数理解析研究所講究録
第 361 巻 1979 年 44-65

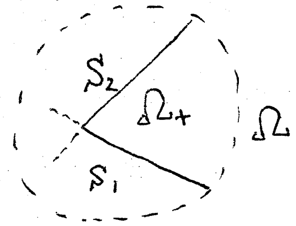
角のある領域における超函数論的境界値問題

東大 教養　金子 晃

筆者が境界値問題に到達したのは実解析解の延長の問題研究の過程で，解の障害集合への延長の不確定性を表現する手段としてであった．定数係数の場合にはこのような表現としてFourier変換に基づくFundamental Principleというものがあったが，変数係数の場合には非特性境界に含まれる除外集合に対して，境界値理論を適用するのが今の所唯一の既成の手段である．*) このような観点からは境界値問題というものをかなり広汎に解釈することができるし，今後扱うべき問題についてのある種の示唆をも得ることができるであろう．さて今日の話題である角のある領域における境界値問題はそうはっきりした目的意識から出発したものではなく，実はある虫の良い誤解から始めたことである．これをちゃんと調べておくことは例えば角における回折現象などに必要となるであろうが，ここでは問題提起程度の話しかできないことをお許し願いたい．尚角のある領域の問題についてはclassical solutionの範囲でいろいろの研究が昔からなされている．これについては[1]に詳しい文献があるので参照されたい．

*) 確定特異点型の特性境界に対しては筆者の出したいくつかの解の延長定理をほぼ平行に導くことができる．田原氏の仕事[7]を見られたい．

$p(x,D)$ を $\mathbb{R}^n$ の原点の近傍で定義された実解析係数 m 階線型偏微分作用素とし，単純実解析超平面 S_k: $S_k(x)=0$, $k=1,\cdots,N$ はいずれも原点を通り，かつ $p(x,D)$ につき非特性的とする．Ω を原点の近傍とし $\Omega_+ = \Omega \cap \bigcap_{k=1}^{N}\{S_k(x)>0\}$ とおく．また $S(x)=\prod_{k=1}^{N} S_k(x)$ とおき，記号節約のため $S=\bigcup_{k=1}^{N} S_k = \{S(x)=0\}$ とおく．



補題 1　Ω_+ における $p(x,D)u=0$ の超函数解に対し適当な延長 $[u]\in\Gamma_{\overline{\Omega_+}}(\Omega,\mathcal{B})$ をとれば

(1)　$$p(x,D)[u]=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=0}^{m-1} u_{kj}(x')\,\delta^{(m-1-j)}(S_k(x))$$

の形になる．ここに $u_{kj}(x')$ は台が $S_k\cap\partial\Omega_+\cap\Omega$ に含まれる $m-1$ 変数の超函数である．

証明　台が $\overline{\Omega_+}$ に含まれる勝手な延長 v をとると $p(x,D)v$ の台は $\partial\Omega_+\cap\Omega = S\cap\partial\Omega_+\cap\Omega$ に含まれる．超函数の flabby 性を用いてこれに応じた分解 $p(x,D)v=\sum_k w_k$, $\operatorname{supp} w_k \subset S_k\cap\partial\Omega_+\cap\Omega$ をとる．各 S_k は非特性的だから小松－河合の理論により $p(x,D)$ で割り算できて

$$p(x,D)v_k = w_k + \sum_{j=0}^{m-1} u_{kj}(x')\,\delta^{(m-1-j)}(S_k(x)),$$

$$\operatorname{supp} v_k \subset S_k\cap\partial\Omega_+\cap\Omega$$

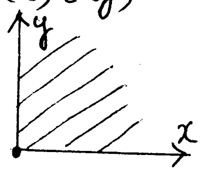
$$\operatorname{supp} u_{kj} \subset S_k\cap\partial\Omega_+\cap\Omega$$

とできる．故に $[u]=v-\sum v_k$ という延長をとれば補題

のような表現が得られた。

それではこのような表現の一意性はどうであろうか。小松河合の理論における割り算は局所的に一意であったから，上で計算された境界値は角あるいは稜以外では一意に定まり，延長 $[u]$ もその辺では一意である。また (1) 式の右辺で与えられる様な超函数には表現のあいまいさはあるものの $\partial\Omega_+ \cap \Omega$ に台をもつ超函数としては $[u]$ が決まれば決まってしまう。（後の補題3参照）　しかし残念ながら肝心の延長 $[u]$ が角あるいは稜において一意でない。*) すなわち稜に台が含まれるような超函数であって微分作用素 $p(x, D)$ を施すと (1) の右辺のような法線的に $m-1$ 階の形に書けてしまうものが存在する。これは特性方向の存在云々とは無関係な欠陥であり例えば第一象限の角において

(2) $$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\delta(x)\delta(y) = \delta''(y)\delta(x) + \delta''(x)\delta(y)$$



などが示す通り実にありふれた現象である。（この例は容易に一般化できる。付録の補題A参照）

この事情は境界を超えて distribution として prolongeable な distribution 解を考えても同じである。既に確立された distribution − hyperfunction の諸計算の両立性により，distribution で計算できたものは hyperfunction としての等式とも

*) 講演時には角においても一意であると述べたがこれは誤解であった。御指摘下さった柏原氏他に感謝する。

見なすことができるので場合によっては distribution として計算した方が易しいこともあり得る．この場合の結果を一応まとめておこう．証明は distribution の場合の台の分解定理（[6]）と割り算定理（[4]）を用いれば前補題と全く同じである．

補題2　S_k: $S_k=0$ は原点を通る C^∞ 級単純超曲面とし，互いに regular な位置にあるとする．さらに $p(x,D)$ は C^∞-係数線型微分作用素とし各 S_k は準非特性的，すなわち $p(x,D)$ を S_k の法線微分につき降冪順に整理して書いたときその最高階の係数 $\neq 0$ *) とする．Ω, Ω_+ は上と同様とするとき Ω_+ における $p(x,D)u=0$ の distribution 解で distribution として Ω へ prolongeable なものに対し，台が $\overline{\Omega_+}$ に含まれる適当な延長 $[u]$ をとれば

$$p(x,D)[u]=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=0}^{\mu_k-1}u_{kj}(x')\,\delta^{(\mu_k-1-j)}(S_k(x)) \tag{3}$$

の形になる．ここに μ_k は $p(x,D)$ の S_k の法線微分に関する階数である．

再び超函数の場合にもどる．今度は Ω を二つずつ互いに法交差する単純解析的超曲面 S_k: $S_k(x)=0$ により囲まれた角のある有界領域とする．正確に云えば $\Omega=\bigcap\{S_k(x)>0\}$．このとき $\partial\Omega=S\cap\overline{\Omega}$ となる．今のところ標準的延長 $[u]$ を定める処法が見当らないので境界だけに台が含まれるような広義の解も仲間に入れてしまい $v\in\mathcal{B}[\overline{\Omega}]$ で

*) 0にならない函数

$$S(x)^m p(x,D)v=0$$

の解であるものをすべて方程式 $p(x,D)u=0$ の解と同等に扱うことにし，この全体を $\hat{\mathcal{B}}^p(\Omega)$ と書こう．角が無い場合には標準的延長により $\hat{\mathcal{B}}^p(\Omega)\cong\mathcal{B}^p(\Omega)$ となっているわけである．これは明に $\mathcal{B}[\bar{\Omega}]$ の閉部分空間である．

<u>補題 3</u>　$\mathcal{B}^{(m)}[\partial\Omega]=\{u\in\mathcal{B}[\partial\Omega];\ u=\sum_k\sum_{j=0}^{m-1}u_{kj}(x')\delta^{(m-1-j)}(S_k(x))$ の形に書けるもの $\}$ とおくとき，これは $\mathcal{B}[\partial\Omega]$ および $\mathcal{B}[\bar{\Omega}]$ の閉部分空間で，$\operatorname{Ker}S(x)^m$ と一致する．

<u>証明</u>　$S(x)^m$ は $\mathcal{B}[\partial\Omega]\longrightarrow\mathcal{B}[\partial\Omega]$ あるいは $\mathcal{B}[\bar{\Omega}]\to\mathcal{B}[\bar{\Omega}]$ の連続写像だから，この kernel は閉である．上のような表現を持つ元が kernel に入ることは明だが逆に $S(x)^m u=0$ とすれば，まず $S_1(x)=0$ の上で $x_1^m u=0$ の解の構造から $\prod_{k\geq 2}S_k(x)^m u=\sum_{j=0}^{m-1}u_{1j}(x')\delta^{(m-1-j)}(S_1(x))$ と書ける．$u_{1j}(x')$ を $S_2(x)^m$ で割り算*) したものを改めて $u_{1j}(x')$ と書けば

$$S_2(x)^m\Big\{\prod_{k\geq 3}S_k(x)^m u-\sum_{j=0}^{m-1}u_{1j}(x')\delta^{(m-1-j)}(S_1(x))\Big\}=0$$

を得，以下帰納的にこれを続けてゆけば上のような表現に到達する．証了．

一般にコンパクトな台を持つ超函数の空間が Frechet になることを用いて $u_l\to u$ in $\mathcal{B}[L]$ から $v_l\to v$ in $\mathcal{B}[L]$ を満たす割り算 $x_1^m v_l=u_l$ の解を見出せることに注意すれば，

*) これは法交差の仮定より $S(x_1)^m S(x_2)^m$ が局所的に $x_1^m x_2^m$ と見なせるので可能である．

次のこともわかる.

<u>補題4</u>　$u_l \to u$ in $\mathcal{B}^{(m)}[\partial\Omega]$ のとき $u_l = \sum_k \sum_{j=0}^{m-1} u_{kj}^{(l)}(x')\,\delta^{(m-1-j)}(S_k(x))$, $u = \sum_k \sum_{j=0}^{m-1} u_{kj}(x')\,\delta^{(m-1-j)}(S_k(x))$ の表現を適当にとれば $u_{kj}^{(l)}(x') \longrightarrow u_{kj}(x')$ in $\mathcal{B}[S_k \cap \partial\Omega]$ とできる.

<u>証明</u>　$u_l \to u$ より $\prod_{k\geq 2} S_k(x)^m u_l \longrightarrow \prod_{k\geq 2} S_k(x)^m u$. つまり
$\sum_{j=0}^{m-1} \prod_{k\geq 2} S_k(x)^m u_{1j}^{(l)}(x')\,\delta^{(m-1-j)}(S_1(x)) \to \sum_{j=0}^{m-1} \prod_{k\geq 2} S_k(x)^m u_{1j}(x')\,\delta^{(m-1-j)}(S_1(x))$.
これより $\prod_{k\geq 2} S_k(x)^m u_{1j}^{(l)}(x') \longrightarrow \prod_{k\geq 2} S_k(x)^m u_{1j}(x')$, $j=0,\cdots,m-1$ が従う. ($S_1(x)^p$, $p=0,1,2,\cdots,m-1$ を掛けて x_1 につき積分すればよい.)
これから上の注意により $\prod_{k\geq 2} S_k(x)^m = 0$ の上で係数を適当に修正すれば $u_{1j}^{(l)}(x') \longrightarrow u_{1j}(x')$　$j=0,\cdots,m-1$ が云える. この修正は $\prod_{k\geq 2} S_k(x)^m$ の kernel の範囲内なので他の項へ繰込むことができ,*) 結局

$$\sum_{k\geq 2} \sum_{j=0}^{m-1} u_{kj}^{(l)}(x')\,\delta^{(m-1-j)}(S_k(x)) \longrightarrow \sum_{k\geq 2} \sum_{j=0}^{m-1} u_{kj}(x')\,\delta^{(m-1-j)}(S_k(x))$$

が云え帰納的に持ち込める. 証了

上の補題の主張において $\mathcal{B}[\partial\Omega]$ は $\mathcal{B}[\bar{\Omega}]$ の閉部分空間ではなく dense に入っていること, また $u_l, u \in \mathcal{B}[\partial\Omega]$ が $u_l \to u$ in $\mathcal{B}[\bar{\Omega}]$ でも $u_l \to u$ in $\mathcal{B}[\partial\Omega]$ とは限らぬこと等に注意せよ. (後者の反例は [3] にある.) 同様の補題は distribution に対しても成り立つことは良く知られている. この場合は位相が局所化可能なので何も不思議なことは無い.

*) すなわち, 方程式で割るなどしなくても書き換えたものが再び法線的に m-1階以下となる

$u\in\hat{\mathcal{B}}^{P}(\Omega)$ とすれば定義により $\gamma u \underset{\mathrm{def}}{=} P(x,D)u\in\mathcal{B}^{(m)}[\partial\Omega]$ となる．この元（あるいはその係数）を広義の解 u の境界値と呼ぼう．これで境界値問題の定式化だけはできた．さて

$$\mathcal{A}_0(\overline{\Omega})=\{f\in\mathcal{A}(\overline{\Omega});\ \partial\Omega \text{ への } m \text{ 個の境界値がすべて } 0\}$$

とおこう．これは容易にわかるように $S(x)^m\mathcal{A}(\overline{\Omega})$ に等しく，$\mathcal{A}(\overline{\Omega})$ の閉部分空間となる．同様に $\mathcal{A}_0(\partial\Omega)=S(x)^m\mathcal{A}(\partial\Omega)$ とおこう。

<u>補題5</u>　$(\mathcal{B}^{(m)}[\partial\Omega])'\cong\mathcal{A}(\overline{\Omega})/\mathcal{A}_0(\overline{\Omega})\cong\mathcal{A}(\partial\Omega)/\mathcal{A}_0(\partial\Omega)$

<u>証明</u>

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{B}^{(m)}[\partial\Omega] \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathcal{B}[\partial\Omega] \arrow[r, "S(x)^m"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathcal{B}[\partial\Omega] \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & 0 \\
0 & \mathcal{A}(\partial\Omega)/\mathcal{A}_0(\partial\Omega) \arrow[l] & \mathcal{A}(\partial\Omega) \arrow[l] & \mathcal{A}(\partial\Omega) \arrow[l, "S(x)^m"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

という双対列およびこの $\partial\Omega$ を $\overline{\Omega}$ に変えたものから直ちに得られる．（前補題により項 $\mathcal{B}^{(m)}[\partial\Omega]$ は取り替えなくても良いことに注意せよ．）なお後半の同型は $\mathcal{O}/S(x)^m\mathcal{O}$ という連接層と Malgrange の定理（$\mathcal{A}$－係数コホモロジーの消滅）からも直接出る．

<u>命題6</u>　$P(x,D)$ を m 階楕円型作用素とするとき ${}^tP(x,D)\mathcal{A}_0(\overline{\Omega})\subset\mathcal{A}(\overline{\Omega})$ は閉部分空間となり，次の双対性が成り立つ．

(4)
$$\begin{tikzcd}
\hat{\mathcal{B}}^{P}(\Omega) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "\gamma"'] & \mathcal{A}(\overline{\Omega})/{}^tP(x,D)\mathcal{A}_0(\overline{\Omega}) \\
\mathcal{B}^{(m)}[\partial\Omega] \arrow[r, leftrightarrow] & \mathcal{A}(\partial\Omega)/\mathcal{A}_0(\partial\Omega) \arrow[u, "{}^t\gamma"']
\end{tikzcd}$$

($\varphi \in \mathfrak{A}(\partial\Omega)$ に対し補題5の第2の同型で φ に対応する元 $\psi \in \mathfrak{A}(\bar{\Omega})$ をとるとき ${}^t\gamma\varphi = {}^tp(x,D)\psi$ である.)

証明　$f \in \hat{\mathcal{B}}^p(\Omega)$ に対し $\psi = S(x)^m\varphi \in \mathfrak{A}_0(\bar{\Omega})$ をとれば

$$\langle f, {}^tp(x,D)\psi\rangle = \langle p(x,D)f, \psi\rangle = \langle S(x)^m p(x,D)f, \varphi\rangle = 0$$

故に ${}^tp(x,D)\mathfrak{A}_0(\bar{\Omega}) \subset \hat{\mathcal{B}}^p(\Omega)^\perp$ および $\hat{\mathcal{B}}^p(\Omega) \subset ({}^tp(x,D)\mathfrak{A}_0(\bar{\Omega}))^\perp$ が成り立つ. 最後の式の逆向きの包含関係を示そう.

$f \in \mathcal{B}[\bar{\Omega}]$ に対し任意の $\psi = S(x)^m\varphi \in \mathfrak{A}_0(\bar{\Omega})$ について $\langle f, {}^tp(x,D)\psi\rangle = 0$ とすれば上の計算から $\langle S(x)^m p(x,D)f, \varphi\rangle = 0$ となる. $\varphi \in \mathfrak{A}(\bar{\Omega})$ は任意だからこれより $S(x)^m p(x,D)f = 0$, すなわち $f \in \hat{\mathcal{B}}^p(\Omega)$. 以上より等式(4)を示すには ${}^tp(x,D)\mathfrak{A}_0(\bar{\Omega})$ が $\mathfrak{A}(\bar{\Omega})$ の中で閉じていることを示せばよい. これには $\mathfrak{A}(\bar{\Omega})$ が DFS 空間なので点列で調べればよい. $\psi_\ell \in \mathfrak{A}_0(\bar{\Omega})$ に対し ${}^tp(x,D)\psi_\ell \longrightarrow \varphi$ と $\mathfrak{A}(\bar{\Omega})$ において収束したとせよ. χ_Ω を集合 Ω の定義函数とすれば境界条件より ${}^tp(x,D)(\chi_\Omega\psi_\ell) = \chi_\Omega {}^tp(x,D)\psi_\ell$ でこれは $\chi_\Omega\varphi$ に例えば $L^2(\Omega)$ で収束する. ${}^tp$ は楕円型だから Malgrange の不等式([5])により $\chi_\Omega\psi_\ell \longrightarrow {}^\exists u$ in $\mathcal{D}'[\bar{\Omega}]$ となる. すなわち

$${}^tp(x,D)u = \chi_\Omega\varphi$$

を満たす元 $u \in \mathcal{B}[\bar{\Omega}]$ が見出された. 内部正則性により u は

$$\begin{cases} {}^tp(x,D)\psi = \varphi \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial\nu_k}\right)^j \psi\Big|_{S_k} = 0, \quad 0 \le j \le m-1 \end{cases}$$

なる境界値問題の解（に $Y(S_k(x))$ を乗じたもの）と一致している．境界値0および右辺の ψ は $S_k=0$ に沿って $\partial\Omega$ の外まで少し意味を持つから，この解 u もそこまで実解析的に延びなければならぬ．すなわち $\psi\in\mathcal{A}_0(\overline{\Omega})$ となる．証了

境界付近では楕円性の仮定無しに次が成り立つ．

命題7　${}^tp(x,D)\mathcal{A}_0(\partial\Omega)\subset\mathcal{A}(\partial\Omega)$ は閉部分空間となり次の双対性が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
\hat{\mathcal{B}}^p(\Omega)\cap\mathcal{B}[\partial\Omega] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "\gamma"'] & \mathcal{A}(\partial\Omega)/{}^tp(x,D)\mathcal{A}_0(\partial\Omega) \\
\mathcal{B}^{(m)}[\partial\Omega] \arrow[r, leftrightarrow] & \mathcal{A}(\partial\Omega)/\mathcal{A}_0(\partial\Omega) \arrow[u, "{}^t\gamma"']
\end{tikzcd}$$

証明　$\varphi_\ell\in\mathcal{A}(\partial\Omega)$ とし ${}^tp(x,D)(S(x)^m\varphi_\ell)\to\psi$ in $\mathcal{A}(\partial\Omega)$ とせよ．Cauchy-Kowalevsky の定理による解の連続性により例えば $\mathcal{A}(S_1\cap\partial\Omega)$ において $\prod_{k\geq 2}S_k(x)^m\varphi_\ell$ は ${}^tp(x,D)(S_1(x)^m\chi)=\psi$ の解 χ に収束する．このことから χ は $\prod_{k\geq 2}S_k(x)^m$ で割り切れ，φ_ℓ は $\mathcal{A}(S_1\cap\partial\Omega)$ において ${}^tp(x,D)S(x)^m\varphi=\psi$ の（存在するとすれば）一意な解 $\varphi=\chi/\prod_{k\geq 2}S_k(x)^m$ に収束しなければならない．他の面についても同様だから $\varphi_\ell\to\varphi$ in $\mathcal{A}(\partial\Omega)$ かつ ${}^tp(x,D)(S(x)^m\varphi)=\psi$ となる．証了

系8　$p(D)$ を（楕円型と限らぬ）定数係数作用素とし Ω は凸とする．このとき ${}^tp(D)\mathcal{A}_0(\overline{\Omega})\subset\mathcal{A}(\overline{\Omega})$ は閉となり命題6と同じ双対性が成り立つ．

<u>証明</u> $\psi_\ell \in \mathcal{O}\!\iota_0(\Omega)$ に対し ${}^t p(D)\psi_\ell \to \varphi$ in $\mathcal{O}\!\iota(\overline{\Omega})$ とせよ. 命題6と同様 Malgrange の不等式を用いて $\chi_\Omega \psi_\ell \to {}^\exists u$ in $\mathcal{D}'[\overline{\Omega}]$ が結論される. 一方命題7より $\psi_\ell \to {}^\exists \psi$ in $\mathcal{O}\!\iota_0(\partial\Omega)$ 従って $\partial\Omega$ のある近傍で $\mathcal{D}'$ の意味で $\chi_\Omega\psi_\ell \to \chi_\Omega\psi$ となる. $\mathcal{D}'$ の収束は局所的だから, この近傍で $\chi_\Omega \psi = u$. すなわち u は $\partial\Omega$ の近傍では $\mathcal{O}\!\iota_0(\partial\Omega)$ の元として analytic に外へ延びるようなものである. 一方 Ω の内部では $p(D)u = \varphi$. 故に定数係数方程式に対する解析性伝播定理より u は内部でも実解析的となる. 証了

<u>注意</u> $\hat{\mathcal{B}}^p(\Omega) \cap \mathcal{B}[\partial\Omega]$ は広義の解のうちで台が $\partial\Omega$ に含まれるような本当につまらないものの全体である. (角が無いときは Cauchy-Kowalevsky より ${}^t p(x,D)\mathcal{O}\!\iota_0(\partial\Omega) = \mathcal{O}\!\iota(\partial\Omega)$, 従って $\hat{\mathcal{B}}^p(\Omega) \cap \mathcal{B}[\partial\Omega] = 0$ という訳である. 逆に付録の補題Aにより角があれば常に $\hat{\mathcal{B}}^p(\Omega) \cap \mathcal{B}[\partial\Omega] \neq 0$ だから角の付近では Cauchy-Kowalevsky が成り立たぬことになる.) $\hat{\mathcal{B}}^p(\Omega) \cap \mathcal{B}[\partial\Omega]$ は $\hat{\mathcal{B}}^p(\Omega)$ の中で位相的に閉じておらず, そうかといって dense とも限らぬようである (付録補題C参照).

(5)
$$
\begin{array}{ccc}
\hat{\mathcal{B}}^p(\Omega) \cap \mathcal{B}[\partial\Omega] & \longleftrightarrow & \mathcal{O}\!\iota(\partial\Omega) / {}^t p(x,D)\,\mathcal{O}\!\iota_0(\partial\Omega) \\
\downarrow & & \uparrow \\
\hat{\mathcal{B}}^p(\Omega) & \longleftrightarrow & \mathcal{O}\!\iota(\overline{\Omega}) / {}^t p(x,D)\,\mathcal{O}\!\iota_0(\overline{\Omega})
\end{array}
$$

という双対性があるが右側の写像は一般には全射でなくまた

1対1でも無い。

<u>注意</u>　prolongeable distributionの解についても同様の双対性を考えることができる．Cauchy-Kowalevskyが使えないので ${}^t p(x,D)\mathcal{E}_0(\bar{\Omega})$ が閉部分空間になるかどうかわからないが $\hat{\mathcal{D}}'^{P}(\Omega) \cong [\mathcal{E}(\bar{\Omega})/\overline{{}^t p(x,D)\mathcal{E}_0(\bar{\Omega})}]'$ は同様にして示される．

今の所これ以上の一般論を展開する用意が無いので Laplacian Δ に対し Dirichlet 問題がどうなるか実験的に考察してみよう．$m=2$ である．

$$\hat{\mathcal{B}}^{\Delta}_{Dir}(\Omega) = \{u \in \hat{\mathcal{B}}^{\Delta}(\Omega);\ S(x)\Delta u = 0\}$$

$$\mathcal{O}_{Dir}(\bar{\Omega}) = \{\varphi \in \mathcal{O}(\bar{\Omega});\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0\} = S(x)\mathcal{O}(\bar{\Omega})$$

とおく．Dir は Dirichlet 条件のつもりである．実際 $u \in \hat{\mathcal{B}}^{\Delta}_{Dir}(\Omega)$ の境界値 $\gamma u = \Delta u$ は法線微分0階の data しか無い．次の補題は命題6の前半と同様に示される．

<u>補題9</u>　$\mathcal{B}^{\Delta}_{Dir}(\Omega) = [\Delta\,\mathcal{O}_{Dir}(\bar{\Omega})]^{\perp}$

ここに $\perp$ は $\mathcal{B}[\bar{\Omega}]$ と $\mathcal{O}(\bar{\Omega})$ の双対性の意味での直交補空間である．

<u>補題10</u>

$$\begin{array}{ccc} \Delta\mathcal{O}_{Dir}(\bar{\Omega})/\Delta\mathcal{O}_0(\bar{\Omega}) & \xrightarrow[\nu]{\sim} & \mathcal{O}(\partial\Omega)/\underset{\Psi}{S(x)}\mathcal{O}(\partial\Omega) \\ \overset{\Psi}{\Delta\psi} & \longmapsto & \{\psi/S(x) \bmod S(x)\mathcal{O}(\partial\Omega)\} \end{array}$$

従って $\Delta\mathcal{O}_{Dir}(\bar{\Omega})$ も $\mathcal{O}(\bar{\Omega})$ の閉部分空間となる．

<u>証明</u>　まず同型．

(6)　$$S(x)\mathcal{O}(\partial\Omega)/S(x)^2\mathcal{O}(\partial\Omega) \xleftarrow[S(x)\cdot]{\sim} \mathcal{O}(\partial\Omega)/S(x)\mathcal{O}(\partial\Omega) \xleftarrow{\sim} \mathcal{O}(\bar{\Omega})/S(x)\mathcal{O}(\bar{\Omega})$$

に注意せよ.(補題5参照) これから $\varphi\in\mathcal{A}(\partial\Omega)$ に対しこの同型で対応する元 $\psi\in\mathcal{A}(\bar{\Omega})$ をとれば $\Delta\psi$ が連続な逆写像であることが容易にわかる. 故に左辺の商空間は完備DFS空間となるから分子は閉である. 証]

以上を総合すると

$$
(7)\qquad
\begin{array}{ccccccc}
0 & \subset & \hat{\mathcal{B}}^{\Delta}_{Dir}(\Omega) & \subset & \hat{\mathcal{B}}^{\Delta}(\Omega) & \subset & \mathcal{B}[\bar{\Omega}] \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
\mathcal{A}(\bar{\Omega}) & \supset & \Delta\mathcal{A}_{Dir}(\bar{\Omega}) & \supset & \Delta\mathcal{A}_{0}(\bar{\Omega}) & \supset & 0
\end{array}
$$

という直交補空間の対応が得られる. 今角の無い場合の真似をして

$$
(8)\qquad {}'\mathcal{B}(\partial\Omega)=\mathcal{B}^{(1)}[\partial\Omega],\quad {}'\mathcal{A}(\partial\Omega)=\mathcal{A}(\partial\Omega)/S(x)\,\mathcal{A}(\partial\Omega)
$$

と書くことにすれば, 結局次の定理が得られる.

定理 11

$$
\begin{array}{ccc}
\hat{\mathcal{B}}^{\Delta}(\Omega)/\hat{\mathcal{B}}^{\Delta}_{Dir}(\Omega) & \longleftrightarrow & \Delta\mathcal{A}_{Dir}(\bar{\Omega})/\Delta\mathcal{A}_{0}(\bar{\Omega}) \\
{\scriptstyle \gamma_0=S(x)\Delta}\downarrow\wr & & {\scriptstyle \nu}\downarrow\wr \\
{}'\mathcal{B}(\partial\Omega) & \longleftrightarrow & {}'\mathcal{A}(\partial\Omega) \\
\text{Dirichlet data} & & \text{Neumann data}
\end{array}
$$

という双対図式が得られる. 特に広義解に対するDirichlet問題は常に可解である.

証明 念の為形式的な双対性が対応していることを確かめておこう. $u\in\mathcal{B}^{\Delta}(\Omega)$ と $\varphi=\Delta\psi\in\Delta\mathcal{A}_{Dir}(\bar{\Omega})$ に対し

$$
\langle u,\varphi\rangle=\langle u,\Delta\psi\rangle=\langle\Delta u,\psi\rangle=\left\langle S(x)\Delta u,\frac{\psi}{S(x)}\right\rangle
$$

さて,図式において上の行の双対性は図式(7)からある. また

下の行の双対性は補題5により一般に分っている。故にνが同型なことからDirichlet dataをとる写像$\gamma_0 = S(x)\Delta$も同型なことがわかる。これはDirichlet問題が常に可解なことを示している。

最後にDirichlet問題の解の一意性を調べておこう。

<u>命題12</u>　$\Delta\mathcal{A}_{Dir}(\partial\Omega) = \Delta\big(S(x)\mathcal{A}(\partial\Omega)\big)$は$\mathcal{A}(\partial\Omega)$の閉部分空間となり次の双対性が成り立つ。

$$
\begin{tikzcd}
\hat{\mathcal{B}}^{\Delta}_{Dir}(\Omega)\cap\mathcal{B}[\partial\Omega] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, hook] & \mathcal{A}(\partial\Omega)\big/\Delta\,\mathcal{A}_{Dir}(\partial\Omega) \\
\hat{\mathcal{B}}^{\Delta}_{Dir}(\Omega) \arrow[r, leftrightarrow] & \mathcal{A}(\bar{\Omega})\big/\Delta\,\mathcal{A}_{Dir}(\bar{\Omega}) \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

従って次は同値となる。

a) $\hat{\mathcal{B}}^{\Delta}_{Dir}(\Omega)\cap\mathcal{B}[\partial\Omega] \neq 0$

b) 境界の近傍におけるDirichlet問題

$$
\begin{cases} \Delta\varphi = \psi \\ \varphi\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}
$$

は必ずしも角において実解析的となる解を持たない。(古典解の存在は明なのでこのことは角において古典解の$\mathcal{A}$-正則性が必ずしも従わぬことを意味する。)

証明は補題9, 10, 定理11と同様である。さてΩが$\mathbb{R}^2$の凸多角形の場合を考えよう。付録の補題B, Eによれば

$\hat{\mathcal{B}}^{\Delta}_{Dir}(\Omega)\cap\mathcal{B}[\partial\Omega] = 0 \iff \Omega$の内角はどれも$\pi$の有理数倍でない。

しかしこのとき上の命題から局所的なDirichlet問題の解の$\mathfrak{a}$-正則性が従うということはできない.(解が一意ではないから.)付録の補題Dの証明中の例を見よ.

<u>定理13</u>　$\mathbb{R}^2$の凸多角形ΩにおけるLaplacianに対する超函数的Dirichlet問題は常に一意でない.

<u>証明</u>　Ωがπの有理数倍に等しい内角の角を持てば$\hat{\beta}^{\triangle}_{Dir}(\Omega) \cap \beta[\partial\Omega] \neq 0$よりもちろん$\hat{\beta}^{\triangle}_{Dir}(\Omega) \neq 0$. 一方$\Omega$が$\pi/n$の形以外の角を持てば付録の補題Dより$\hat{\beta}^{\triangle}_{Dir}(\Omega)$の双対$\mathfrak{a}(\bar{\Omega})/\triangle\mathfrak{a}_{Dir}(\bar{\Omega}) \neq 0$となる.(この場合一意性をくずしている解はあまり自明とは云えない.)これですべての場合が尽されている.

付録

本文中に書くには幼稚すぎる計算をいくつかやっておこう.

補題A $\partial\Omega$ が角を持つとき, 常に $\hat{\mathcal{B}}^P(\Omega)\cap\mathcal{B}[\partial\Omega]\neq 0$ である.

証明 適当な座標変換で $\partial\Omega$ は $x_1=x_2=0$ という稜を含むとしてよい. $p(x,D)$ に関して $x_1=0$ も $x_2=0$ も非特性的だから

$$p(x,D)=D_1^m+a(x)D_2^m+\cdots \qquad a(x)\neq 0$$

という形をしていると仮定できる。$x''=(x_3,\ldots,x_n)$ とおこう.
$\delta(x)=\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x'')$ にこの作用素を施せば

$$p(x,D)\delta(x)=\left(a(x)\delta^{(m)}(x_2)\delta(x'')\right)\delta(x_1)+\left(\delta^{(m)}(x_1)\delta(x'')\right)\delta(x_2)+\cdots$$

となる. ここで $\cdots$ は $\delta(x_1)$, $\delta(x_2)$ のどちらに関しても階数が $m-1$ 以下の部分である. すなわち稜に台を持つ δ 函数は常に $\hat{\mathcal{B}}^P(\Omega)\cap\mathcal{B}[\partial\Omega]$ の自明でない元である, 証了

次にこのような解のうちで Dirichlet 条件を満たすものがあるかどうか調べよう. 簡単のため第一象限の角において 2次元の定数係数2階同次方程式を考える. すなわち 2次元 Laplacian を凸多角形上で考え, その角が直角になるよう affine 座標変換したものを考える.

補題B $\mathbb{R}^2$ の原点に台を持つ超函数 (又は distribution) u で

$$xy\,(D_x^2+\lambda D_xD_y+\mu D_y^2)\,u=0$$

を満たすものが存在するためには λ^2/μ が次のようにして定まる離散値 α_k のいずれかと一致することが必要かつ十分である：$g_0(\alpha)=\alpha$, $g_1(\alpha)=\alpha(\alpha-1)$, $g_2(\alpha)=\alpha^2(\alpha-2)$, 一般に漸化式

(9) $\qquad g_n(\alpha)=\alpha(g_{n-1}(\alpha)-g_{n-2}(\alpha))$

で定まる多項式たちの零点を $\{\alpha_k\}$ とする。

証明　$u(x)=\sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk} D_x^j D_y^k(\delta(x)\delta(y))$ の形を仮定して方程式に代入し $\delta(x)$ 又は $\delta(y)$ がくくり出せる項以外がすべて消えるという条件を課せば

$$
(10)\quad \begin{cases} \lambda a_{00}=0 \\ a_{j,1}+\lambda a_{j+1,0}=0 & j\geq 0 \\ \lambda a_{0,k+1}+\mu a_{1,k}=0 & k\geq 0 \\ a_{j,k+2}+\lambda a_{j+1,k+1}+\mu a_{j+2,k}=0 & j,k\geq 0 \end{cases}
$$

が得られる，方程式が同次なのでこれらの条件は各斜線 $j+k=\mathrm{const}$ 上で独立に考えることができ，従って収束の問題は関与せず有限階の部分の係数条件として上の値が得られる。

上の漸化式は Sturm 列と似た性質を持っていることから根はすべて実根で $[0,4[$ の間に収っていることがわかる。なお座標変換すれば上の λ^2/μ の値 α_k は Laplacian を $\cos^2\theta=\alpha_k/4$ なる角度 θ の角で考えていることに相当する．後に吟味するように（補題E）この角は実は円周等分点に対応する

ことが解る．従って上の離散値は $[0,4[$ 内に稠密に分布している．

次に特別な角についてこのような解がどのくらいあるか調べておこう．

補題 C　Ω を正方形 $\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ とする。$\hat{\beta}^{\Delta}(\Omega)\cap\beta[\partial\Omega]$ は $\hat{\beta}^{\Delta}(\Omega)$ の中で稠密でも閉じてもいない．また $\hat{\beta}^{\Delta}_{Dir}(\Omega)\cap\beta[\partial\Omega]$ も $\hat{\beta}^{\Delta}_{Dir}(\Omega)$ の中で同様の状況にある．

証明　公式

$$\Delta\Big(\sum_{j,k=0}^{\infty} a_{j,k} D_x^{j} D_y^{k}(\delta(x)\delta(y))\Big)=\Big(\sum_{j,k=0}^{\infty} a_{j,k} D_x^{j+2} D_y^{k}+\sum_{j,k=0}^{\infty} a_{j,k} D_x^{j} D_y^{k+2}\Big)\delta(x)\delta(y)$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty} a_{j,0} D_x^{j+2}\delta(x)\delta(y)+\sum_{j=0}^{\infty} a_{j,1} D_x^{j+2}\delta(x)\delta'(y)$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty} a_{0,k} D_y^{k+2}\delta(y)\delta(x)+\sum_{k=0}^{\infty} a_{1,k} D_y^{k+2}\delta(y)\delta'(x)$$
$$+\sum_{j,k=0}^{\infty}(a_{j,k+2}+a_{j+2,k}) D_x^{j+2} D_y^{k+2}\delta(x)\delta(y)$$

より $a_{j,k+2}+a_{j+2,k}=0$ とおいて原点に台を持つ $\hat{\beta}^{\Delta}(\Omega)\cap\beta[\partial\Omega]$ の元の構造が確定する．このときの右辺，すなわち"境界値"は

(11)
$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_{j,0} D_x^{j+2}\delta(x)\Big)\delta(y)+\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_{j,1} D_x^{j+2}\delta(x)\Big)\delta'(y)$$
$$+\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k,0}(-1)^k D_y^{2k+2}\delta(y)+\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k,1}(-1)^k D_y^{2k+3}\delta(y)\Big)\delta(x)$$
$$+\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1,0}(-1)^k D_y^{2k+2}\delta(y)+\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1,1}(-1)^k D_y^{2k+3}\delta(y)\Big)\delta'(x)$$

となる．ここには $\delta(x)\delta(y)$, $\delta'(x)\delta(y)$, $\delta(x)\delta'(y)$, $\delta'(x)\delta'(y)$ 等のの項が存在しないことに注意せよ．故に例えば Dirichlet 問題

$$xy\,\Delta u=\delta(x)\delta(y)$$

の一般化された解 $v \in \hat{\mathcal{B}}^{\Delta}(\Omega)$ をとれば（それは定理11により存在する），v は上のような形の解の列 u_ℓ で $\mathcal{B}[\bar{\Omega}]$ において近似することができない．実際，もし $u_\ell \to v$ なら $\Delta u_\ell \to \Delta v$ in $\mathcal{B}[\bar{\Omega}]$ のはずであるが

$$0 = \langle \Delta u_\ell , xy \rangle \longrightarrow \langle \Delta v , xy \rangle = 1$$

となり矛盾を生じる．

次に $f(x)$ を線分 $[0,1]$ 上の超函数で台が内点を含み，かつ $\sum_{j=1}^{\infty} a^{(\ell)}_{4j+1,1} D_x^{4j+3}\delta(x)$ の形の原点に台を持つ超函数の列により $\mathcal{B}[0,1]$ において近似できるようなものとする．（このような f の存在は後で論ずる．）このとき $a^{(\ell)}_{j,0} \equiv 0$ とおき，また $a^{(\ell)}_{j,1}$ の残りの係数も 0 とおけば，表現(11)式から結局原点のみに台を持つ $\hat{\mathcal{B}}^{\Delta}_{Dir}(\Omega) \cap \mathcal{B}[\partial\Omega]$ の元の列 u_ℓ で

$$\Delta u_\ell \longrightarrow f(x)\delta'(y) + f(y)\delta'(x) \text{ in } \mathcal{B}[\bar{\Omega}]$$

となるものが得られることがわかる．Malgrangeの不等式により $\mathcal{B}[\bar{\Omega}]$ において $u_\ell \to v$ となり v はDirichlet問題

$$\Delta v = f(x)\delta'(y) + f(y)\delta'(x)$$

の一般化された解となる．v は境界の滑らかな部分において 0 でない境界値を持っているので，その付近で $v \neq 0$．従って一致の定理により $\mathrm{supp}\, v = \bar{\Omega}$．これは $\hat{\mathcal{B}}^{\Delta}_{Dir}(\Omega) \cap \mathcal{B}[\partial\Omega]$ が $\hat{\mathcal{B}}^{\Delta}_{Dir}(\Omega)$ の中で閉じていないことを示している．

最後に f の存在を示しておこう．$\sum_{j=0}^{\infty} a_j D_x^{4j+k}\delta(x)$ の形の元

の全体の作る $\mathcal{B}[0]$ の部分空間を E_k, $k=0,1,2,3$ とおく。我々が注目しているのは $E_3 \ominus \mathbb{C}\delta'''(x)$ である。

(12) $$\mathcal{B}[0] = E_0 \oplus E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$$

という代数的分解が成立している。これが実は位相的分解であることを示そう。そうすれば右辺の閉包を $\mathcal{B}[0, 1/2]$ の中で考えるとき、$\mathcal{B}[0]$ は $\mathcal{B}[0, 1/2]$ の中で稠密だから

$$\mathcal{B}[0, 1/2] = \overline{E}_0 \oplus \overline{E}_1 \oplus \overline{E}_2 \oplus \overline{E}_3$$

という代数的分解を得, ある E_k はこの閉包操作により $\mathcal{B}[0, 1/2]$ の元を無限次元獲得することになる。$k=3$ ならそのまま, また $k<3$ ならそれを $3-k$ 回微分したものの中には台が原点の外の $0 < x \le \frac{1}{2}$ の部分にしみ出るものが含まれているはずであり, それの初項 $\mathbb{C}\delta'''(x)$ を取り去ったものを $f(x)$ とすればよい。

さて, (12) が位相的分解であることの証明は, 例えば $u \in \mathcal{B}[0]$ の分解成分 u_0 が u に

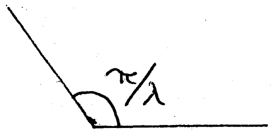
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}[0] & \longrightarrow & \mathcal{B}[0] \\ \Psi & & \Psi \\ u(x) & \longmapsto & \dfrac{u(x)+u(-x)}{2} \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{B}[0] & \longrightarrow & \mathcal{B}[0] \\ \Psi & & \Psi \\ u(x) & \longmapsto & \dfrac{u(x)+iu(ix)}{2} \end{array}$$

という連続写像を引続き施すことにより得られることに注意すれば得られる。(ix のような代入が可能なのは u の台が原点に含まれているからである。)

<u>補題D</u> $\mathbb{R}^2$ の凸多角形 Ω が π/n, $n=2,3,\dots$ 以外の内角の

角を持てば，$\Delta\mathfrak{A}_{Dir}(\bar{\Omega}) \subsetneq \mathfrak{A}(\bar{\Omega})$ となっている．

証明　内角 π/λ の角において



$u = \mathrm{Im}\, z^{\lambda}$ は Dirichlet 条件を満たす $\Delta u = 0$ の局所的な解になっている．λ が正整数でなければこの解は角において一般に $\mathcal{E}^2_{L^2}$ の正則性しかない．（これは一般論を下から評価している：Ibuki [2] を見よ．）この解の $\partial\Omega$ への Dirichlet data は局所的に $\mathfrak{A}(\partial\Omega)$ の元からの Dirichlet data から来ているので，補題5により同じ data を実現する $\mathfrak{A}(\bar{\Omega})$ の元 φ が存在する．$\psi = \Delta(u-\varphi) = -\Delta\varphi$ とおけば $\psi \in \mathfrak{A}(\bar{\Omega})$ であり $v = u - \varphi$ は境界値問題

$$\begin{cases} \Delta v = \psi \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

の古典解になっている．最大値原理により古典解は一意であるからこの問題には他の解は存在しない．故に ψ は $\mathfrak{A}(\bar{\Omega})/\Delta\mathfrak{A}_{Dir}(\bar{\Omega})$ の自明でない元を与える．証了

上の補題における例外角の場合には同次 Dirichlet 問題の古典解の角における局所的 $\mathfrak{A}$-正則性が成り立つことが等角写像を用いて容易に確かめられる．しかるに

補題E　$\theta = \pi/n$, $n = 2, 3, \cdots$ に対し $\alpha = 4\cos^2\theta$ は補題Bで与えられた離散値に属する．（$4\cos^2 \pi/n$ は $g_{n-2}(\alpha) = 0$ の最大根である．）実は一般に $g_{n-2}(\alpha) = 0$ の根 α_k に対し

$\alpha_k = 4\cos^2\theta$ で定まる角はちょうど円周の n 等分点に対応している．

<u>証明</u> 公式

$$\cos n\theta = 2\cos(n-1)\theta\cos\theta - \cos(n-2)\theta$$

を用いて $\cos n\theta$ を $\cos\theta$ の多項式で表わす函数の漸化式を作りそれを用いて $\alpha = 4\cos^2 k\theta/(n+2) = 2(\cos 2k\theta/(n+2)+1)$, $k=1,2,\cdots$ を零点とする多項式 $\gamma_n(\alpha)$ を求めよう．

$$\gamma_0(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha(\alpha-4), \qquad \gamma_1(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha-4)(\alpha-1)^2$$

一般に

$$(13) \qquad \gamma_n(\alpha) = (\alpha-2)\gamma_{n-1}(\alpha) - \gamma_{n-2}(\alpha) + (\alpha-4)$$

が成り立つ． $\dfrac{2\alpha^{n+1}}{\alpha-4}\gamma_n(\alpha) = g_n(\alpha)^2$ を示そう．そのために $S_n(\alpha) = \dfrac{2\alpha^{n+1}}{\alpha-4}\gamma_n(\alpha)$ の満たす漸化式を求めれば

$$(14) \qquad S_n(\alpha) = \alpha(\alpha-2)S_{n-1}(\alpha) - \alpha^2 S_{n-2}(\alpha) + 2\alpha^{n+1}$$

さて $g_n(\alpha)$ の方は漸化式 (9) から一般項が

$$g_n(\alpha) = \frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{\frac{\alpha}{2}-1}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\alpha}}\right)\left(\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\alpha}\right)^n + \frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{\frac{\alpha}{2}-1}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\alpha}}\right)\left(\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\alpha}\right)^n$$

と求まるのでこれから $g_n(\alpha)^2$ を計算して (14) に入れれば等式が確かめられる。証了．

文献

[1] Grisvard, P.: Behavior of the solutions of an elliptic boundary value problem in a polygonal or polyhedral domain, Numerical Solution of Partial Differential Equations III, Synspade 1975, Academic Press 1976, pp.207-274.

[2] Ibuki, K.: Dirichlet problem for elliptic equations of the second order in a singular domain of R^2, J. Math. Kyoto Univ. 14-1(1974),55-71.

[3] Kaneko, A.: Remarks on hyperfunctions with analytic parameters, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec.IA,22(1975),371-407.

[4] Kaneko, A.: Note on regular fundamental solutions and some other topics, Sûrikaiseki-Kenkyûsho Kôkyûroku 281, 1976, pp. 200-210.

[5] Malgrange, B.: Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolutions, Ann. Inst. Fourier 6(1955),271-355.

[6] Malgrange, B.: Ideals of Differentiable Functions, Tata Institute, 1965.

[7] Tahara, T.: Fuchsian type equations and Fuchsian hyperbolic equations, Japan J. Math., to appear.