数理解析研究所講究録
第 360 巻 1979 年 88-126

細長い物体を含む二つの物体のおそい運動

東大　生研　　成瀬　文雄

§1　あらまし

細長い物体と3次元物体または二つの細長い物体が緩慢な運動をする場合の流れを、つぎのような仮定で研究する。1. 基礎方程式はストークス方程式である。2. 細長い物体の形は任意で、代表的長さを ℓ^* とする。細長い軸に直角な断面は任意の形でよいが円への写像関数は既知であるとし、その代表的長さを b^* とする。また $b^*/\ell^* = \kappa \ll 1$ を仮定する。3. 細長い物体の速度 $\mathbb{U}_B^*(s^*)$ は自由に与えられているとする。また物体がないときの速度 $\mathbb{U}^*(\mathbb{r}^*)$、圧力 $P^*(\mathbb{r}^*)$ はストークス方程式を満たす範囲内で自由に与えられているとする。ここで s^* は細長い物体の中心線に沿って基準点から測った長さであり、$\mathbb{r}^*$ は位置ベクトルである。4. 3次元物体が単独で直進運動あるいは回転運動をしているときのストークス近似の解は既知であるとする。3次元物体の代表的大きさを a^* とし、

$\mathbb{V}_a^*$で進むとき物体に働く力は$-6\pi\mu K \mathbb{V}_a^* a^* \boldsymbol{\ell}$で、$\omega_a^*$で回転するときに物体に働くトルクは$-8\pi\mu K' \omega_a^* a^{*3} \boldsymbol{e}$で与えられるとする。ここで$\boldsymbol{\ell}$, $\boldsymbol{e}$は単位ベクトルで、K、K'は物体の形できまる定数である。5. 3次元物体は細長い物体より十分離れているとする。すなわち3次元物体から細長い物体までの最短距離を$\ell^{*\prime}$とするとき、$a^*/\ell^{*\prime} \ll 1$とし、3次元物体の直進運動によって誘起される流れをストークス源による流れで、また回転運動によって誘起される流れを二重ストークス源による流れでおきかえる。

以上のような仮定のもとに、§2で流れの場を支配する積分方程式がきりつなぎ法で導出される。この積分方程式は一般の場合には$\varepsilon = (\log \ell^*/b^*)^{-1}$による展開の形で解かれるが、特別の場合には厳密解が存在し、その解は$O\left(\frac{b^*}{\ell^*} \text{ or } \frac{b^{*2}}{\ell^{*2}} ; \frac{a^{*2}}{\ell^{*\prime 2}} \text{ or } \frac{a^{*3}}{\ell^{*\prime 3}}\right)$を無視する範囲内でストークス方程式の解と一致する。

つぎに§3で、断面が一様なリングと対称な3次元物体が運動する四つの場合およびそれぞれの断面が一様な二つのリングが運動する四つの場合、合せて8個の場合について上記積分方程式の厳密解がもとめられる。さらに§4では、§3でもとめられた厳密~~解から~~$O(\varepsilon^2)$または$O(\varepsilon^3)$を省略した式を用いて、2物体の運動による干渉効果が調べられている。

さて今迄に行われた細長い物体を含む2物体の干渉問題の

研究は、ε展開によって$O(\varepsilon^2)$まで計算されたものに限られている。まず球の背後に一様な細長い直線棒（断面円）があるときの流れがN.J. Meothe & D.F. Katz[1]によって研究された。すなわち細長い直線棒のまわりの流れを解くための積分方程式とストークス流における球定理を用いて、この流れがεによる展開法で$O(\varepsilon^2)$まで解析されているが、解析計算の1部に誤りがあると思われる。また球状の頭部をもつ微小な生物（うにの精虫など）が、べんもの平面波動運動によって推進する場合が成瀬[2]によって解析されている。すなわち一枚の無限平板を壁としてもつ流体中を3次元物体及び細長い物体が運動する場合の流れを支配する積分方程式をεによる展開法で、$O(\varepsilon^2)$まで解析し、べんも部分の断面の変形をも考慮したときの前進速度を与える式が導出されている。

以上の研究と比較して本研究の特徴はつぎのような点にある。(i) 任意の断面をもつ細長い物体を含む2物体の干渉問題に対する積分方程式を導出すること。(ii) 今迄に解析されてない8種類の場合についてこれら積分方程式の厳密解を求めること、(iii) 上記8種類の場合について、2物体が運動するときの干渉効果の定性的な様子を明らかにすることなどである。

§2. 流れの場の積分方程式

3次元物体の運動により誘起されるレイノルズ数 $R_1\left(=\frac{V_a^* a^*}{\nu}\right)$ および細長い物体の運動により誘起されるレイノルズ数 R_2（内部領域では $\frac{U_B b^*}{\nu}$、外部領域では $\varepsilon U_B l^*/\nu$）、いずれもが小さいとしてストークス方程式を用いる。いま速度を $\mathbb{q}^*$、圧力を p^*、代表的長さを l_0、代表的速度を U_0 とし、p, $\mathbb{q}$, $\mathbb{r}$ を

$$\mathbb{q} = \mathbb{q}^*/U_0 \quad , \quad p = p^* l_0/\mu U_0 \quad , \quad \mathbb{r} = \mathbb{r}^*/l_0 \tag{1}$$

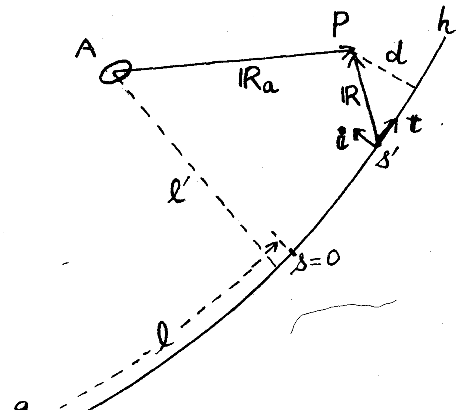
で定義するとき、基礎方程式は

$$\Delta \mathbb{q} - \nabla p = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \mathbb{q} = 0 \tag{2}$$

のようになる。以下において物理量は * をつけ、無次元量は * をとって表わすことにする。

〔I〕 3次元物体と細長い物体の運動

3次元物体は中心位置をAとし、速度 $\mathbb{V}_a$ で直線運動をしているか、角速度 ω_a で回転しているとする。細長い物体の速度は $\mathbb{U}_B(s)$、物体がないときの速度、圧力は $\mathbb{U}(\mathbb{r})$, $P(\mathbb{r})$ とする。いま考えている領域の一点をPとし、ベクトル $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_a$ を第1図のようにきめる。また d はPと細長い物体とを結ぶ最短距離とする。このとき $R_a^*/a^* \sim O(1)$ を



第1図
（今後図では * は除く）

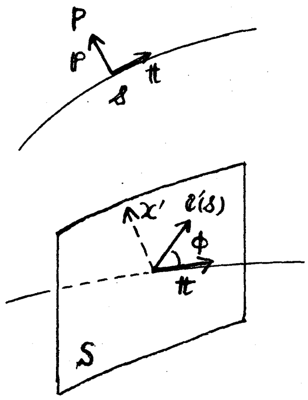
満たす点は3次元物体の内部領域にあり、$d^*/b^* \sim O(1)$ を満たす点は細長い物体の内部領域にある。また $R_a^*/a^* \sim O(1/R_1)$ および $d^*/l^* \sim O(1)$ を満たす点が外部領域を構成する。内部領域における内部解は3次元物体または細長い物体がそれぞれ単独で運動しているときの内部解に等しいと考えてよく、2物体の干渉効果はまず外部解に現われる。外部変数は (1) の $\mathbf{q}$、$\mathbf{p}$、$\mathbf{r}$ をもってくればよい。ただし l_0 として l^* を、U_0 として物体の代表的速度 V_0（回転のときには $\omega_0 l^*$）を選ぶことにする。第1図で示される $\mathbf{R}$、$\mathbf{R}_a$ を用いて、外部解の速度は

$$\mathbf{q} = \mathbf{U}(t) - \int_g^h C(s')\left\{\frac{\mathbf{l}'(s')}{R} + \frac{(\mathbf{l}'(s')\cdot\mathbf{R})}{R^3}\mathbf{R}\right\}ds' - K\hat{V}\left\{\frac{a\hat{\mathbf{l}}}{R_a} + \frac{a(\hat{\mathbf{l}}\cdot\mathbf{R}_a)}{R_a^3}\mathbf{R}_a\right\} + \frac{K'a^3\hat{\omega}}{R_a^3}\mathbf{e}\times\mathbf{R}_a \quad (3)$$

の形で表わされる。ここで第2項は強さ $C(s)$、方向 $\mathbf{l}'(s)$ のストークス源が細長い物体の中心線上に分布したときに誘起される速度であり、第3項および第4項は3次元物体の直進および回転運動によって誘起されるストークス源および2重ストークス源に由来する速度を現わしている。ここで3次元物体の形として、回転運動をしたときに誘起される速度が (3) の第4項で表示されるような形であることを仮定した。これらの表示に現われるストークス源または2重ストークス源の強さ及び方向はいずれも未定であって、共通領域における外部解と内部解のマッチングからから決定される。さてマッチン

グへと進むために、外部解および内部解が共通領域でどのような形をしているかを知る必要がある。以下にこれらの振舞について考察しよう。

(i) 共通領域の点 P が細長い物体の近傍にあるとき



第2図

まず外部解が共通領域でどのように表示されるかを考える。P から最短距離にある細長い物体上の点を s とする。いま $\overrightarrow{sP}=\boldsymbol{\rho}$、$\boldsymbol{t}$ を s 点で物体の中心線に接する単位ベクトル、$\boldsymbol{e}_{x'}$ を x' 方向（x' は $\boldsymbol{\ell}(s)$ を $\boldsymbol{t}$ に直角な面 S に射影したときの方向）の単位ベクトル、ϕ を $\boldsymbol{\ell}'$ と $\boldsymbol{t}$ のなす角とするとき、速度 $\boldsymbol{q}$ はこの領域で

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{U}(s) + 4C(s)\cos\phi\left(\log\frac{\rho}{2}+\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{t} + 2C(s)\sin\phi\left\{\left(\log\frac{\rho}{2}\right)\boldsymbol{e}_{x'} - \frac{(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{e}_{x'})}{\rho^2}\boldsymbol{\rho}\right\} + \boldsymbol{K}(s) - K\hat{V}\left\{\frac{a\boldsymbol{\ell}}{R_a}+\frac{a(\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{R}_a)}{R_a^3}\boldsymbol{R}_a\right\}_s + K'a^3\hat{\omega}\left(\frac{\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{R}_a}{R_a^3}\right)_s, \tag{4}$$

および

$$\boldsymbol{K}(s) = \left\{\int_{g}^{s-\varepsilon'} + \int_{s+\varepsilon'}^{h}\right\}\left[-C(s')\left\{\frac{\boldsymbol{\ell}'(s')}{R}+\frac{(\boldsymbol{\ell}'(s')\cdot\boldsymbol{R})}{R^3}\boldsymbol{R}\right\}\right]ds' - 4C(s)\log\varepsilon'\left(\boldsymbol{t}\cos\phi+\frac{\boldsymbol{e}_{x'}}{2}\sin\phi\right) \tag{5}$$

のように表わされる。[3), 4)] ここでサフィックス s は $\boldsymbol{R}_a=\overrightarrow{As}$ を意味する。また (5) で、ε' は $\ell \gg \varepsilon' \gg b$ を満足する微小量であり、$\boldsymbol{R}=\overrightarrow{s's}$ である。

つぎに内部解の共通領域における振舞について考えて見よ

う。内部解は細長い物体が単独で運動している時と同一であるから、共通領域でつぎのような形になることが知れている。3)、4)、5) 内部変数 $\bar{\mathbb{P}} = \mathbb{P}\ell^*/b^*$ととって、$\mathbb{q}$は

$$\mathbb{q} = \left(A \log \frac{\bar{P}}{a_1} + \omega_B(s)\right)\mathbb{t} + B\left[\left(\log \frac{\bar{P}}{a_1} - \bar{b}_1(\mathbb{l}) + \frac{1}{2}\right)\mathbb{i} - \frac{(\mathbb{i}\cdot\bar{\mathbb{P}})}{\bar{P}^2}\bar{\mathbb{P}} - C_1(\mathbb{l})\mathbb{j}\right] + \mathbb{U}_B(s) + O\left(\frac{1}{\bar{P}}\right) \quad (6)$$

のように表わされる。ここでA、Bは未定の定数、$\mathbb{i}$、$\mathbb{j}$は互いに直交し、かつ$\mathbb{t}$にも直交する未定の単位ベクトル、a_1、$\bar{b}_1(\mathbb{l})$、$C_1(\mathbb{l})$は物体の断面の形によってきまる断面係数で、断面の形の円への写像関数がきまるとき、後述の(23)で決定される。また$\mathbb{U}_B(s) = \omega_B\mathbb{t} + \mathbb{U}_B(s)$とおいた。

(ii) 共通領域の点Pが3次元物体の周辺にあるとき

まず外部解について考えるとき、速度$\mathbb{q}$は共通領域で

$$\mathbb{q} = \mathbb{U}(A) - \int_g^h C(s')\left\{\frac{\mathbb{l}(s')}{R} + \frac{(\mathbb{l}(s')\cdot\mathbb{R})}{R^3}\mathbb{R}\right\}_A ds' - K\hat{\mathbb{V}}\left\{\frac{a\mathbb{l}}{R_a} + \frac{a(\mathbb{l}\cdot\mathbb{R}_a)}{R_a^3}\mathbb{R}_a\right\} + K'a^3\hat{\omega}\left(\frac{\mathbb{e}\times\mathbb{R}_a}{R_a^3}\right) \quad (7)$$

となる。ここでサフィックスAは$\mathbb{R} = \overrightarrow{s'A}$を意味する。つぎに内部解については内部変数$\bar{\mathbb{R}}_a = \mathbb{R}_a\cdot\frac{\ell^*}{a^*}$，$\bar{a} = a\cdot\frac{\ell^*}{a^*} = 1$ととるとき、速度$\mathbb{q}$は

$$\mathbb{q} = \mathbb{V} - K\hat{\mathbb{V}}\left\{\frac{\hat{\mathbb{l}}}{\bar{R}_a} + \frac{(\hat{\mathbb{l}}\cdot\bar{\mathbb{R}}_a)}{\bar{R}_a^3}\bar{\mathbb{R}}_a\right\} + \frac{K'\hat{\omega}}{\bar{R}_a^3}\hat{\mathbb{e}}\times\bar{\mathbb{R}}_a\cdot\frac{a^*}{\ell^*}, \quad (8)$$

$$\hat{\mathbb{V}} = \mathbb{V}_a - \mathbb{V}, \quad \hat{\omega} = \omega_a - \omega \quad (9)$$

のようにきまる。ここで$\mathbb{V}$および2ωは物体が無いときのA

点の速度および渦度に細長い物体の運動によりA点に誘起される速度および渦度を加えたものである。また $\hat{\boldsymbol{\ell}}$, $\hat{\boldsymbol{e}}$ は $\hat{v}$, $\hat{\omega}$ および物体の形によって決定される単位ベクトルである。

さて共通領域における外部解および内部解の振舞が分ったから、マッチングを行い積分方程式を導出することができる。まず細長い物体の周辺でのマッチングを (4), (5), (6) を用いて行う。つぎに

$$c(s)\,\boldsymbol{\ell}'(s) = \frac{A(s)}{4}\,\boldsymbol{t} + \frac{I(s)}{2}\,\boldsymbol{\ell}_1 + \frac{J(s)}{2}\,\boldsymbol{g}_1 \qquad (10)$$

とおく。ここで $\boldsymbol{\ell}_1$, $\boldsymbol{g}_1$ は互いに直交しかつ $\boldsymbol{t}$ に直行する単位ベクトルで、この範囲で解析に都合のよい方向をとってよい。このとき $A(s)$, $I(s)$, $J(s)$ を未知関数、$\hat{v}$, $\hat{\omega}$ を未知変数とするつぎの積分方程式が得られる。

$$\mathbb{K}(s) + \mathbb{T} = A\left(\lambda' - \frac{1}{2} - \log a_1\right)\boldsymbol{t} + \left[\left(\lambda' + \frac{1}{2} - \bar{b}_1(\ell_1) - \log a_1\right)I - c_1(\ell_1)J\right]\boldsymbol{\ell}_1$$
$$+ \left[-c_1(\ell_1)I + \left(\lambda' + \frac{1}{2} + \bar{b}_1(\ell_1) - \log a_1\right)J\right]\boldsymbol{g}_1 + \mathbb{W}_B(s) - \mathbb{W}(s)\,, \qquad (11)$$

$$\mathbb{T} = -K\hat{v}\left\{\frac{a\boldsymbol{\ell}}{R_a} + \frac{a(\boldsymbol{\ell}\cdot\mathbb{R}_a)}{R_a^3}\mathbb{R}_a\right\} + \frac{K'a^3\hat{\omega}}{R_a^3}\,\boldsymbol{e}\times\mathbb{R}_a\,, \qquad (12)$$

$$\mathbb{K}(s) = \left\{\int_{g}^{s-\varepsilon'} + \int_{s+\varepsilon'}^{h}\right\}\left[\!\left[-\frac{\frac{A}{4}\boldsymbol{t} + \frac{1}{2}(I\boldsymbol{\ell}_1 + J\boldsymbol{g}_1)}{R} - \frac{\left[\frac{A}{4}(\mathbb{R}\cdot\boldsymbol{t}) + \frac{1}{2}\{I(\mathbb{R}\cdot\boldsymbol{\ell}_1) + J(\mathbb{R}\cdot\boldsymbol{g}_1)\}\right]\mathbb{R}}{R^3}\right]\!\right]ds'$$
$$-(A\boldsymbol{t} + I\boldsymbol{\ell}_1 + J\boldsymbol{g}_1)\log\varepsilon'\,, \qquad (13)$$

ここで $\lambda' = \log 2\ell^*/b^*$, $\mathbb{R} = \overrightarrow{s's}$, $\mathbb{R}_a = \overrightarrow{As}$ である。

つぎに3次元物体近傍でのマッチングを (7), (8) を用いて行うとき

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{V} &= \mathbb{U}(A) - \int_g^h C(s')\left\{\frac{\mathbb{l}'(s')}{R} + \frac{(\mathbb{l}'(s')\cdot\mathbb{R})}{R^3}\mathbb{R}\right\}_A ds' \\ \mathbb{\omega} &= \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\mathbb{U}(A) - \frac{1}{2}\mathrm{rot}\left[\int_g^h C(s')\left\{\frac{\mathbb{l}'(s')}{R} + \frac{(\mathbb{l}'(s')\cdot\mathbb{R})}{R^3}\mathbb{R}\right\}_A ds'\right]\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

および

$$\mathbb{l} = \hat{\mathbb{l}} \;,\quad \mathbb{e} = \hat{\mathbb{e}} \tag{15}$$

が得られるから、(9) を用いて

$$\hat{\mathbb{V}} = \mathbb{V}_a - \mathbb{U}(A) + \int_g^h C(s')\left\{\frac{\mathbb{l}'(s')}{R} + \frac{(\mathbb{l}'(s')\cdot\mathbb{R})}{R^3}\mathbb{R}\right\}_A ds' \tag{16}$$

$$\hat{\mathbb{\omega}} = \mathbb{\omega}_a - \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\mathbb{U}(A) + \frac{1}{2}\mathrm{rot}\left[\int_g^h C(s')\left\{\frac{\mathbb{l}'(s')}{R} + \frac{(\mathbb{l}'(s')\cdot\mathbb{R})}{R^3}\mathbb{R}\right\}_A ds'\right] \tag{17}$$

となる。ここで $\hat{\mathbb{l}}$, $\hat{\mathbb{e}}$ は $\hat{\mathbb{V}}$, $\hat{\mathbb{\omega}}$ および物体の形の関数と考えるとき、(11)～(13), (15)～(17) の連立方程式系を解くことによって、$A(s)$、$I(s)$、$J(s)$ および $\hat{\mathbb{V}}$, $\hat{\mathbb{\omega}}$ が決定できる。

いま細長い物体の ds 部分に働く力を $\mathbb{f}\cdot ds$ とするとき

$$\mathbb{f} = 2\pi\mu V_0\left\{A\mathbb{t} + 2\left(I\mathbb{l}_1 + J\mathbb{j}_1\right)\right\} \tag{18}$$

であるから、細長い物体に働く力 $\mathbb{F}$ およびトルク $\mathbb{G}$ は

$$\mathbb{F} = l^*\int_g^h \mathbb{f}\, ds \tag{19}$$

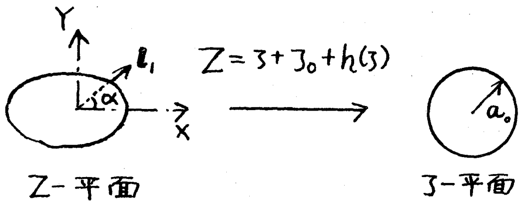
$$\mathbb{G} = l^{*2}\int_g^h \mathbb{r}\times\mathbb{f}\, ds \tag{20}$$

で与えられる。また3次元物体に働く力 $\mathbb{F}_a$, トルク $\mathbb{G}_a$ は

$$\mathbb{F}_a = -8\pi\mu V_0\, a^* k\, \hat{V}\, \hat{\mathbb{l}} \tag{21}$$

$$G_a = -8\pi\mu\,\omega_0\, a^{*3} K' \hat{\omega}\, \hat{e} \tag{22}$$

となる。(18)～(22)の力やトルクの式には A, I, J, $\hat{V}$, $\hat{\omega}$ が含まれるから、前述の断面係数 a_1, $\bar{b}_1(\ell_1)$, $C(\ell_1)$ が現われるが、これらは細長い物体の断面の形によって変化する。いま物体の断面形をZ平面上でえがき、この断面形が写像関数 $Z=\zeta+\zeta_0+h(\zeta)$ によってζ平面上の半径 a_0 の円に写像されるとき、a_1, $\bar{b}_1(\ell_1)$, $C_1(\ell_1)$ は以下の形をとる。[3),5)]



第3図

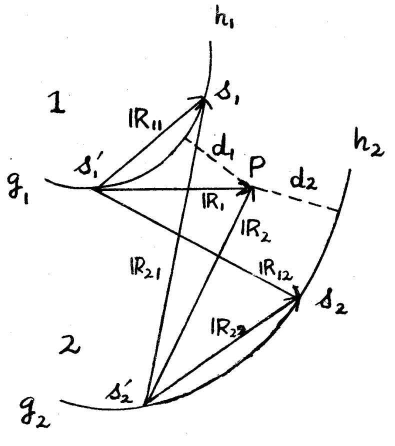
$$\left.\begin{aligned} &a_1=\frac{a_0}{b}, \quad \bar{b}_1(\ell_1)=-\frac{\delta}{2}\cos(\beta+2\alpha), \quad C_1(\ell_1)=\frac{\delta}{2}\sin(\beta+2\alpha) \\ &\delta e^{i\beta}=\frac{1}{2\pi a_0}\int_0^{2\pi}\frac{h(a_0e^{-i\theta})-a_0e^{-i\theta}h'(a_0e^{i\theta})}{e^{i\theta}\{1+h'(a_0e^{i\theta})\}}\,d\theta=\frac{1}{2\pi a}\oint_C\frac{\bar{Z}}{i\zeta^2\frac{dZ}{d\zeta}}\,d\zeta \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

これらの断面係数は2次元物体のまわりの流れの時に現われるものと全く同一で、2次元物体のまわりの流れで計算したものがそのまま使用でき、楕円、矩形、円弧形、正n星形（正n多角形を含む）、種種のレンズ形、二等辺三角形、菱形、二枚の平板の作る楔形などに対し、厚み比をいろいろ変えて計算されている。

またこれら積分方程式の厳密解は、ストークス方程式から $O\left(\frac{b}{\ell}\ln(\frac{b}{\ell})^2;\ (\frac{a}{\ell'})^2\ln(\frac{a}{\ell'})^3\right)$ を省略した程度の精度をもつ。

(II) 二つの細長い物体の運動

細長い物体についての記号は今迄細長い物体に対して用いられた記号をそのまま用いるが、サフィックス1，2をつけて細長い物体1および2を区別する。また物体がない時の速度，圧力は前と同様に $\mathbb{U}(\mathbb{r})$, $P(\mathbb{r})$ とする。いま空間中の一点をPとし、d_1^*, d_2^* をPから物体1または2までの最短距離とするとき、$d_1^*/b_1^* \sim O(1)$ の領域が物体1の内部領域、$d_2^*/b_2^* \sim O(1)$ の領域が物体2の内部領域となり、$d_1^*/l_1^* \sim O(1)$ および $d_2^*/l_2^* \sim O(1)$ を満たす点が外部領域を構成する。



第4図

いま二つの細長い物体の最短距離を d^* とし、$d^* \gg b_i^*$ $(i=1,2)$ を仮定する。このとき内部解は物体1または2が単独で運動しているときの内部解と同一であるから、共通領域における内部解として(6)がそのまま使用できる。

また外部解の速度は、第4図のように $\mathbb{R}_1$, $\mathbb{R}_2$, $\mathbb{R}_{11}$ ---- を定め、物体1および2の中心線上に $C_1(s_1)\mathbb{l}_1'(s_1)$ および $C_2(s_2)\mathbb{l}_2'(s_2)$ のストークス源を分布するとき、

$$\mathbb{q} = \mathbb{U}(\mathbb{r}) - \int_{g_1}^{h_1} C_1(s_1')\left\{\frac{\mathbb{l}_1'(s_1')}{R_1} + \frac{(\mathbb{l}_1'(s_1')\cdot\mathbb{R})}{R_1^3}\mathbb{R}\right\}ds_1' - \int_{g_2}^{h_2} C_2(s_2')\left\{\frac{\mathbb{l}_2'(s_2')}{R_2} + \frac{(\mathbb{l}_2'(s_2')\cdot\mathbb{R}_2)}{R_2^3}\mathbb{R}_2\right\}ds_2' \quad (24)$$

のように表現される。いま物体 i の共通領域内の一点を P とし、P から最短距離にある物体 i 上の点を s_i とするとき、P 点での速度は (4)、(5) と類似してつぎのような形になる。

$$\mathbf{q} = \mathbf{U}(s_i) + 4C_i(s_i)\cos\phi_i\left(\log\frac{\rho}{2}+\frac{1}{2}\right)\mathbf{t}_i + 2C_i(s_i)\sin\phi_i\left\{\left(\log\frac{\rho}{2}\right)\mathbf{e}_{x'} - \frac{(\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{e}_{x'})}{\rho^2}\boldsymbol{\rho}\right\} + \mathbf{K}_{ii}(s_i) + \mathbf{K}_{ji}(s_i), \quad (25)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{K}_{ii}(s_i) &= \left\{\int_{g_i}^{s_i-\varepsilon_i} + \int_{s_i+\varepsilon_i}^{h_i}\right\}\left[-\frac{\frac{A_i}{4}\mathbf{t}_i + \frac{1}{2}(I_i\mathbf{i}_i + J_i\mathbf{j}_i)}{R_{ii}} - \frac{\frac{A_i}{4}(\mathbf{R}_{ii}\cdot\mathbf{t}_i) + \frac{1}{2}\left\{I_i(\mathbf{R}_{ii}\cdot\mathbf{i}_i) + J_i(\mathbf{R}_{ii}\cdot\mathbf{j}_i)\right\}}{R_{ii}^3}\mathbf{R}_{ii}\right]ds_i' \\
&\qquad - (A_i\mathbf{t}_i + I_i\mathbf{i}_i + J_i\mathbf{j}_i)\log\varepsilon_i, \\
\mathbf{K}_{ji}(s_i) &= \int_{g_j}^{h_j}\left[-\frac{\frac{A_j}{4}\mathbf{t}_j + \frac{1}{2}(I_j\mathbf{i}_j + J_j\mathbf{j}_j)}{R_{ji}} - \frac{\frac{A_j}{4}(\mathbf{R}_{ji}\cdot\mathbf{t}_j) + \frac{1}{2}\left\{I_j(\mathbf{R}_{ji}\cdot\mathbf{i}_j) + J_j(\mathbf{R}_{ji}\cdot\mathbf{j}_j)\right\}}{R_{ji}^3}\mathbf{R}_{ji}\right]ds_j'
\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

ただし $i=1$ のとき $j=2$, $i=2$ のとき $j=1$ ととる。また $\boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{s_iP}$ であり、s_i, ϕ_i, $\mathbf{e}_{x_i'}$, A_i, I_i, J_i, $\mathbf{t}_i$, $\mathbf{i}_i$, $\mathbf{j}_i$ $(i=1,2)$ は (4) および (10) の s, ϕ, $\mathbf{e}_{x'}$, A, I, J, $\mathbf{t}$, $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$ と全く同一の定義を物体 i に対して適用したものである。

物体 i の共通領域における内部解の表現は、(6) と全く同一の式を物体 i に対し構成すればよい。この式と外部解 (25)、(26) とのマッチングを行うとき、つぎのような積分方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{ii} + \mathbf{K}_{ji} &= A_i\left(\lambda' - \frac{1}{2} - \log a_i\right)\mathbf{t}_i + \left[\left(\lambda' + \frac{1}{2} - \bar{b}_i(\mathbf{i}_i) - \log a_i\right)I_i - C_i(\mathbf{i}_i)J_i\right]\mathbf{i}_i \\
&\quad + \left[-C_i(\mathbf{i}_i)I_i + \left(\lambda' + \frac{1}{2} + \bar{b}_i(\mathbf{i}_i) - \log a_i\right)J_i\right]\mathbf{j}_i + \mathbf{U}_{iB}(s_i) - \mathbf{U}(s_i) \quad (27)
\end{aligned}$$

ここで再び $i=1$ に対し $j=2$、$i=2$ に対し $j=1$ ととる。また $\lambda' = \log 2l_1^*/b_1^*$ であり、$\mathbf{K}_{ii}$, $\mathbf{K}_{ji}$ は (26) で与えられ、a_i, $\bar{b}_i(\mathbf{i}_i)$、

$c_i(\ell_i)$ は物体 i の断面係数で (23) で与えられる。

いま (27) の i を 1, 2 とおいて得られる積分方程式系を解いて、A_i, I_i, J_i が決定されれば、物体 i の ds_i 部分に働く力 $\mathbb{f}_i ds_i$ は

$$\mathbb{f}_i = 2\pi\mu V_0 A_i \mathbb{t}_i + 4\pi\mu V_0 (I_i \mathbb{l}_i + J_i \mathbb{j}_i) \tag{28}$$

で与えられ、物体 i に働く力 $\mathbb{F}_i$ およびトルク $\mathbb{G}_i$ は

$$\mathbb{F}_i = \ell_i^* \int_{g_i}^{h_i} \mathbb{f}_i ds_i \,, \qquad \mathbb{G}_i = \ell_i^{*2} \int_{g_i}^{h_i} \mathbb{r}_i \times \mathbb{f}_i ds_i \tag{29}$$

で決まる。なお上記積分方程式系の厳密解は、ストークス方程式の解から $O\left(b_i/\ell_i \text{ or } (b_i/\ell_i)^2 ;\ i=1,2\right)$ を省略した程度の精度をもつ。

§3 積分方程式の厳密解

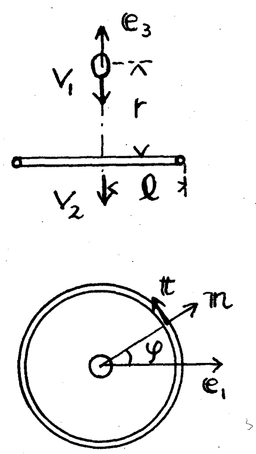
[I] 3次元物体と一様なリングの運動

3次元物体と一様な断面をもつリングが運動する場合の積分方程式系の厳密解を求めるため、つぎの仮定をする。(1) 3次元物体はリングの中心軸上にある。(2) 3次元物体の形として、対称な形を仮定する。すなわち3次元物体のみが単独で運動する場合において、前進運動のときには速度と力の方向が、また回転運動のときには角速度とトルクの方向がそれぞれ一致するような物体を考える。(3) 一様な断面をもつ

リングに対し、$\log a_1 = 0$ となるように物体の断面の代表的長さを選ぶ。(4) 長さはリングの半径 l^* で、速度は V_0 で無次元化する。とくに回転しているときには角速度を ω_0 で、速度を $l^*\omega_0$ で無次元化する。(5) 物体の速度や角速度は図の矢印の方向に、図で示された大きさで運動しているとする。(6) 二物体間の中心距離を $\mathbb{r}^*$ とする。

以上の仮定をして、つぎの四つの場合について厳密解をもとめる。その方法はいずれも A, I, J に対して問題により異なる適切な関数形を仮定し、これを用いて積分方程式に表われる積分計算を実行、問題の積分方程式および境界条件を厳密に満たす解をもとめ、物体に働く力およびトルクを決定する。

Case 1. リング面に直角方向の運動



第5図

第5図のように3次元物体およびリングが $-\mathbb{e}_3$ 方向に V_1^*, V_2^* で動いている。従って $\mathbb{V}_a = -V_1\mathbb{e}_3$, $\mathbb{U}_B(s) = -V_2\mathbb{e}_3$ である。いま $\mathbb{f}_1 = \mathbb{e}_3$、$\mathbb{g}_1 = \mathbb{n}$ と選び、対称性より $A=0$, $I=\mathrm{const.}$, $J=\mathrm{const.}$ を仮定し、(12), (13), (16) を用いて $\mathbb{K}$, $\mathbb{F}$, $\hat{V}$ がつぎのように計算できる。

$$\mathbb{K}(s) = -2\log 2\, I\,\mathbb{e}_3 + (3-\log 2)\, J\,\mathbb{n}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{T}(s) &= -k\hat{V}a\left[\frac{(1+2r^2)}{(1+r^2)^{3/2}}\mathbb{e}_3 - \frac{r\mathbb{n}}{(1+r^2)^{3/2}}\right] \\ \hat{V} &= V_1 - \pi\left\{\frac{(1+2r^2)I}{(1+r^2)^{3/2}} - \frac{rJ}{(1+r^2)^{3/2}}\right\}\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

いま $s = \log 8l^*/b^*$, $\alpha = (1+2r^2)/(1+r^2)^{3/2}$, $\beta = r/(1+r^2)^{3/2}$ とおき、上の結果を (11) に代入して

$$\left.\begin{aligned}I &= \left[V_2\left(s - \tfrac{5}{2} + \bar{b}_1 - \beta^2 ka\pi\right) + kaV_1\left\{\beta C_1 - \alpha\left(s - \tfrac{5}{2} + \bar{b}_1\right)\right\}\right]\Big/\Delta \\ J &= \left[kaV_1\left\{\beta\left(s + \tfrac{1}{2} - \bar{b}_1\right) - \alpha C_1\right\} + V_2\left(C_1 - \alpha\beta ka\pi\right)\right]\Big/\Delta,\end{aligned}\right\} (31)$$

の如く、I, J が決定される。ここで

$$\Delta = s^2 - 2s - \frac{5}{4} + 3\bar{b}_1(\ell_1) - \bar{b}_1^2(\ell_1) - C_1^2(\ell_1) - ka\pi\left\{\alpha^2\left(s - \tfrac{5}{2} + \bar{b}_1\right) + \beta^2\left(s + \tfrac{1}{2} - \bar{b}_1\right) - 2C_1\alpha\beta\right\}$$

である。3 次元物体およびリングに働く力 $\mathbb{F}_1$ および $\mathbb{F}_2$ は、(18)、(19)、(21)、(30)、(31) を用いて、つぎようにきまる。

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{F}_1 &= 8\pi\mu V_0 a^* kV_1\left[\!\left[1 + \frac{1}{\Delta}\left[\frac{V_2\pi}{V_1}\left\{\beta C_1 - \alpha\left(s - \tfrac{5}{2} + \bar{b}_1\right)\right\} + ka\pi\left\{\alpha^2\left(s - \tfrac{5}{2} + \bar{b}_1\right)\right.\right.\right.\right. \\ &\qquad \left.\left.\left.\left. + \beta^2\left(s + \tfrac{1}{2} - \bar{b}_1\right) - 2C_1\alpha\beta\right\}\right]\right]\!\right]\mathbb{e}_3 \\ \mathbb{F}_2 &= 4\pi\mu V_0 L I\,\mathbb{e}_3\end{aligned}\right\} (32)$$

ここで $L = 2\pi l$ である。とくに $r = 0$ の時には

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{F}_1 &= 8\pi\mu a^* kV_1^*\left[1 - \frac{(V_2/V_1 - ka)\pi}{s + \frac{1}{2} - \bar{b}_1 - ka\pi - C_1^2/\left(s - \frac{5}{2} + \bar{b}_1\right)}\right]\mathbb{e}_3 \\ \mathbb{F}_2 &= \frac{4\pi\mu L V_2^*\left(1 - kaV_1/V_2\right)}{s + \frac{1}{2} - \bar{b}_1 - ka\pi - C_1^2/\left(s - \frac{5}{2} + \bar{b}_1\right)}\,\mathbb{e}_3\end{aligned}\right\} (33)$$

のように簡単な解が得られる。

さて3次元物体が球の場合には、ストークス方程式の球定理を使って、球が小さくない近似で、すなわち $0 < a^*/l^* < 1$ の範囲内で a^*/l^* の省略をしないで解ける。$r=0$ のときの解[6)]は

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{F}_1 &= 6\pi\mu a^* V_1^* \left[1 - \frac{\pi\left\{ V_2/V_1 - \frac{3}{4}a(1+a^2/3) \right\}(\delta-\frac{5}{2}+\bar{b}_1-C)}{(\delta+\frac{1}{2}-\bar{b}_1-A)(\delta-\frac{5}{2}+\bar{b}_1-C)-c_1^2} \right] \mathbb{e}_3 \\ \mathbb{F}_2 &= \frac{4\pi\mu V_2^* L\left\{ 1-(3aV_1/4V_2)(1+a^2/3) \right\}(\delta-\frac{5}{2}+\bar{b}_1-C)}{(\delta+\frac{1}{2}-\bar{b}_1-A)(\delta-\frac{5}{2}+\bar{b}_1-C)-c_1^2} \mathbb{e}_3 \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

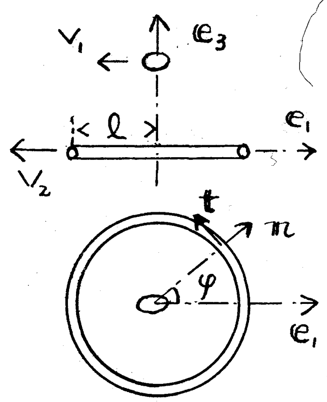
となるが、A, C の詳しい形は文献 6) を参照すれば分る。

とくに $a \ll 1$ のときの展開形は

$$A = a\pi\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}a^2 - \frac{7}{32}a^4 + \frac{15}{32}a^6 + \cdots \right), \quad C = \frac{5}{4}\pi a^3\left(1 - \frac{3}{5}a^2 + \frac{27}{42}a^4 + \cdots \right) \quad (35)$$

で与えられる。(33) で $K = 3/4$, $C_1 = 0$ とおいた式と、(34)、(35) を比較して、ストークス源近似による (33) は $a(=a^*/l^*)$ の広い範囲にわたって有効に使用できることが分る。

Case 2. リング面に平行方向の運動



第 6 図

第6図のように、3次元物体およびリングが $-\mathbb{e}_1$ 方向に V_1 および V_2 で動いている。従って $\mathbb{V}_a = -V_1\mathbb{e}_1$, $\mathbb{U}_B(s) = -V_2\mathbb{e}_1$ である。いま $\mathbb{i}_1 = n$, $\mathbb{j}_1 = \mathbb{e}_3$ にとり、$A = -\sin\varphi\,\bar{A}$, $I = \cos\varphi\,\bar{I}$, $J = \cos\varphi\,\bar{J}$, $\bar{A} = \mathrm{const}$, $\bar{I} = \mathrm{const}$, $\bar{J} = \mathrm{const}$ を仮定して、(12)、(13)、

(16) に代入し、

$$\mathbb{K} = -\sin\varphi\, \mathbb{t}\left[\bar{A}\left(\frac{3}{2}-2\log 2\right)-2\bar{I}\right]+\cos\varphi\, \mathbb{n}\left[\bar{I}(1-2\log 2)-\bar{A}\right]+\cos\varphi\, \mathbb{e}_3(2-2\log 2)\bar{J}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{T} &= -ka\hat{V}\left\{\frac{-\sin\varphi}{\sqrt{1+r^2}}\mathbb{t}+\frac{(2+r^2)\cos\varphi\, \mathbb{n}}{(1+r^2)^{3/2}}-\frac{r\cos\varphi\, \mathbb{e}_3}{(1+r^2)^{3/2}}\right\} \\ \hat{V} &= V_1-\frac{\pi}{2}\left\{\frac{\bar{A}}{2\sqrt{1+r^2}}+\frac{(2+r^2)\bar{I}}{(1+r^2)^{3/2}}-\frac{r\bar{J}}{(1+r^2)^{3/2}}\right\}\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

が得られる。さらに (36) を (11) に代入するとき、$\bar{A}$, $\bar{I}$, $\bar{J}$ はつぎの如く決定される。

$$\left.\begin{aligned} \bar{A} &= A_{11}(V_2-\upsilon\alpha)+A_{12}(V_2-\upsilon\beta)+A_{13}\upsilon\gamma \\ \bar{I} &= A_{21}(V_2-\upsilon\alpha)+A_{22}(V_2-\upsilon\beta)+A_{23}\upsilon\gamma \\ \bar{J} &= A_{31}(V_2-\upsilon\alpha)+A_{32}(V_2-\upsilon\beta)+A_{33}\upsilon\gamma \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

ここで $\alpha, \beta, \gamma, \upsilon, k$ は

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+r^2}},\quad \beta=\frac{2+r^2}{(1+r^2)^{3/2}},\quad \gamma=\frac{r}{(1+r^2)^{3/2}},\quad \upsilon=kaV_1,\quad k=ka\pi \quad (38)$$

のように定義されており、A_{ij} は以下に示されるようにマトリックス T の逆マトリックスである.

$$A_{ij}=T^{-1},\quad T=\begin{pmatrix} 8-2-\frac{k}{4}\alpha^2 & 2-\frac{k}{2}\alpha\beta & \frac{k}{2}\alpha\gamma \\ 1-\frac{k}{4}\beta\alpha & 8-\frac{1}{2}-\bar{b}_1-\frac{k}{2}\beta^2 & -c_1+\frac{k}{2}\beta\gamma \\ \frac{k}{4}\alpha\gamma & -c_1+\frac{k}{2}\beta\gamma & 8-\frac{3}{2}+\bar{b}_1-\frac{k}{2}\gamma^2 \end{pmatrix} \quad (39)$$

A, I, J に対する仮定および (18) ~ (22), (36) を用いて、3 次元物体およびリングに働く力 $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_2$, トルク $\mathbb{G}_1$, $\mathbb{G}_2$ は

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{F}_1 &= 8\pi\mu V_0 a^* K\left[V_1 - \frac{\pi}{2\sqrt{1+r^2}}\left\{\frac{\bar{A}}{2} + \frac{(2+r^2)}{(1+r^2)}\bar{I} - \frac{r\bar{J}}{(1+r^2)}\right\}\right]\mathbb{e}_1 \\ \mathbb{F}_2 &= \pi\mu V_0 L(\bar{A} + 2\bar{I})\mathbb{e}_1\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

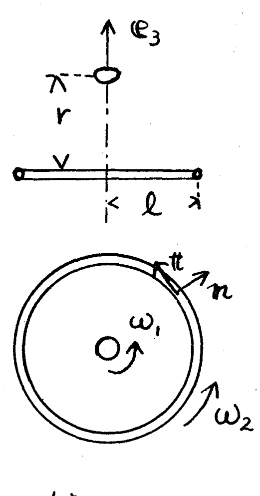
$$\left.\begin{aligned}\mathbb{G}_1 &= \frac{4\pi^2\mu k' a^3}{(1+r^2)^{3/2}}\left\{r\left(\frac{\bar{A}}{2} + \bar{I}\right) + \frac{\bar{J}}{2}\right\}\mathbb{e}_2 \\ \mathbb{G}_2 &= -\mu V_0 L^2 \bar{J}\,\mathbb{e}_2\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

の様になるから、(37)～(39)を用いて $\mathbb{F}_1, \cdots, \mathbb{G}_2$ を決定することができる。とくに $r=0$、$C_i(\mathbb{l}_1)=0$ のときには(40)は

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{F}_1 &= 8\pi\mu V_1^* a^* k\left[1 - \frac{(\pi V_2/V_1)(5s - \frac{29}{2} - \bar{b}_1) - k(9s - \frac{49}{2} - \bar{b}_1)}{4\{(s-2-\frac{k}{4})(s-\frac{1}{2}-\bar{b}_1-2k) - (1-\frac{k}{2})(2-k)\}}\right]\mathbb{e}_1 \\ \mathbb{F}_2 &= \mu L V_2^*\,\frac{\pi(3s - \frac{17}{2} - \bar{b}_1 - \frac{k}{2}) - (kV_1/V_2)(5s - \frac{29}{2} - \bar{b}_1)}{(s-2-\frac{k}{4})(s-\frac{1}{2}-\bar{b}_1-2k) - (1-\frac{k}{2})(2-k)}\,\mathbb{e}_1\end{aligned}\right\} \quad (42)$$

のように簡単になる。

Case 3. リング面に直角な軸のまわりの回転



第7図

第7図のように3次元物体およびリングが、リングの中心軸のまわりに、それぞれ ω_1、ω_2 の角速度で回転している。従って $\omega_a = \omega_1\mathbb{e}_3$，$\omega_B = \omega_2\mathbb{t}$ である。いま $\mathbb{l}_1 = \mathbb{n}$，$\mathbb{j}_1 = \mathbb{e}_3$ とり、$A = \mathrm{const}$，$I = J = 0$ を仮定して(12)、(13)を計算することによって

$$\mathbb{K} = A\left(\frac{3}{2} - 2\log 2\right)\mathbb{t}, \quad \mathbb{T} = \frac{k' a^3 \hat{\omega}}{(1+r^2)^{3/2}}\mathbb{t} \qquad (43)$$

が得られる。(43) を (11), (17) に代入し、(10) を用いて

$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{\omega_2}{\delta-2}\left\{1-\frac{\hat{\omega}}{\omega_2}\frac{k'a^3}{(1+r^2)^{3/2}}\right\} \\ \hat{\omega} &= \omega_1 + A\pi/2(1+r^2)^{3/2} \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

のような関係式が求められ、上式から A, $\hat{\omega}$ が

$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{\omega_2\left\{1-\omega_1 k'a^3/\omega_2(1+r^2)^{3/2}\right\}}{\delta-2-k'\pi a^3/2(1+r^2)^3} \\ \hat{\omega} &= \omega_1 - \frac{\pi\omega_2\left\{1-k'a^3\omega_1/\omega_2(1+r^2)^{3/2}\right\}}{2(1+r^2)^{3/2}\left\{\delta-2-k'\pi a^3/2(1+r^2)^3\right\}} \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

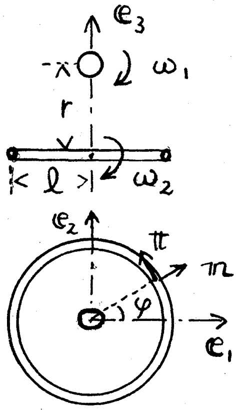
のように決定される。3次元物体およびリングに働くトルク $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_{T_2}$ に対する式は、(18), (20), (22) と上式より

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{G}_{T_2} &= -\frac{4\pi^2\mu\ell^{*3}\omega_0\omega_2\left\{1-k'a^3\omega_1/\omega_2(1+r^2)^{3/2}\right\}}{\left\{\delta-2-k'\pi a^3/2(1+r^2)^3\right\}}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{G}_1 &= -8\pi\mu k'a^{*3}\omega_0\left\{\omega_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{G}_{T_2}/8\pi\mu\ell^{*3}\omega_0(1+r^2)^{3/2}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

の如く与えられる。ここで k' は3次元物体の形によって変わる定数で、球のときには $k'=1$, 半径 a の円板のときには $k'=4/3\pi$ とればよい。

Case 4. リング面に平行な軸のまわりの回転

第8図のように3次元物体およびリングが、リング面に平行な軸のまわりに、ω_1, ω_2 の角速度で回転している。従っ



第 8 図

て $\omega_a = \omega_1 \mathbb{e}_2$、$\omega_B = -\cos\varphi\, \mathbb{e}_3$ である。いま $\mathbb{k}_1 = \mathbb{e}_3$、$\mathbb{j}_1 = \mathbb{n}$ ととり、$A = -\sin\varphi\, \bar{A}$，$I = \cos\varphi\, \bar{I}$、$J = \cos\varphi\, \bar{J}$ および $\bar{A}, \bar{I}, \bar{J}$ は定数であることを仮定して、(12)〜(17) を用いて

$$\left.\begin{aligned}
\mathbb{K}(s) &= -\sin\varphi \left\{ \bar{A}\left(\tfrac{3}{2} - \log 2\right) - 2\bar{J} \right\} \mathbb{t} + \cos\varphi \left\{ \bar{J}(1 - 2\log 2) - \bar{A} \right\} \mathbb{n} + \cos\varphi\,(2 - 2\log 2)\,\bar{I}\,\mathbb{e}_3 \\
\mathbb{T} &= \frac{k' a^3 \hat{\omega}}{(1+r^2)^{3/2}} \left(r\sin\varphi\, \mathbb{t} - r\cos\varphi\, \mathbb{n} - \cos\varphi\, \mathbb{e}_3 \right) \\
\hat{\omega} &= \omega_1 - \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{r\bar{A}}{2(1+r^2)^{3/2}} + \frac{r\bar{J}}{(1+r^2)^{3/2}} + \frac{\bar{I}}{(1+r^2)^{3/2}} \right\} \\
\mathbb{V} &= -\pi \left\{ \frac{\bar{A}}{4(1+r^2)^{1/2}} + \frac{(2+r^2)\bar{J}}{2(1+r^2)^{3/2}} - \frac{r\bar{I}}{2(1+r^2)^{3/2}} \right\} \mathbb{e}_1
\end{aligned}\right\} \quad (47)$$

が得られる。これらを (11) に代入して、$\bar{A}, \bar{I}, \bar{J}$ がつぎのように決定される。

$$\left.\begin{aligned}
\bar{A} &= -r\alpha\omega_1 (A_{11} + A_{12}) + (\omega_2 - \alpha\omega_1) A_{13} \\
\bar{J} &= -r\alpha\omega_1 (A_{21} + A_{22}) + (\omega_2 - \alpha\omega_1) A_{23} \\
\bar{I} &= -r\alpha\omega_1 (A_{31} + A_{32}) + (\omega_2 - \alpha\omega_1) A_{33}
\end{aligned}\right\} \quad (48)$$

ただし A_{ij} は以下に示されるようにマトリックス T の逆マトリックスであり、

$$A_{ij} = T^{-1}, \quad T = \begin{pmatrix} s - 2 - r\beta & 2 - r\gamma & -r\delta \\ 1 - r\beta & s - \tfrac{1}{2} + \bar{b}_1 - r\gamma & -c_1 - r\delta \\ -\beta & -c_1 - \gamma & s - \tfrac{3}{2} - \bar{b}_1 - \delta \end{pmatrix} \quad (49)$$

また $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ はつぎのように定義されている。

$$\alpha = \frac{k'a^3}{(1+r^2)^{3/2}}, \quad \beta = \frac{\pi r k'a^3}{4(1+r^2)^3}, \quad \gamma = \frac{\pi r k'a^3}{2(1+r^2)^3}, \quad \delta = \frac{\pi k'a^3}{2(1+r^2)^3} \tag{50}$$

3次元物体およびリングに働くトルク $\mathbb{G}_1$, $\mathbb{G}_2$ および力 $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_2$ は、A, I, J に対する仮定および (18)～(22)、(47) から

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{G}_1 &= -8\pi k'\mu a^{*3}\left\{\omega_1 - \frac{\pi}{2(1+r^2)^{3/2}}\left(\frac{r\bar{A}}{2} + r\bar{J} + \bar{I}\right)\right\}\mathbb{e}_2 \\ \mathbb{G}_2 &= -4\pi^2\mu l^{*3}\omega_0 \bar{I}\,\mathbb{e}_2 \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{F}_1 &= \frac{8\pi^2\mu a^* l^* \omega_0}{2(1+r^2)^{3/2}}\left\{r\bar{I} - (2+r^2)\bar{J} - \frac{(1+r^2)}{2}\bar{A}\right\}\mathbb{e}_1 \\ \mathbb{F}_2 &= 2\pi^2\mu l^{*2}\omega_0(\bar{A} + 2\bar{J})\mathbb{e}_1 \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

のようになるから、(48)～(50) を用いて、$\mathbb{G}_1, \cdots, \mathbb{F}_2$ を決定することができる。とくに $r=0$、$C_1=0$ のときには、つぎのような簡単な厳密解が得られる。

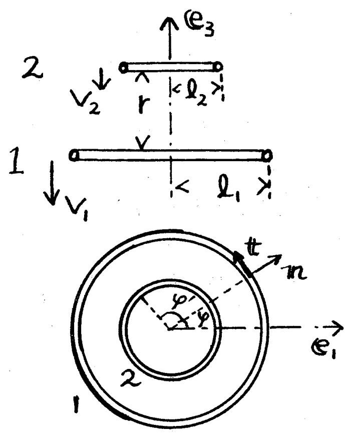
$$\left.\begin{aligned} \mathbb{G}_1 &= -8\pi k'\mu a^{*3}\left\{\omega_1 - \frac{\pi(\omega_2 - \omega_1 k'a^3)}{2(s - \frac{3}{2} - \bar{b}_1(R_1) - \pi k'a^3/2)}\right\}\mathbb{e}_2 \\ \mathbb{G}_2 &= -\frac{4\pi^2\mu l^{*3}\omega_0(\omega_2 - \omega_1 k'a^3)}{s - \frac{3}{2} - \bar{b}_1(R_1) - \pi k'a^3/2}\mathbb{e}_2 \\ \mathbb{F}_1 &= \mathbb{F}_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

(II)　二つの一様なリングの運動

それぞれの断面が一様である二つのリングの運動に対する厳密解を求めるため、(I) の場合と同じような仮定をする。すなわち (1) 二つのリングはリング面に直角な同一の中心軸

をもつ。(2) リング1および2を区別するため、リングi ($i=1, 2$) の物理量にサフィックスiをつける。この他 (I) の仮定 (4) については、l^*をl_i^*でおきかえ、仮定 (3)、(5)、(6) はそのまま成立するものとする。以上の仮定をして、(I) の場合と同様な方法を用いて、以下の四つの場合について厳密解を求める。

Case 5. リング面に直角方向の運動



第9図

第9図の如く、リング1, 2がリングの中心軸方向にV_1, V_2で運動している。従って$\mathbf{U}_{1B} = -V_1\mathbf{e}_3$, $\mathbf{U}_{2B} = -V_2\mathbf{e}_3$である。いま$\mathbf{i}_i = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{j}_i = \mathbf{n}$ $(i=1, 2)$, $\log a_1 = 0$, $\log a_2 = \log a_2^*/b_1^* = const$とおき、さらに$A_i = 0$, $I_i = const$, $J_i = const$ $(i=1, 2)$を仮定して、(26) に代入し

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{K}_{11}(s) &= -2\log 2\, I_1\mathbf{e}_3 + (3-\log 2)J_1\mathbf{n} \\
\mathbf{K}_{22}(s) &= -2\log 2\, I_2\mathbf{e}_3 + (3-\log 2)J_2\mathbf{n} - (I_2\mathbf{e}_3 + J_2\mathbf{n})\log(l_2^*/l_1^*) \\
\mathbf{K}_{21}(s) &= (d_1 I_2 + d_2 J_2)\mathbf{e}_3 + (d_3 I_2 + d_4 J_2)\mathbf{n} \\
\mathbf{K}_{12}(s) &= (e_1 I_1 + e_2 J_1)\mathbf{e}_3 + (e_3 I_1 + e_4 J_1)\mathbf{n}
\end{aligned}\right\} \quad (54)$$

が得られる。ここで$d_1, \cdots d_4$, $e_1 \cdots e_4$は

$$d_1 = l_2 e_1 = -\frac{2l_2}{R_1}\left\{K(k) + \frac{r^2 E(k)}{R_2^2}\right\}, \quad d_2 = l_2 e_3 = -\frac{r}{R_1}\left\{K(k) - \frac{(1+r^2-l_2^2)}{R_2^2}E(k)\right\}$$

$$d_3 = l_2 e_2 = \frac{l_2 r}{R_1}\left\{K(k) + \frac{1-r^2-l_2^2}{R_2^2}E(k)\right\},\quad d_4 = l_2 e_4 = -\frac{r^2}{R_1}\left\{K(k) - \frac{1+r^2+l_2^2}{R_2^2}E(k)\right\} \tag{55}$$
$$R_1 = \sqrt{r^2+(1+l_2)^2},\quad R_2 = \sqrt{r^2+(1-l_2)^2},\quad k^2 = 4l_2/R_1^2$$

で定義され、$K(k)$, $E(k)$ は第1種および第2種の完全楕円積分である。いま (54)、(55) を (27) に代入するとき、I_1, I_2 はつぎのように決定される。

$$I_1 = \frac{\delta_2 V_1 - \delta_1 V_2}{\beta_1\delta_2 - \beta_2\delta_1}\Delta' ,\qquad I_2 = \frac{\beta_1 V_2 - \beta_2 V_1}{\beta_1\delta_2 - \beta_2\delta_1}\Delta' \tag{56}$$

ここで $\beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2, \Delta'$ は

$$\left.\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1\Delta' - c_1(l_1)(c_1(l_1)\alpha_4 + e_3 d_4) - d_2(c_1(l_1)e_4 + e_3\alpha_2)\\
\beta_2 &= -e_1\Delta' - e_2(c_1(l_1)\alpha_4 + e_3 d_4) - c_2(l_2)(c_1(l_1)e_4 + e_3\alpha_2)\\
\delta_1 &= -c_1(l_1)(d_3\alpha_4 + c_2(l_2)d_4) - d_1\Delta' - d_2(d_3 e_4 + c_2(l_2)\alpha_2)\\
\delta_2 &= -e_2(d_3\alpha_4 + c_2(l_2)d_4) + \alpha_3\Delta' - c_2(l_2)(d_3 e_4 + c_2(l_2)\alpha_2)\\
\Delta' &= \alpha_2\alpha_4 - e_4 d_4
\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

で定義され、$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ は次式で与えられる。

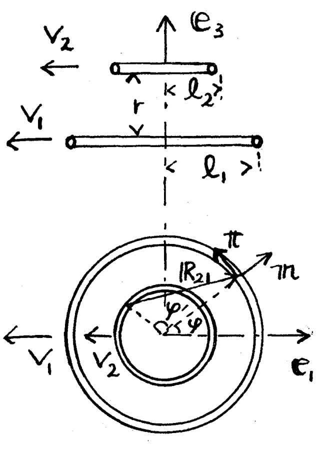
$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1 = \delta_1 + \tfrac{1}{2} - \bar{b}_1(l_1),\quad \alpha_2 = \delta_1 - \tfrac{5}{2} + \bar{b}_1(l_1),\quad \alpha_3 = \delta_2 + \tfrac{1}{2} - \bar{b}_2(l_2),\\
&\alpha_4 = \delta_2 - \tfrac{5}{2} + \bar{b}_2(l_2),\quad \delta_1 = \log 8l_1^*/b_1^*,\quad \delta_2 = \log 8l_2^*/b_2^*
\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

またリング i に働く力 $\mathbb{F}_i$ は A_i, I_i, J_i に対する仮定および (28)、(29) より

$$\mathbb{F}_i = 4\pi\mu V_0 L_i I_i \mathbb{e}_3 \quad (i=1,2) \tag{59}$$

となるから、(55)〜(58) を用いて $\mathbb{F}_i$ を決定できる。

Case 6. リング面に平行方向の運動



第10図

第10図の如く、リング1，2がリング面に平行にV_1, V_2で運動している。従って$\mathbf{U}_{1B} = -V_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{U}_{2B} = -V_2\mathbf{e}_1$である。いま$\mathbf{l}_i = \mathbf{n}$、$\mathbf{j}_i = \mathbf{e}_3$ $(i=1,2)$, $\log a_1 = 0$, $\log a_2 = \mathrm{const}$ とおき、$A_i = -\sin\varphi\,\bar{A}_i$, $I_i = \cos\varphi\,\bar{I}_i$、$J_i = \cos\varphi\,\bar{J}_i$ および $\bar{A}_i$, $\bar{I}_i$, $\bar{J}_i$ はそれぞれ定数を仮定し、(26)に代入して

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{k}_{ii}(s) &= -\sin\varphi\,\mathbf{t}\left\{\bar{A}_i\left(\tfrac{3}{2}-2\log 2\right)-2\bar{I}_i\right\}+\cos\varphi\,\mathbf{n}\left\{\bar{I}_i(1-2\log 2)-\bar{A}_i\right\}+\cos\varphi\,\mathbf{e}_3(2-2\log 2)\bar{J}_i \\
&\quad+\left\{\sin\varphi\,\bar{A}\,\mathbf{t}-\cos\varphi\,(\bar{I}\,\mathbf{n}+\bar{J}\,\mathbf{e}_3)\right\}\log(l_i^*/l_1^*) \\
\mathbf{k}_{21}(s) &= -\sin\varphi\,\mathbf{t}\,(d_{11}\bar{A}_2+d_{12}\bar{I}_2+d_{13}\bar{J}_2)+\cos\varphi\,\mathbf{n}\,(d_{21}\bar{A}_2+d_{22}\bar{I}_2+d_{23}\bar{J}_2)+\cos\varphi\,\mathbf{e}_3(d_{31}\bar{A}_2+d_{32}\bar{I}_2+d_{33}\bar{J}_2) \\
\mathbf{k}_{12}(s) &= -\sin\varphi\,\mathbf{t}\,(e_{11}\bar{A}_1+e_{12}\bar{I}_1+e_{13}\bar{J}_1)+\cos\varphi\,\mathbf{n}\,(e_{21}\bar{A}_1+e_{22}\bar{I}_1+e_{23}\bar{J}_1)+\cos\varphi\,\mathbf{e}_3(e_{31}\bar{A}_1+e_{32}\bar{I}_1+e_{33}\bar{J}_1)
\end{aligned}\right\}\quad(60)$$

が得られる。ここで $d_{11},\cdots,d_{33}$, $e_{11}\cdots e_{33}$ は

$$\left.\begin{aligned}
&d_{11} = -\frac{R_1}{2l_2}\left\{-(1+r^2+l_2^2)E(k)+\left(R_2^2+\frac{4l_2^2}{R_1^2}\right)K(k)\right\},\quad d_{12} = -\frac{R_1}{l_2}\left[(1+r^2)E(k)-\left\{R_2^2+\frac{l_2^2(1-r^2-l_2^2)}{R_1^2}\right\}K(k)\right] \\
&d_{13} = rR_1\left\{E(k)-\frac{1+r^2+l_2^2}{R_2^2}K(k)\right\},\quad d_{21} = \frac{R_1}{2l_2}\left\{-(r^2+l_2^2)E(k)+\left(R_2^2-\frac{1+r^2-l_2^2}{R_1^2}\right)K(k)\right\} \\
&d_{22} = -\left\{\frac{6l_2}{R_1}+\frac{R_1R_2^2}{l_2}-\frac{(1+l_2^2)(1+r^2+l_2^2)}{l_2R_1}\right\}K(k)+\left\{-\frac{R_1(1+r^2+l_2^2)}{l_2}-\frac{2r^2l_2}{R_1R_2^2}+\frac{(1+l_2^2)R_1}{l_2}\right\}E(k) \\
&d_{23} = r\left\{\frac{(r^2+l_2^2)}{R_1}K(k)+\left(\frac{1+r^2-l_2^2}{R_1R_2^2}-R_1\right)E(k)\right\},\quad d_{31} = \frac{rR_1}{2l_2}\left\{\frac{(1+r^2+l_2^2)}{R_1^2}K(k)-E(k)\right\} \\
&d_{32} = \frac{rR_1}{l_2}\left[\left\{1+\frac{l_2^2(1-r^2-l_2^2)}{R_1^2R_2^2}\right\}E(k)-\frac{1+r^2}{R_1^2}K(k)\right],\quad d_{33} = \left[\left\{1-\frac{r^2(1+r^2+l_2^2)}{R_1^2R_2^2}\right\}E(k)-\frac{1+l_2^2}{R_1^2}K(k)\right] \\
&e_{11} = \frac{d_{11}}{l_2},\quad e_{12} = \frac{d_{12}}{l_2}+\frac{(1-l_2^2)R_1}{l_2^2}\left\{E(k)-\frac{(1+r^2+l_2^2)}{R_1^2}K(k)\right\},\quad e_{13} = -\frac{d_{13}}{l_2^2},\quad e_{21} = \frac{d_{21}}{l_2}+\frac{R_1(l_2^2-1)}{2l_2^2}\left\{E(k)\right. \\
&\qquad\left.-\frac{(1+r^2+l_2^2)}{R_1^2}K(k)\right\},\quad e_{22} = \frac{d_{22}}{l_2},\quad e_{23} = -d_{23}+\frac{r(1-l_2^2)}{2}\left\{\left(\frac{4}{R_1R_2^2}+\frac{2R_1}{l_2^2}\right)E(k)-\frac{2R_1(1+r^2+l_2^2)}{l_2^2R_2^2}K(k)\right\}, \\
&e_{31} = -d_{31},\quad e_{32} = -d_{32}+\frac{r(1-l_2^2)}{l_2R_1}\left\{-K(k)+\frac{(1+r^2+l_2^2)}{R_2^2}E(k)\right\},\quad e_{33} = d_{33}/l_2
\end{aligned}\right\}\quad(61)$$

で与えられる。(60), (61) を (27) に代入するとき、$\bar{A}_i, \bar{I}_i, \bar{J}_i$ はつぎのように決定される。

$$\left.\begin{aligned}
\bar{A}_i &= V_1 (A_{j1} + A_{j2}) + V_2 (A_{j4} + A_{j5}) \\
\bar{I}_i &= V_1 (A_{1+j\,1} + A_{1+j\,2}) + V_2 (A_{1+j\,4} + A_{1+j\,5}) \\
\bar{J}_i &= V_1 (A_{2+j\,1} + A_{2+j\,2}) + V_2 (A_{2+j\,4} + A_{2+j\,5})
\end{aligned}\right\} \quad (62)$$

ただし $i=1$ のとき $j=1$, $i=2$ のとき $j=4$ にとる。また A_{ij} は以下に示されるようにマトリックスTの逆マトリックスである。

$$A_{ij} = T^{-1}, \quad T = \begin{pmatrix}
s_1-2 & 2 & 0 & -d_{11} & -d_{12} & -d_{13} \\
1 & s_1-\frac{1}{2}-\bar{b}_1 & -c_1 & -d_{21} & -d_{22} & -d_{23} \\
0 & -c_1 & s_1-\frac{3}{2}+\bar{b}_1 & -d_{31} & -d_{32} & -d_{33} \\
-e_{11} & -e_{12} & -e_{13} & s_2-2 & 2 & 0 \\
-e_{21} & -e_{22} & -e_{23} & 1 & s_2-\frac{1}{2}-\bar{b}_2 & -c_2 \\
-e_{31} & -e_{32} & -e_{33} & 0 & -c_1 & s_2-\frac{3}{2}+\bar{b}_2
\end{pmatrix} \quad (63)$$

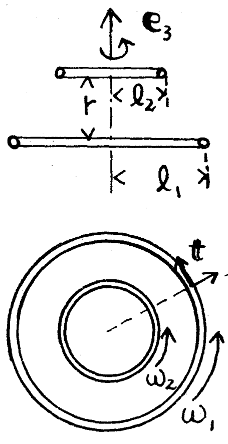
またリング i に働く力 $\mathbb{F}_i$ およびトルク $\mathbb{G}_i$ は A_i, I_i, J_i に対する仮定および (28), (29) を用いて

$$\mathbb{F}_i = \pi\mu V_0 L_i (\bar{A}_i + 2\bar{I}_i)\mathbb{e}_1, \quad \mathbb{G}_i = -\mu V_0 L_i^2 \bar{J}_i \mathbb{e}_2 \quad (64)$$

で与えられるから、(61)～(63) を (64) に代入して、$\mathbb{F}_i, \mathbb{G}_i$ を決定することができる。

Case 7. リング面に直角な軸のまわりの回転

第11図のように、リング1, 2がリングの中心軸のまわりに、それぞれ ω_1, ω_2 の角速度で回転している。従って



第11図

$u_{1B} = \omega_1 t$, $u_{2B} = \omega_2 l_2 t$ である。いま $i_i = n$, $j_i = e_3$ $(i=1,2)$, $\log a_1 = 0$, $\log a_2 = \mathrm{const}$ととり、さらに $A_i = \mathrm{const}$, $T_i = J_i = 0$ を仮定、(26)に代入して、k_{ij} $(i, j = 1, 2)$ がつぎのように在る。

$$\left.\begin{aligned} k_{ii} &= A_i t\left(\tfrac{3}{2} - 2\log 2\right) - A_i t \log l_i^* / l_i^* \quad (i=1,2) \\ k_{21} &= d_1' A_2 t, \quad k_{12} = e_1' A_1 t \end{aligned}\right\} \quad (65)$$

ここで d_1', e_1' は

$$d_1' = R_1 E(k) - \{(1+r^2+l_2^2)/R_1\} K(k), \quad e_1' = d_1'/l_2 \quad (66)$$

であり、R_1, k, $E(k)$, $K(k)$ は(55)で与えられている。上式と(27)より A_1, A_2 が

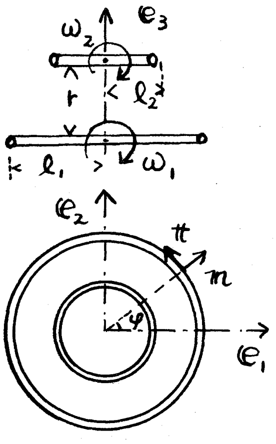
$$A_1 = -\frac{\omega_1\{s_2 - 2 + \omega_2 l_2 d_1'/\omega_1\}}{(s_1-2)(s_2-2) - d_1'^2/l_2}, \quad A_2 = -\frac{l_2\omega_2(s_1 - 2 + \omega_1 d_1'/\omega_2 l_2^2)}{(s_1-2)(s_2-2) - d_1'^2/l_2} \quad (67)$$

のように決定される。またリング1および2に働くトルク G_1, G_2 は(28)、(29)を用いてつぎのように在る。

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= -\frac{4\pi^2 \mu l_1^{*3} \omega_0 \{\omega_1 + \omega_2 l_2 d_1'/(s_2-2)\}}{s_1 - 2 - d_1'^2/l_2(s_2-2)} t \\ G_2 &= -\frac{4\pi^2 \mu l_2^{*3} \omega_0 \{\omega_2 + \omega_1 d_1'/l_2^2(s_1-2)\}}{s_2 - 2 - d_1'^2/l_2(s_1-2)} t \end{aligned}\right\} \quad (68)$$

Case 8. リング面に平行な軸のまわりの回転

第12図のようにリング1, 2がリング面に平行な軸のま



第12図

わりに、それぞれ ω_1, ω_2 の角速度で回転している。従って $\mathbf{v}_{1B} = -\cos\varphi\,\omega_1\mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}_{2B} = -\cos\varphi\, l_2\omega_2\mathbf{e}_3$ である。いま $\mathbf{l}_i = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{g}_i = \mathbf{n}$, $\log a_1 = 0$, $\log a_2 = \mathrm{const}$ ととり、さらに $A_i = -\sin\varphi\,\bar{A}_i$, $I_i = \cos\varphi\,\bar{I}_i$, $J_i = \cos\varphi\,\bar{J}_i$ および $\bar{A}_i$, $\bar{I}_i$, $\bar{J}_i$ は定数を仮定して、(26) より $\mathbb{K}_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ がつぎのように求められる。

$$\left.\begin{aligned}
\mathbb{K}_{ii}(\mathbf{s}) &= -\sin\varphi\,\mathbf{t}\left\{\bar{A}_i\left(\tfrac{3}{2} - 2\log 2\right) - 2\bar{J}_i\right\} + \cos\varphi\,\mathbf{n}\left\{\bar{J}_i(1 - 2\log 2) - \bar{A}_i\right\} + \cos\varphi\,\mathbf{e}_3\,\bar{I}_i\left(2 - 2\log 2\right) \\
&\qquad + \left\{\sin\varphi\,\bar{A}_i\mathbf{t} - \cos\varphi\left(\bar{I}_i\mathbf{e}_3 + \bar{J}_i\mathbf{n}\right)\right\}\log\left(l_i^*/l_1^*\right) \\
\mathbb{K}_{21}(\mathbf{s}) &= -\sin\varphi\,\mathbf{t}\left(d_{11}\bar{A}_2 + d_{12}\bar{J}_2 + d_{13}\bar{I}_2\right) + \cos\varphi\,\mathbf{n}\left(d_{21}\bar{A}_2 + d_{22}\bar{J}_2 + d_{23}\bar{I}_2\right) + \cos\varphi\,\mathbf{e}_3\left(d_{31}\bar{A}_2 + d_{32}\bar{J}_2 + d_{33}\bar{I}_2\right) \\
\mathbb{K}_{12}(\mathbf{s}) &= -\sin\varphi\,\mathbf{t}\left(e_{11}\bar{A}_1 + e_{12}\bar{J}_1 + e_{13}\bar{I}_1\right) + \cos\varphi\,\mathbf{n}\left(e_{21}\bar{A}_1 + e_{22}\bar{J}_1 + e_{23}\bar{I}_1\right) + \cos\varphi\,\mathbf{e}_3\left(e_{31}\bar{A}_1 + e_{32}\bar{J}_1 + e_{33}\bar{I}_1\right)
\end{aligned}\right\} \quad (69)$$

ここで $d_{11}, \cdots, d_{33}$, $e_{11}, \cdots, e_{33}$ は (61) で与えられている値である。(61)、(69) を (27) に代入して、$\bar{A}_i$, $\bar{I}_i$, $\bar{J}_i$ はつぎの如く決定される。

$$\left.\begin{aligned}
\bar{A}_i &= -A_{j\,3}\,\omega_1 - A_{j\,6}\,l_2\omega_2 \\
\bar{J}_i &= -A_{1+j\,3}\,\omega_1 - A_{1+j\,6}\,l_2\omega_2 \\
\bar{I}_i &= -A_{2+j\,3}\,\omega_1 - A_{2+j\,6}\,l_2\omega_2
\end{aligned}\right\} \quad (70)$$

ただし $i = 1$ のとき $j = 1$ 、$i = 2$ のとき $j = 4$ にとる。また A_{ij} はつぎに示されるようにマトリックス T の逆マトリックスである。

$$A_{ij} = T^{-1}, \quad T = \begin{pmatrix} s_1-2 & 2 & 0 & -d_{11} & -d_{12} & -d_{13} \\ 1 & s_1-\frac{1}{2}+\bar{b}_1 & -c_1 & -d_{21} & -d_{22} & -d_{23} \\ 0 & -c_1 & s_1-\frac{3}{2}-\bar{b}_1 & -d_{31} & -d_{32} & -d_{33} \\ -e_{11} & -e_{12} & -e_{13} & s_2-2 & 2 & 0 \\ -e_{21} & -e_{22} & -e_{23} & 1 & s_2-\frac{1}{2}+\bar{b}_2 & -c_2 \\ -e_{31} & -e_{32} & -e_{33} & 0 & -c_2 & s_2-\frac{3}{2}-\bar{b}_2 \end{pmatrix} \tag{71}$$

またリング i に働く力およびトルク $\mathbb{F}_i$ および $\mathbb{G}_{T_i}$ は、A_i, I_i, J_i に対する仮定および (28)、(29) より

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{G}_{T_i} &= -4\pi^2 \mu\, l_i^* l_i^{*2}\, \omega_0\, \bar{I}_i\, \mathbf{e}_2 \\ \mathbb{F}_i &= 2\pi^2 \mu\, l_i^* l_i^*\, \omega_0 \left(\bar{A}_i + 2\bar{J}_i\right) \mathbf{e}_1 \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

となるから、(70)、(71) を (72) に代入することによって、$\mathbb{G}_{T_i}$、$\mathbb{F}_i$ は決定できる。

§4. 2物体の運動による干渉効果

(I) 3次元物体とリングの運動による干渉効果

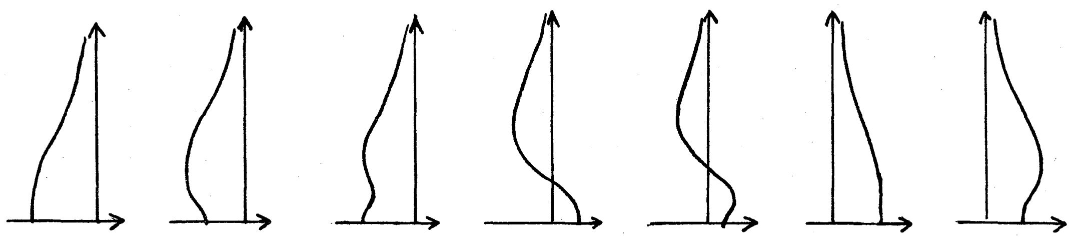
$\mathbb{X}_i$ で3次元物体 ($i=1$) とリング ($i=2$) に働く力またはトルクを、$\mathbb{X}_{i0}$ で各物体が単独に運動しているときに働く力またはトルクを表わして、

$$\mathbb{X}_i = \mathbb{X}_{i0}\,(1+\Delta_i) \tag{73}$$

とおいて、Δ_i または $\mathbb{X}_{i0}\Delta_i$ で2物体の干渉効果を表わすことができる。

本節では §3 の厳密解から $O(1/s^2)$ を省略した式を用いて、

§3 の Case 1 ~ Case 4 について Δ_i の特性の概要を調べる。このとき r の変化に対する Δ_i の変化の様子は定性的に第13図 (a)~(g) に図示されるパターンを示す。ここで横軸は Δ_i を縦軸は r を示す。



第13図（横軸は Δ_i、縦軸は r を示す）

Case 1. : $\mathbb{X}_i$ を $\mathbb{e}_3$ 方向に働く力 $\mathbb{F}_i$ にとり、$\delta = kaV_1/V_2$ とするとき

$$\Delta_1 = -\frac{\pi V_2}{\delta V_1}\left\{\frac{1+2r^2}{(1+r^2)^{3/2}} - \frac{\delta(1+4r^2)}{(1+r^2)^2}\right\}, \qquad \Delta_2 = -\delta\frac{(1+2r^2)}{(1+r^2)^{3/2}} \tag{74}$$

が得られる。r の変化に対する Δ_1, Δ_2 の変化が第13図のどのパターンに属するかということと、Δ_1, Δ_2 が極値をとる r の値が表1に示されている。ただし表1には、$V_1 = 0$ または $V_2 = 0$ のときは含まれない。$V_1 = 0$, $V_2 > 0$ のときには、$\mathbb{X}_1$, Δ_1 が3次元物体に対する干渉効果を表わし、パターンは (b) 型である。またこのとき

表 1

	$\Delta_1 \Big/ \frac{\pi V_2}{\delta V_1}$			Δ_2/δ
δ	$< \frac{1}{4}$	$> \frac{1}{4}, < 1$	> 1	任意
第13図の型	(b)	(c)	(e)	(b)
極値をとる r の値	$0, \frac{1}{\sqrt{2}}$	$0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{(4\delta)^2-1}$		$0, \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Delta_2 = 0$ となり、リングの干渉効果は $O(1/\delta)$ で現われなく $O(1/\delta^2)$ で現われることが分る。$V_2 = 0$, $V_1 > 0$ のときには、$\mathbb{X}_{20}\Delta_2$ がリングに対する干渉効果を表わし、パターンは (b) 型で、また一方 Δ_1 のパターンは (g) 型である。以上の場合いずれも極値をとる r の値は 0 および $1/\sqrt{2}$ である。V_1 または V_2 が符号を変えたときには干渉効果も符号を変えると考えればよい。

Case 2. ： $\mathbb{X}_i$ を $\mathbb{e}_1$ 方向に働く力 $\mathbb{F}_i$ にとり、$\delta = kaV_1/V_2$ とするとき、

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= -\frac{\pi}{\delta}\frac{V_2}{V_1}\left\{\frac{1}{4}\frac{(5+3r^2)}{(1+r^2)^{3/2}} - \frac{3}{4}\frac{\delta(3+r^2)}{(1+r^2)^2}\right\}, \\ \Delta_2 &= -\frac{\delta}{3}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+r^2}} + \frac{3+2r^2}{(1+r^2)^{3/2}}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (75)$$

となる。r の変化に対する Δ_1, Δ_2 の変化の様子および Δ_1, Δ_2 が極値をとる r の値を表2に示す。$V_1 = 0$ または $V_2 = 0$ の場合は、Case 1 のときと同様なコメントが成立する。ただし Case 1. での (b) 型、(g) 型をそれぞれ (a) 型、(f) 型でおきかえればよい。

表 2

	$\Delta_1 \Big/ \frac{\pi V_2}{\delta V_1}$			Δ_2/δ
δ	< 0.3	> 0.3, $< \frac{5}{9}$	$> \frac{5}{9}$	任意
第13図の型	(a)	(b)	(d)	(a)
極値をとる r の値	0	0, $\frac{(3+r^2)(1+r^2)^{\frac{1}{2}}}{(5+r^2)} = \frac{2\delta}{9}$		0

つぎに $\mathbb{e}_2$ 方向のトルク $\mathbb{G}_1$, $\mathbb{G}_2$ について考えて見よう。

(38) の $\mathbb{G}_1$, $\mathbb{G}_2$ は $O(1/\delta^2)$ を省略して

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{G}_1 &= \frac{6\pi^2\mu K' V_2^* a^{*3} r}{s(1+r^2)^{3/2}}(1-M)\mathbb{e}_2, \quad M = \frac{KaV_1(4+3r^2)}{3V_2(1+r^2)^{3/2}} \\ \mathbb{G}_2 &= -\frac{\mu K V_1^* a^* L^2 r}{s(1+r^2)^{3/2}}\mathbb{e}_2\end{aligned}\right\} \quad (76)$$

となる。いま2軸方向のトルクが正のとき＋、負のとき－で表示すれば、3次元物体およびリングに働くトルクの方向は(76)より表3のようになる。とくに$V_2 \to 0$, $V_1 > 0$のときの

表　3

3次元物体に働くトルクの方向						リングに働くトルクの方向	
$V_2^* > 0$		$V_2^* = 0$		$V_2^* < 0$		$V_1^* > 0$	$V_1^* < 0$
$M < 1$	$M > 1$	$V_1 < 0$	$V_1 > 0$	$M < 1$	$M > 1$		
＋	－	＋	－	－	＋	－	＋

トルクの方向は、－となるから、一枚の無限平板の壁に平行に球が進むときに受けるトルクの方向と一致することを注意しておく。

Case 1. と Case 2. すなわちリング面に垂直に動くときと平行に動くときを比較して、① リング面に平行に動く場合の方が変化が単調である。② $r=0$ での干渉効果は一般に平行に動くときの方が大である。③ $r \gg 1$ での干渉効果はリング面に直角に動くときの方が大であることなどが分る。

Case 3. ： $\mathbb{X}_i$を$\mathbb{e}_3$方向のトルク$\mathbb{G}_i$にとり、$\delta = K'a^3\omega_1/\omega_2$とするとき

$$\Delta_1 = -\frac{1}{2}\frac{\pi\omega_2}{\delta\omega_1}\left\{\frac{1}{(1+r^2)^{3/2}} - \frac{\delta}{(1+r^2)^3}\right\}, \quad \Delta_2 = -\frac{\delta}{(1+r^2)^{3/2}} \tag{77}$$

が得られる。rの変化に対するΔ_1, Δ_2の変化の様子およびΔ_1, Δ_2が極値をとるrの値を表4に示す。$\omega_1=0$または$\omega_2=0$の場合は、Case 2の$V_1=0$または$V_2=0$のときと同様なコメントが成立する。

表 4

	$\Delta_1 \big/ \frac{\pi\omega_2}{\delta\omega_1}$			Δ_2/δ
δ	$<\frac{1}{2}$	$>\frac{1}{2}$, <1	>1	任意
第13図の型	(a)	(b)	(d)	(a)
極値をとるrの値	0	0, $\sqrt{(2\delta)^{2/3}-1}$		0

Case 4. : X_iを$\mathbb{e}_2$方向のトルクG_iにとり、δをCase 3.のように定義して

$$\Delta_1 = -\frac{\pi\omega_2}{2\delta\omega_1}\left\{\frac{1}{(1+r^2)^{3/2}} - \frac{\delta(2+3r^2)}{2(1+r^2)^3}\right\}, \quad \Delta_2 = -\frac{\delta}{(1+r^2)^{3/2}} \tag{78}$$

が成立する。rの変化に対するΔ_1、Δ_2の変化の様子およびΔ_1、Δ_2が極値をとるrの値を表5に示す。$\omega_1=0$または$\omega_2=0$の場合はCase 3と同じコメントが成立する。

表 5

	$\Delta_1 \big/ \frac{\pi\omega_2}{\delta\omega_1}$			Δ_2/δ
δ	<0.919	>0.919, <1	>1	任意
第13図の型	(a)	(c)	(d)	(a)
極値をとるrの値	0	0, $\frac{(1+r^2)^{3/2}}{(1+2r^2)}=\delta$		0

つぎに$\mathbb{e}_1$方向に働く力F_1, F_2の振舞を見よう。(48)のF_1, F_2は$O(1/\delta^2)$を省略して

$$\mathbb{F}_1 = \frac{8\pi^2 \mu a^* l^* \omega_2^* r}{2\delta(1+r^2)^{3/2}} \left\{ 1 + \frac{3\delta}{2(1+r^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} \mathbb{e}_1 \quad , \quad \mathbb{F}_2 = -\frac{3\pi\mu L \omega_1^* K' a^3}{\delta} \frac{r}{(1+r^2)^{3/2}} \mathbb{e}_1 \tag{79}$$

となり、これら力の方向は(79)を用いて、容易に分る。

直進および回転の場合を比較して、一般に回転運動の方が干渉効果は小さい。とくに $r \gg 1$ の場合、直進運動では力は $1/r$ で、トルクは $1/r^2$ で減衰するが、回転ではトルクは $1/r^3$、力は $1/r^2$ で減衰する。

(II) 二つのリングの運動による干渉効果

(i) 直進運動(Case 5, 6)の場合

干渉効果を見るため、(73)の代りに、リング1, 2に働く力 $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2$ を

$$\mathbb{F}_1 = \mathbb{F}_{10}\{1 + (V_2/\delta V_1)\Delta_1\} \quad , \quad \mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_{20}\{1 + (V_1/\delta_1 V_2)\Delta_2\} \tag{80}$$

の如く表わし、同効果の概要を知るため $O(1/\delta^3)$ を省略して考える。このとき

$$\Delta_1 l_1^* = \Delta_2 l_2^* \tag{81}$$

が成立する。Δ_1 はリング面に直角な運動に対し、

$$\Delta_1 = -(2l_2/R_1)\{K(k) + r^2 E(k)/R_2^2\} \tag{82}$$

で与えられ、リング面に平行な運動に対しては、

$$\Delta_1 = \frac{1}{6l_2}\left[\left\{\frac{8l_2^2 r^2}{R_1 R_2^2} + (r^2 - 1 - l_2^2)R_1\right\}E(k) - \left\{R_1 R_2^2 - \frac{2(1-8l_2^2+l_2^4)+2r^2(1+l_2^2)}{R_1}\right\}K(k)\right] \tag{83}$$

で与えられる。ただし R_1, R_2, k は(55)で与えられている。

r の変化に対する Δ_1 の変化は(82)が第13図(b)型に、(83)

が (a) 型に属し、極値をとる r の値は、前者では $r=0$ および $\{2r^2(1/R_1^2+1/R_2^2)-1\}E(k)-(r^2/R_1^2)K(k)=0$ をみたす値、後者では $r=0$ である。

つぎに (64) で表示された $\mathbb{e}_2$ 方向のトルク $\mathbb{G}_1,\ \mathbb{G}_2$ は $O(1/\delta^3)$ を省略して、

$$\left.\begin{aligned}
\mathbb{G}_1 &= -\mu V_2^* L_1^2\,\frac{r(1+r^2-l_2^2)}{2\delta_1\delta_2 l_2 R_1}\left\{\frac{1+r^2+l_2^2}{R_2^2}E(k)-K(k)\right\}\mathbb{e}_2\\
\mathbb{G}_2 &= -\mu V_1^* L_2^2\,\frac{r(1-r^2-l_2^2)}{2\delta_1\delta_2 l_2 R_1}\left\{\frac{1+r^2+l_2^2}{R_2^2}E(k)-K(k)\right\}\mathbb{e}_2
\end{aligned}\right\}\quad(84)$$

のように得られる。いま $l_2\leq 1$ を仮定しても一般性を失わないから、$l_2\leq 1$ を仮定する。このときトルクの方向が $\mathbb{e}_2$ 方向のときは +、$-\mathbb{e}_2$ 方向のときは − で表示すれば、$\mathbb{G}_1$, $\mathbb{G}_2$ の方向に対して表 6 の関係が得られる。

表 6

$\mathbb{G}_1$ の方向	$V_2^*>0$		$V_2^*<0$	
	−		+	
$\mathbb{G}_2$ の方向	$V_1^*>0$		$V_1^*<0$	
	$r<\sqrt{1-l_2^2}$	$r>\sqrt{1-l_2^2}$	$r<\sqrt{1-l_2^2}$	$r>\sqrt{1-l_2^2}$
	−	+	+	−

さらに §4. (I) の Case 2. の所で、Case1. と Case 2. を比較して述べられたコメント①～③は、Case 5, 6 を比較した場合も同様に成立する。また干渉の様子は二つのリングの干渉の方が、3次元物体とリングの干渉よりも単調である。

(ii) 回転運動 (Case 7, 8) の場合

(80) の代りに、リング 1 および 2 に働くトルク $\mathbb{G}_1$, $\mathbb{G}_2$ を

$$\mathbb{G}_1 = \mathbb{G}_{10}\{1+(\omega_2/s_2\omega_1)\Delta_1\}, \qquad \mathbb{G}_2 = \mathbb{G}_{20}\{1+(\omega_1/s_2\omega_2)\Delta_2\} \tag{85}$$

の如く表示して、(i)の場合と同様に $O(1/s^3)$ を省略して干渉現象を調べる。このとき

$$\Delta_1 l_1^{*3} = \Delta_2 l_2^{*3} \tag{86}$$

が成立する。Δ_1 はリング面に直角な軸のまわりの回転では

$$\Delta_1 = l_2\left[R_1 E(k) - \{(1+r^2+l_2^2)/R_1\} K(k)\right] \tag{87}$$

で与えられ、リング面に平行な軸のまわりの回転では

$$\Delta_1 = l_2\left[\{R_1 - r^2(1+r^2+l_2^2)/R_1R_2^2\} E(k) - \{(1+l_2^2)/R_1\} K(k)\right], \tag{88}$$

で与えられる。r の変化に対する Δ_1 の変化は (87) が第13図の (a) 型に、(88) が同図の (b) 型に属する。Δ_1 の極値をとる r の値は、(87) のときは $r=0$ で、(88) のときは $r=0$ および

$$\{r^2+(1-l_2^2)^2/(1+l_2^2)\}K(k) - \{r^4+2r^2(1-6l_2^2+l_2^4)/(1+l_2^2)+(1-l_2^2)^2\}(E(k)/R_2^2) = 0$$

をみたす r の値である。

つぎに (72) で表示された $\mathbb{e}_1$ 方向に働く力 $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_2$ は $O(1/s^3)$ を省略して

$$\left.\begin{aligned}
\mathbb{F}_1 &= \frac{2\pi^3\mu l_1^* l_2^* \omega_2^*}{s_1 s_2}\left[r\left\{\frac{2(1+r^2-l_2^2)}{R_1R_2^2} - R_1\right\}E(k) + \frac{r(r^2+l_2^2-1)}{R_1}K(k)\right]\mathbb{e}_1\\
\mathbb{F}_2 &= \frac{2\pi^2\mu l_1^* l_2^* \omega_1^*}{s_1 s_2}\left[r\left\{\frac{R_1}{l_2^2} + \frac{2(1-r^2-l_2^2)}{R_1R_2^2}\right\}E(k) - \frac{r(1+r^2-l_2^2)}{l_2^2 R_1}K(k)\right]\mathbb{e}_1
\end{aligned}\right\} \tag{89}$$

のようになる。さて r の変化に対する (89) の大括弧内の変化は、$l_2=0.5$ の場合、$\mathbb{F}_1$ では第13図 (e) 型に、$\mathbb{F}_2$ では (g) 型に属する。ただし $r=0$ のときには $\mathbb{F}_1=\mathbb{F}_2=0$ となる。

§5. まとめ

§1.で述べられた仮定1.〜5.のもとに、§2.で3次元物体と細長い物体または二つの細長い物体が運動しているときの流れを支配する積分方程式が導出された。上記の仮定では、二つの細長い物体が運動する場合には二物体が十分接近していても、両者の間隔$l^{*\prime}$が細長い物体の断面の代表的大きさb^*に比べて十分大きければよかった。しかし3次元物体と細長い物体が運動する場合には、両者の間隔$l^{*\prime}$が3次元物体の代表的大きさa^*と比較して十分大きいと仮定し、3次元物体によって生ずる流れをストークス源による流れでおきかえた。

従って3次元物体と細長い物体が接近するとき、この様な方法で解かれた解にどのような誤差が含まれるかが問題になる。§3で述べられているように球がリング面に直角に運動するような特別の場合には、このような誤差をチェックすることができる。この様なチェックによれば§2.で導出された積分方程式の解は、両者が可成り近づいたときでも有効であることが期待できる。

2物体間の相互位置関係については上記の仮定を除いて別に制限はないことおよび物体の形に対する仮定が少いことなどを考慮して、これら積分方程式は広範囲の問題に対し有用であると考えられる。いま2物体相互間の位置関係が一般的

である場合には、通常これら積分方程式は $\varepsilon\left(=\left[\log\frac{l^*}{b^*}\right]^{-1}\right)$ による展開法で解かれることになる。しかし2物体相互間の位置関係が特別な場合には、§3. で示されているようにこれら積分方程式の厳密解が容易に求まり、精度のよい解が得られる。

物体がこの様な位置関係にあるときには、一般に n 個 ($n \geq 2$) の物体が運動しているときにも厳密解の存在が予想される。またこのような解がどの程度の複雑さになるかについては、§3. の方法を拡張して考えれば容易に判断される。

§3. で得られた厳密解から二つの物体の干渉効果を調べることができるが、この厳密解は比較的簡単な解（Case 3, Case 7 など）から相当複雑な解（Case 6, Case 8 など）まで含まれているから、厳密解をそのまま用いて干渉効果を調べることは可成り繁雑である。従ってこれら干渉効果の特性の概要を比較的簡単に見るために、厳密解から ε についての高次の項を省略した式を使用する。すなわち §4. では、3次元物体とリングの運動では $O(\varepsilon^2)$ を、また二つのリング運動では $O(\varepsilon^3)$ を厳密解から省略した式を用いて干渉効果が調べられた。その特性をまとめるとつぎのようになる。

(i) リング面に平行に動く場合とリング面に直角に動く場合の干渉効果を比較するとき、3次元物体とリングあるいは二つのリングいずれの場合も、両物体が接近しているときの干

渉効果はリング面に平行に動くときの方が大で、また両物体が離れているときの干渉効果はリング面に直角に動くときの方が大きい。

(ii) 回転運動の場合の干渉効果では、リング面に直角な軸のまわりを回転するか、あるいはリング面に平行な軸のまわりを回転するかによって生ずる相違はあまり現われない。

(iii) 干渉の様子は、直進運動および回転運動を通じ3次元物体とリングの干渉の方が、二つのリングの干渉よりも複雑である。

(iv) 物体間の距離が十分離れているときの干渉効果にはつぎのような特徴がある。直進運動の場合には、3次元物体およびリングまたは二つのリングの中心にそれぞれ一つのストークス源があるとして計算したときの干渉効果と同一となる。しかし回転運動の場合には、やや複雑である。すなわちリング面に直角な軸のまわりに回転する場合には、それぞれの物体の中心に一つの二重ストークス源(球の回転のときに現われる二重ストークス源)があるとして取扱った場合と同等であるが、リング面に平行な軸のまわりを回転する場合には両者は同等でない。

(v) 直進運動と回転運動を比較して、干渉効果は回転運動の方が小さい。とくに物体間の距離が十分離れているときには、

つぎのような特徴がある。直進運動の場合の物体に働く力に対する干渉効果は $1/r$ で減少するが、一方回転運動の場合の物体に働くトルクに対する干渉効果は $1/r^3$ で減少する。

文　献

(1) N. J. Menstre + D. F. Katz : J. Fluid Mech. 64 (1974), 817

(2) 成瀬文雄：物理学会第32回年会予稿集 4, 3 (1977)

(3) 成瀬文雄：京都大学数理解析研究所講究録 302 (1977), 58

(4) 成瀬文雄：京都大学数理解析研究所講究録 335 (1978), 42

(5) 成瀬文雄：京都大学数理解析研究所講究録 234 (1975), 4

(6) 成瀬文雄：物理学会秋の分科会講演予稿集 4, 21 (1978)