数理解析研究所講究録
第 361 巻 1979 年 1-8



# ある種のP-凸領域

東大 理　　中根静男

定数係数線型偏微分作用素 $P(D)$ が、$(D_{n+1},\cdots,D_{n+k})$ を含まないとき、$\mathbb{R}^{n+k}$ における領域 $\Omega$ の P-convexity を幾何学的に特徴付けることを目標にする。

一般に、$\mathbb{R}^n$ の領域 $\Omega$ が P-convex とは、

$\forall K$ : compact in $\Omega$ に対し、$\exists K'$ : compact in $\Omega$, such that

$u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, $\operatorname{supp} P(-D)u \subset K \Rightarrow \operatorname{supp} u \subset K'$

が成り立つことである。この概念が重要なのは、Malgrange [3] による、次の性質にある。

$P(D)u=f$ が $\forall f \in C^\infty(\Omega)$ に対し解 $u \in C^\infty(\Omega)$ を持つ

$\Leftrightarrow$ $\Omega$ が P-convex。

開凸集合が P-convex であることはよく知られているが、P-convex set の完全な特徴付けは、次の場合にしかわかっていない。

1) P が elliptic　　( Hörmander [1] )

2) $n=2$ （Hörmander [1]）

3) $P$が1階 （Zachmanoglou [10]）

4) $n=3$，$P$はprincipal type（i.e. $P_m(\xi)=0 \Rightarrow \operatorname{grad} P_m(\xi)\neq 0$）

かつ $\partial\Omega$は$C^2$ （Persson [8]）

5) $P(D)=D_1D_2+\frac{1}{2}\sum_{j=3}^{n}D_j^2$，$\partial\Omega$は$C^2$ （Persson [9]）

ここでは，主に上の場合のような作用素をとり上げ，それらを$\mathbb{R}^{n+k}$の作用素とみなす。つまり，$(D_{n+1},\cdots,D_{n+k})$に依らぬ。

## §1 一般的な結果

まず，Persson [5]にそってuniqueness coneを定義する。

定義1 $M$：proper open convex cone in $\mathbb{R}^n$，vertex $0$

と$y\in\mathbb{R}^n$に対し，

$$K(M,y)=\{x\in\mathbb{R}^n;\ \langle x-y,\xi\rangle\leq 0\quad \forall\xi\in M\}$$

とおく。また，$N\in M$，$0<\rho\leq\infty$に対し，

$$K(N,M,y,\rho)=\{x\in K(M,y);\ \langle x-y,N\rangle\geq-\rho\}$$

とおく。$M\subset\{\xi\in\mathbb{R}^n;\ P_m(\xi)\neq 0\}$のとき，$K(N,M,y,\rho)$を$y$での$P$のuniqueness coneという。

すると，Persson [5]により，次を得る。

補題1 $K(N,M,y,\rho)\subset\Omega$を$P$のuniqueness coneとする。

$u\in\mathcal{D}'(\Omega)$が，

$$P(-D)u=0\quad \text{near } K(N,M,y,\rho)$$

$$u=0 \quad \text{near } K(N,M,y,p)\cap\{x;\ \langle x-y,N\rangle=-p\} \qquad (1)$$

を満たせば、

$$u=0 \quad \text{in Int } K(N,M,y,p)$$

(ここでは、(1)の集合をconeの底ということにする。)

証明はHolmgrenの一意性定理から従う。この補題は、$P(-D)u=0$ のdistribution解の零点が、Pのuniqueness coneに沿って伝播することを示している。特にPがellipticのときは、Mをいくらでも開半空間に近づけられるので、Pのuniqueness coneは、線分又は半直線にいくらでも近づけられる。故に、解の零点は、任意の折線に沿って伝わる。これは、Pがellipticのとき、任意の開集合がP-convexになることの別証明を与える。なお、Holmgrenの定理はhyperfunctionでも成り立つので、この補題と、以下の零点の伝播に関する結果はhyperfunctionでも正しい。

さて、conesのchainを、conesの有限集合$\{K_i\}$で、各$K_i$の底は$K_{i-1}$に含まれるものと定義する。

<u>定義2</u>　K : compact in $\Omega$ に対し、

$$\hat{K}(P,\Omega)=K\cup\{x\in\Omega\setminus K;\ x\text{は}K^c\text{内のP}のuniqueness cones\text{の}$$
$$\text{chainでは}\Omega^c\text{又は}\infty\text{とは結べない。}\}$$

とおき、KのΩにおけるweak P-hullと呼ぶ。

特にPがellipticなら、$\hat{K}(P,\Omega)$ はKとΩで相対compactな$K^c$

のすべての連結成分の和集合である。次の補題は補題1からすぐ出る。

<u>補題2</u>　$K$ : compact in $\Omega$ とすると、$u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ に対し、

$$\operatorname{supp} P(-D)u \subset K \Rightarrow \operatorname{supp} u \subset \hat{K}(P, \Omega)$$

すると、P-convexityのひとつの十分条件を与えることができる。

<u>定理1</u>　任意の $K$ : compact in $\Omega$ に対し：$\hat{K}(P, \Omega)$ が compact in $\Omega$

$\Rightarrow$ $\Omega$ は P-convex.

実は、先に上げた1)〜5)の場合は、この十分条件が必要条件にもなっている。即ち、これらの場合、

$$\Omega : \text{P-convex} \Leftrightarrow \hat{K}(P, \Omega) : \text{compact in } \Omega \text{ for all } K : \text{compact in } \Omega \qquad (2)$$

§2　Pが一部の変数を含まない場合

以後、$\mathbb{R}^{n+k}$ 上の作用素 $P(D)$ で、$(D_{n+1}, \cdots, D_{n+k})$ を含まないものを考える。即ち、P は $\mathbb{R}^n$ 上の作用素でもある。混乱を避けるために、P を $\mathbb{R}^n$ 上の作用素とみなすときは $P'$ と書く。そして $\mathbb{R}^{n+k}$ の領域 $\Omega$ の P-convexity を調べる。

$$\mathbb{R}^{n+k} \ni x = (x', x'') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$$

$$a \in \mathbb{R}^k, \ \Omega \subset \mathbb{R}^{n+k} \text{ に対し、} \Omega_a = \{x \in \Omega ; x'' = a\}$$

と書くことにする。まず、P-convexity のひとつの必要条件を与える。以下の議論で $\Omega_a$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合ともみなしている。

<u>定理2</u>　$\Omega$ : P-convex $\Rightarrow$ $\forall a \in \mathbb{R}^k$ に対し，$\Omega_a$ は $P'$-convex

<u>証明</u>　或る $a \in \mathbb{R}^k$ に対し，$\Omega_a$ が $P'$-convex でないとすると，$\Omega_a$ の compact set $K_a$ と，$\mathcal{E}'(\Omega_a)$ の列 $\{u_j(x')\}$ があって，

$$\operatorname{supp} P'(-D')u_j \subset K_a \quad かつ \quad \operatorname{dist}(\operatorname{supp} u_j, \Omega_a^c) \to 0 \quad (j \to \infty)$$

そこで，

$$v_j(x) = u_j(x')\,\delta(x''-a)$$

とおくと，$v_j \in \mathcal{E}'(\Omega)$ で，

$$\operatorname{supp} P(-D)v_j \subset K_a \quad かつ \quad \operatorname{dist}(\operatorname{supp} v_j, \Omega^c) \to 0 \quad (j \to \infty)$$

故に $\Omega$ は P convex でない。//

この条件は十分条件ではない。反例は，例えば $P'$ が $\mathbb{R}^n$ で elliptic のときである。しかし，$P'$ が $\mathbb{R}^n$ で(2)を満たしているならば，P-convexity のひとつの十分条件を与えることができる。

<u>定理3</u>　$P'$ が $\mathbb{R}^n$ で(2)を満たすとき，

任意の $a \in \mathbb{R}^k$ に対し，$\Omega_a$ が $P'$-convex かつ $\bigcup_a \hat{K}_a(P', \Omega_a)$ が compact in $\Omega$

$\Rightarrow$ $\Omega$ : P-convex

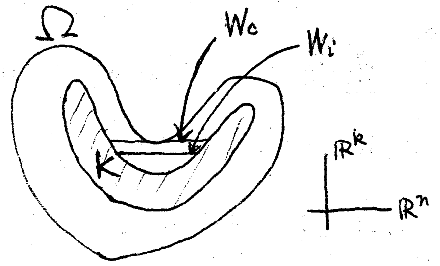
<u>証明</u>　までの P の uniqueness cone は，$x''=y''$ 上の $P'$ の $y'$ での uniqueness cone にいくらでも近づけられる。これは，P が $(D_{n+1}, \ldots D_{n+k})$ を含まないことから容易にわかる。即ち，P の uniqueness cone は $\mathbb{R}^k$ 方向にはつぶれていて，$\mathbb{R}^n$ に平行とみなしてよい。故に $\hat{K}(P, \Omega)$ は $\bigcup_a \hat{K}_a(P', \Omega_a)$ に含まれ，仮定より compact in $\Omega$。よって，定理1より $\Omega$ は P-convex。//

特に$P'$が$\mathbb{R}^n$でellipticなら、定理3の条件は必要条件にもなっている。故に、この場合は、P-convexityの完全な特徴付けができたことになる。

<u>定理4</u>　$P'$は$\mathbb{R}^n$でellipticとするとき、

$\Omega$：P-convex $\Longleftrightarrow$ $\forall K$：compact in $\Omega$に対し、$\bigcup_a \hat{K}_a(P', \Omega_a)$はcompact in $\Omega$

<u>証明</u>　Zachmanoglou [10]の定理4の証明の若干の変形である。必要性を示せばよい。或るcompactな$K$に対し$\bigcup_a \hat{K}_a(P', \Omega_a)$がcompactでないとすると、$\bigcup_a \hat{K}_a(P', \Omega_a)$の点列$\{x^i\}$で$[\bigcup_a \hat{K}_a(P', \Omega_a)]^c$の点$x^0$に収束するものがある。$x^i \in K^c$としてよい。$W_i$を、$x^i$を含む、$\Omega$で相対compactな、$K^c \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+k}; x'' = x^{i\prime\prime}\}$の連結成分とする。又、$W_0$を、$x^0$を含む、$K^c \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+k}; x'' = x^{0\prime\prime}\}$の連結成分とする。$x^0 \in [\bigcup_a \hat{K}_a(P', \Omega_a)]^c$故、$W_0$は非有界又は$\Omega^c$と交わる。$W_0$が非有界なら、$x^0$は$W_0$内の$\infty$を通る折線の端点で、この折線は$K$と交わらぬ。故に、十分大きな$i$に対し、$x^i$も$K^c$内の折線で$\infty$と結ばれ、矛盾。故に$W_0$は$\Omega^c$と交わる。同様に、$\mathrm{dist}(W_i, \Omega^c) \to 0$ $(i \to \infty)$は容易にわかる。




図のような状況になっている。$\partial W_i$は$K$に含まれることに注意しておく。

さて、$w(x')$ を $P'(-D')w(x')=0$ の実解析解とし、$\chi_i(x')$ を $\mathbb{R}^n$ での $W_i$ の特性函数とし、

$$u_i(x) = \chi_i(x')\, w(x')\, \delta(x''-x_i'')$$

とおくと、

$$\operatorname{supp} u_i = \overline{W_i} \quad , \quad \operatorname{supp} P(-D)u_i \subset W_i$$

故に $\Omega$ は P-convex でない。よって必要性が言えた。//

定理3は 2)〜5) の場合にも適用できるが、このとき定理3の条件が必要かどうかは筆者にはわからない。

最後に、4) において、P が principal type という条件は、constant multiplicity にまで緩められる。実際、uniqueness cone は multiplicity には依らないことと、null solution が constant multiplicity でも作れる（Persson [6], [7], Komatsu [2]）ことから容易にわかる。

文献

[1] L. Hörmander : Linear partial differential operators. Springer, Berlin (1963).

[2] H. Komatsu : Irregularity of characteristic elements and construction of null solutions. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA Math., 23, 297-342 (1976).

[3] B. Malgrange : Existence et approximation des solutions des equations

aux dérivées et des equations de convolutions. Ann. Inst. Fourier Grenoble, 6, 271-355 (1955-1956).

[4] J. Persson : A sufficient condition for a set to be P-convex in $\mathbb{R}^n$. Mathematiche, 25, 1-7 (1970).

[5] ______ : On uniqueness cones, velocity cones and P-convexity. Ann. Mat. Pura Appl., (4) 96, 69-87 (1973).

[6] ______ : Semi-global null solutions and P-convexity. Boll. Un. Mat. Ital., (4) 8, 20-28 (1973).

[7] ______ : Correction of "Semi-global null solutions and P-convexity". Boll. Un. Mat. Ital., (4) 11, 518-524 (1975).

[8] ______ : The Cauchy problem at simply characteristic points and P-convexity. To appear in Ann. Mat. Pura Appl.

[9] ______ : The wave operator and P-convexity. To appear.

[10] E. C. Zachmanoglou : An application of Holmgren's uniqueness theorem and convexity with respect to differential operators with flat characteristic cones. Trans. Am. Math. Soc., 140, 109-115 (1969).