安定論で調べてみよう。変形しない解 $x_0(s,t)$ に微小擾乱を加え、

$$x(s,t)=x_0(s,t)+x_1(s,t). \tag{6-1}$$

(2-5), (2-7) に代入し、擾乱について線形化する。

攪乱の時間依存性を $e^{\sigma t}$ とし、σ の実数部分の符号の正負で安定不安定の判断をする。

$$x_1 = u\dot{x}_0 + v\ddot{x}_0 + w\,\dot{x}_0 \times \ddot{x}_0 \qquad (6\text{-}2)$$

と成分表示すれば、u, v, w を支配する方程式は、

$$\left\{\begin{aligned} &\sigma u = -Cv - \phi\frac{d}{ds}w && (6\text{-}3)\\ &\left(\frac{d}{ds}\phi\frac{d}{ds} + \phi^2\right)v = \left(C\frac{d}{ds} + \sigma\phi\right)w && (6\text{-}4)\\ &\frac{d}{ds}\phi\frac{d}{ds}w = -\left(C\frac{d}{ds} + \sigma\phi\right)v && (6\text{-}5)\end{aligned}\right.$$

となる事が分る。但し、

$$\phi \equiv |\ddot{x}_0|^2 \qquad (6\text{-}6)$$

$$\dot{\phi}^2 = -\phi^3 + a\phi^2 + b\phi - c^2 \qquad (6\text{-}7)$$

である。これらの方程式を適当な境界条件のもとで解けばよいのであるが、その結果は、改めて報告する。

ただ、特別な場合として、x_0 が円の場合は中立安定、らせんの場合は不安定であると云う事は既に知られている。[5)][10)]

[参考文献]

1) Fraenkel, L. E. 1970 Proc. Roy. Soc. Lond. A316, 29.

2) Fraenkel, L. E. 1972 J. Fluid Mech. 51, 119.

3) Saffman, P. G. 1970 Stud. Appl. Math. 49, 371.

4) Tung, C. & Ting, L. 1967 Phys. Fluids 10, 901.

5) Betchov, R. 1965 J. Fluid Mech. 22, 471.

6) Hasimoto, H. 1971 J. Phys. Soc. Japan. 31, 293.

7) Hasimoto, H. 1972 J. Fluid Mech. 51, 477.

8) Hasimoto, H. & Kambe, T. 1971 物理学会第26回年会

9) Kelvin, Lord 1880 Mathematical and Physical Papers vol. 4, p. 152, Cambridge University Press.

10) Kambe, T. & Takao, T. 1971 J. Phys. Soc. Japan. 31, 591.