

Rigid analytic spaces 入門

北大・理 森田康夫

長を自明でない非アルキメデスの付値 $| \cdot |$ に関し完備な体とします。例えば、 p 進体 \mathbb{Q}_p や \mathbb{Q}_p の代数的閉包の完備化 \mathbb{C}_p は、このような体の例となっています。そこで

[問題]. このような体上の, analytic functions や analytic spaces の理論を作れ。

という問題を考えます。このようなことは、単に形式的な一般化の可能性の追求という点のみではなく、実際に、整数論や、代数幾何での研究上必要であり、意味があります。例えば、筆者の場合には、 p 進「関数」とくにその無限遠点における Stirling の公式を研究するため、このような問題と研究することが必要となって来ました。

さて現在のところ、このようなことに関する一般論としては、(1). Tate の Rigid analytic spaces の理論と、(2). Krasner による Analytic functions の理論が存在します。この2つは、

ある時には同値となりますが、一般には相異なる結果を示えます。しかも、定義・結果の自然さ、cohomologies や duality 等の点、理論の一般性などの点から、Tate のものの方が優れているように思えます ([11] 参照)。そこで以下、(i) Tate の理論を紹介し、(ii) 1次元の場合を例としてより詳しく述べ、(iii) このようなことに関して残っている問題点にふれる。の3つのことを行います。

§1では、理論を構成する場合の基礎となる“アファイン環”の性質を述べます。§2では、“アファイン集合”の性質を述べます。§3では、この理論の一番重要な点である、はりあわせの仕方について述べます。§4では、応用上重要である Kiehl による proper map や Stein 性についての研究にふれます。また §5では、筆者による1次元の場合の詳しい研究の結果を紹介し、最後に §6で、open problems にふれます。

§1. 局所論 I (アファイン環の性質).

k とし、序文で述べたような体とその非アルキメデス的付値とし、 $k[[T_1, \dots, T_n]]$ とその上の n 変数の形式的巾級数となる環とします。そこで $k\{T_1, \dots, T_n\}$ と、 $k[[T_1, \dots, T_n]]$

の元で

$$|T_1| \leq 1, |T_2| \leq 1, \dots, |T_n| \leq 1 \quad \dots\dots (\ast)$$

の時収束するもの全体のなる k -subalgebra とします。この時 $k\{T_1, \dots, T_n\} \ni f(T_1, \dots, T_n) = \sum c_{\mu_1, \dots, \mu_n} T_1^{\mu_1} \dots T_n^{\mu_n}$ に対し、

$$\|f\| = \text{Max } |c_{\mu_1, \dots, \mu_n}|$$

とおくと、これは $k\{T\} = k\{T_1, \dots, T_n\}$ のノルムを与え、これに関して $k\{T\}$ は完備、かつ $k\{T\}$ の任意の ideal は closed となります。

定義 A を k -algebra とします。この時、 A は上記のような環 $k\{T_1, \dots, T_n\}$ の剰余環と同型になるなら、 k 上 topologically of finite type ($t.f.t.$ と略する) であると言う。

この時 A は、 $k\{T\}$ の剰余環として、自然な位相をもつ。

定理 A, B は、共に k 上 $t.f.t.$ であるとする。この時

(1). A は、ある $k\{T_1, \dots, T_n\}$ と同型な部分環上、有限拡大となる。(正規化定理)

(2). A は、Noether 環で、すべての ideal は閉である。

(3). $A \longrightarrow B$ なる任意の algebra の準同型は、常に連続となる。

(注意) k の距離 $d(x, y) = |x - y|$ は、ultrametric であるから、

上記の $\mathcal{O}\{T\}$ の定義に出てきた集合 (\star) は, open か \rightarrow closed になっていきます。また (\star) において等号を入れたため, A は Noether 環になるなど, 好都合な結果が得られています。

さて A を \mathcal{O}_f over \mathcal{O} であるとし,

$$\text{Max}(A) = \{ \mathfrak{x} \subseteq A \mid \text{maximal ideals} \}$$

とおきます。この時 $\mathfrak{x} \in \text{Max}(A)$ につき, その剰余体 $\mathcal{O}(x)$ は, \mathcal{O} の有限次拡大体となります。また

定理 A を \mathcal{O} 上 \mathcal{O}_f とし, $f \in A$ とする。この時

(1). すべての $\mathfrak{x} \in \text{Max}(A)$ に対し, $f(x) = f \text{ modulo } \mathfrak{x} \in \mathcal{O}(x)$ が 0 となるための必要十分条件は, f が nilpotent となることである。(Hilbert の零点定理)

(2). $\mathfrak{x}_0 \in \text{Max}(A)$ で

$$\sup_{\mathfrak{x} \in \text{Max}(A)} |f(x)| = |f(\mathfrak{x}_0)|$$

なるものが存在する。また A が reduced なら, この値を $\|f\|$ とおくと, A の位相は, このノルムにより与えられる。

が成り立ちます。その他, この様な環に対する Weierstrass の予備定理なども知られています。

§2. 局所論 II (アファイン集合)

前節で定義した, \mathcal{O} 上 \mathcal{O}_f なる環 A より作った $\text{Max}(A)$

の形の集合を、我々は、アファイン集合と呼びます。また
アファイン集合 $X = \text{Max}(A)$ の部分集合 Y は、長上 \mathcal{A} なる
環のカテゴリーから集合のカテゴリーへの

$$B \longrightarrow Y(B) = \{f: A \longrightarrow B \mid \text{morphism, } f^*(\text{Max}(B)) \subseteq Y\}$$

なるファンクターが representable の時、 X の アファイン部分集
合であると言います。

(例) A, X 等 \mathcal{A} 上の通りとし、 $f_i, g_j \in A$ の有限個
の元とします。この時

$$Y = \{x \in X \mid |f_i(x)| \leq 1, |g_j(x)| \geq 1\}$$

とおくと、 $B \longrightarrow Y(B)$ は

$$A\{T_i, S_j\} / (f_i - T_i, 1 - g_j S_j)$$

なる環によって represent されます ($A\{T_i, S_j\}$ は、 $k\{T\}$ と
同様に \mathcal{A} で定義します)。したがって Y は、 X のアファイン部
分集合となります。この形の部分集合を、特殊アファイン部分
集合と呼びます。

命題 A, X \mathcal{A} 上の通りとし、 $Y \subseteq X$ のアファイン部分集
合とします。この時

(1) $f: A \longrightarrow B$ \mathcal{A} 上の環の間の algebra の準同
型とする時、これによる引き戻し $(f^*)^{-1}(Y)$ は $\text{Max}(B)$ の
アファイン部分集合となる。

(2) $Z \subseteq Y$ のアファイン部分集合とする時、 Z は X の中でも

アファイン部分集合となる。

さてここまで、我々はアファイン集合 $X = \text{Max}(A)$ を、単なる集合として扱ってきましたが、これに次のようにして位相を導入します。

$X \ni x_0$ の基本近傍系として、任意の $\varepsilon > 0$ と、任意の有限個の A の元 g_1, \dots, g_n で $g_1(x_0) = \dots = g_n(x_0) = 0$ となるものに対し、

$$\{x \in \text{Max}(A) \mid |g_i(x)| < \varepsilon \quad (i=1, \dots, n)\}$$

なるもの全体を取ります。

このようにして定めた位相は、 X の特殊アファイン部分集合全体を開集合全体の基底とする X の位相とも一致します。

ところが、 X の特殊アファイン部分集合 $Y = \text{Max}(B)$ に対し、環 B を対応させる対応は、 X のこの位相に関する準層となります。そこでこの準層 $Y = \text{Max}(B) (\subseteq X = \text{Max}(A))$

→ B に付随する層 \tilde{A} であらわします。これにより、アファイン集合 $X = \text{Max}(A)$ は、ringed space の構造をもちます。

さて特に k が代数的閉体の場合には、H. Cartan の意味での analytic spaces の概念は、局所的にアファイン空間 (X, \tilde{A}) と同型の ringed spaces の概念と一致します。そこで、一般の k に対しても、以下アファイン空間 (X, \tilde{A}) と局所的に同型と

なる ringed space を以下 analytic space (Tate の用語では, wobby analytic space) と呼びます。しかし, この意味での analytic space は, k が完全非連結のため, 非常にばらばらな空間となっていて, そのため, 次節で, これを修正して, 一致の定理等が成り立つ正しい空間を作るわけです。

§3. 大域論 (Rigid analytic spaces の定義)

以下我々は, ばらばらではなく, rigid な analytic spaces の理論を作るため, 次のように考えます。

まずアフィン空間の間の前節の意味での analytic morphism が \rightarrow rigid であるべきかを考えます。答は明らかに,

『 $\varphi: \text{Max}(B) \rightarrow \text{Max}(A)$ は, ある algebra の準同型 $f: A \rightarrow B$ より k 上 (写像 f^* として φ が出来ている) 場合に限る』rigid である』となります。また rigid analytic spaces は局所的に, アフィン空間であるべきこと, さらに rigid であるという概念は, 合成に関して安定であるべきことから, まず次のように定義します。

定義 X を analytic space とします。この時 X 上の k -structure θ とは, k 上 k 上なる algebra A に対し, $\text{Max}(A)$ から X への ringed spaces としての morphisms 全体の部分集合

$X^0(A)$ を対応させるもので、次の性質をもつものとする。

(以下 $X^0(A)$ の元を、structural であるということにします。)

(1) 任意の X の点 x に対し、あるアフィン空間 $\text{Max}(A)$ から X への ringed spaces の open immersion τ 、structural、かつ x がその像に含まれるものが存在する。

(2) $\text{Max}(B) \rightarrow \text{Max}(A)$ が rigid で、かつ $\text{Max}(A) \rightarrow X$ が structural なら、合成 $\text{Max}(B) \rightarrow X$ も structural である。

以下、 \mathfrak{h} -structure をもつ analytic space を、 \mathfrak{h} -space と呼びます。また \mathfrak{h} -spaces の間の ringed spaces としての morphism $f: X \rightarrow Y$ は、 $\text{Max}(A) \rightarrow X$ なる任意の structural な morphism との合成がまた structural となる時に、 \mathfrak{h} -morphism であると言います。

(注意) 以上の (1), (2) だけでは、まだ仮定が弱すぎ、例えば $\text{Max}(A) \rightarrow X$ なる ringed spaces の morphism は、すべて structural であるとしても、(1), (2) を満たします。これでは、しょうがないので、以下仮定を強めます。

上の例はつまりませんが、以下使われる役に立つ例としては、次の 2 つがあります。

(例) θ を analytic space X 上の \mathfrak{h} -structure とし、 $U \subseteq X$ の open subset とします。この時 $U^0(A)$ として、 $\text{Max}(A) \rightarrow U$ なる ringed spaces の morphism τ 、 $U \hookrightarrow X$ と合成すると

$X^\theta(A)$ の元となるようなもの全体を取ります。この時 θ' は、 U 上の \mathcal{H} -structure となります。これを X の open subset U 上の induced \mathcal{H} -structure と呼び、また (U, θ') は (X, θ) の open \mathcal{H} -subspace であると言います。induced \mathcal{H} -structure、又は open \mathcal{H} -subspace であるという概念は、推移律をみたします。

(例) $X = \text{Max}(A)$ とし、 $X^\theta(B)$ として $\text{Max}(B)$ から、 X への rigid な ringed spaces の morphisms の全体を取ります。この時 θ は X 上の \mathcal{H} -structure となります。これを アフライン空間 X 上の canonical \mathcal{H} -structure と呼びます。またこのような (X, θ) と同型になる \mathcal{H} -space を、アフラインであると言います。canonical \mathcal{H} -structure は、そのアフライン部分空間に、canonical \mathcal{H} -structure を引きおこします。

(注意) $\text{Max}(A) \longrightarrow X$ なるアフライン空間よりの ringed spaces の morphism は、structural な時に限り \mathcal{H} -morphism となります。とくに X 自身アフラインである時は、rigid であることとも一致します。

次に \mathcal{H} -space に対する仮定を強め、また \mathcal{H} -space に対し、それに付随する Grothendieck topology を定義するため、次の定義を行います。

定義 X を \mathcal{H} -space とします。この時

(1) X が special であるとは、任意の \mathcal{A} ファイン h -space Y と、その任意の有限個の \mathcal{A} ファイン部分集合による covering $\{Y_i\}$ につき、ringed space の morphism $f: Y \rightarrow X$ が h -morphism になるためには、 f の各 Y_i への制限が h -morphism となることが必要十分であるときをいう。

(2) X の open covering \mathcal{A} が admissible であるとは、任意の \mathcal{A} ファイン h -space Y と、任意の $f: Y \rightarrow X$ なる h -morphism につき、 $f^{-1}(\mathcal{A})$ なる Y の open covering が、有限個の \mathcal{A} ファイン部分集合による covering に細分されるときをいう。

(例) \mathcal{A} ファイン h -space は、special になります。また \mathcal{A} ファイン h -space の open covering は、有限個の \mathcal{A} ファイン部分集合による covering に細分される時、かつその時に限り、admissible になります。

(注意) Tate の原論文では、以上において、「有限個の \mathcal{A} ファイン部分集合による covering」となっている所が、special covering となっていますが、Geritzzen-Grauert [3] の結果により、この言うふうに言い直してもかまいません。

(注意) special な h -space の、open h -subspace は、また special になります。

以下、 h -space X に対し、 X の open covering で admissible なもの全体を $\mathcal{A}(X)$ であらわします。この時

定理 (1). $\mathcal{A}(X)$ は, Grothendieck topology である. つまり次の3つが成り立つ.

(1) X の X 自身による covering $\{X\}$ は $\mathcal{A}(X)$ に属する.

(2) $\{X_i\}_i \in \mathcal{A}(X)$ から $\{X_{ij}\}_j \in \mathcal{A}(X_i)$ なら $\{X_{ij}\}_{i,j} \in \mathcal{A}(X)$.

(3) $\{X_i\}_i \in \mathcal{A}(X)$ から Y が X の open \mathfrak{h} -subspace なら, $\{Y \cap X_i\}_i \in \mathcal{A}(Y)$ となる.

(2) \mathfrak{h} -morphism は, この Grothendieck topology に関して連続である. つまり $\{X_i\} \in \mathcal{A}(X)$ から $f: Y \rightarrow X$ が \mathfrak{h} -morphism なら, $\{f^{-1}(X_i)\} \in \mathcal{A}(Y)$ となる.

(3) special な \mathfrak{h} -space への \mathfrak{h} -morphism は, その Grothendieck topology に関する local property である. つまり, X を \mathfrak{h} -space, Z を special な \mathfrak{h} -space, $f: X \rightarrow Z$ を ringed spaces の間の morphism, $\{X_i\} \in \mathcal{A}(X)$ とする. この時 f が \mathfrak{h} -morphism であるためには, f の各 X_i への制限が \mathfrak{h} -morphism であることが必要十分である.

また special な \mathfrak{h} -space を構成するためには, 次の定理が便利である.

定理 X を analytic space, $\mathcal{X} = \{X_i\}$ をその open covering とする. 各 X_i 上の \mathfrak{h} -structure θ_i で, $X_i \cap X_j$ 上 $\theta_i = \theta_j$ となるものが与えられたとする. この時 X 上の special な \mathfrak{h} -structure θ で, \mathcal{X} は θ に関して admissible となり. かつ

各 X_i 上 $\theta = \theta_i$ となるものが唯一つ存在する。

以上のことを考えて、我々は次のようにして rigid analytic spaces を定義します。

定義 X を special な h -space とします。この時、 X の \mathcal{A} \mathcal{A} - \mathcal{A} の open h -subspace による admissible covering $\mathcal{A} = \{X_i\}$ が存在するならば、 X は semi-rigid であると言います。さらに $X_i \cap X_j$ も semi-rigid である時、 X は rigid である。または、 X は rigid analytic space であると言います。rigid analytic spaces の全体は、 h -morphisms と morphisms として category と成します。

(注意) X が semi-rigid となるべきことは当然ですが、 $X_i \cap X_j$ については、議論の余地のある所で、例えば、 $X_i \cap X_j$ は、 X_i および X_j の中で \mathcal{A} \mathcal{A} - \mathcal{A} の open h -subspace となっていることを仮定した方がよいかも知れません。

さて X を rigid analytic space とします。この時 X は、ringed space としての構造の他に、前ページの定理により、自然な Grothendieck topology と持ちます。さらに、rigid analytic spaces の間の morphisms は、この Grothendieck topology に関して連続となります。また、この Grothendieck topology に対応して sheaf theory が構成できますが、前ページの定理により、rigid analytic spaces の間の morphisms も、rigid analytic

は構造自身, \mathcal{O} の Grothendieck topologies に関する sheaf properties (local properties) とする。つまり。

X は rigid analytic space, $a \in k$ $|a| > 1$ なる k の元と
しよす。この時 $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$k\{z/a^{n+1}\} \cong \sum (c_m (z/a^{n+1})^m) \longrightarrow \sum (c_m/a^m) (z/a^n)^m \in k\{z/a^n\}$$

なる algebra の準同型より

$$k_n^* = \text{Max}(k\{z/a^n\}) \longrightarrow k_{n+1}^* = \text{Max}(k\{z/a^{n+1}\})$$

なる k の k_n^* を作り, これにより k_n^* の上の canonical

k -structure を作りあわせて, $k^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} k_n^*$ は rigid analytic space としよす。 k が k と k は代数的閉体なら,

これは $k_n^* = \{z \in k \mid |z| \leq |a^n|\}$ である k と同一視で

しよす。そこで X の open subset D に対し

$$\mathcal{O}(D) = \{f: D \longrightarrow k^* \mid f \text{ is } k\text{-morphism}\}$$

とおきよす。この時 $D \longmapsto \mathcal{O}(D)$ は, k の Grothendieck

topology $\mathcal{T}(X)$ に関する sheaf を成しよす。これを k の

\mathcal{O}_X であらわし, X の structure sheaf としよす。

(注意) 以上 k^* を作る操作を修正することにより, 任意の k 上の algebraic variety は, 自然に, k 上の rigid analytic space とみなせることがわたりよす。

(注意) D が k の k -space $\text{Max}(A)$ なら, $\mathcal{O}(D) = A$ となりよす。

§ 4. Kiehl の仕事 (Stein 性と proper maps)

X を rigid analytic space としする。この時

定義 X は、次のような列 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \dots \subseteq X_n \subseteq \dots \subseteq X$ が取れる時 quasi-Stein space であると言います。

- (1) X_n は、 X の openかつアフィンな部分集合である。
- (2) $\{X_n\}$ は、 X の admissible covering である。
- (3) $\mathcal{O}(X_{n+1})$ の、 $\mathcal{O}(X_n)$ の中への制限写像の像は、 $\mathcal{O}(X_n)$ の中で dense となっている。

定義から明らかのように、アフィン空間は quasi-Stein となっている。

さて X の Grothendieck topology $\mathcal{F}(X)$ についても、通常の場合と同様にして 連接層 の概念が定義できます。これに関し、Tate と Kiehl は、次の結果を得ています。

定理 X を quasi-Stein space, \mathcal{F} を X の Grothendieck topology に関する連接層とします。この時

- (1) $\mathcal{F}(X)$ の $\mathcal{F}(X_n)$ の中への制限写像の像は dense である。
- (2) cohomology $H^i(X, \mathcal{F})$ は、 $i \geq 1$ の時に消える。
- (3) X の各点 x において、germ \mathcal{F}_x は、 $\mathcal{O}_{X,x}$ -module として、global sections $\mathcal{F}(X)$ によって生成される。

(注意) 我々は、 X のすべての open subsets を使う代りに、

$\mathcal{D}(X)$ に入る coverings のみに関し. sheaf conditions を仮定して. sheaf theory や cohomology theory 等を作っている (Artin [1] 参照). したがって. 上記の定理は. X の quasi-Stein subsets による admissible covering \mathcal{U} に対しては. \mathcal{F} の covering cohomology $H^i(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ が $i \geq 1$ の時に消える: と保証しますが. admissible τ -covering に関しては. 何も言っていない.

X を アフィン空間とし. Y を その open アフィンな部分集合とします. この時. ある $0 \leq a \leq 1$ なる数 a と. ある

$$X \hookrightarrow \text{Max}(k\{T_1, \dots, T_n\}) = \Sigma$$

なる closed immersion τ

$$Y \subseteq \Sigma_a = \{z \in \Sigma \mid |T_i(z)| \leq a \ (i=1, \dots, n)\}$$

なるものが存在する時. $Y \subset\subset X$ とあらわします. この時

定義 $f: X \longrightarrow Y$ なる rigid analytic spaces の morphism は. 次の条件を満たすとき. proper であるという.

(1) f は separable である. つまり. f のひきおこす diagonal embedding $\Delta: X \longrightarrow Y \times_X X$ は. closed immersion である.

(2) Y の open affine subsets による admissible covering $\{Y_i\}$ で. 各 i に対し. $f^{-1}(Y_i)$ の有限個のアフィン集合による admissible coverings $\{U_{i,j}\}_j$ と $\{V_{i,j}\}_j$ で. $U_{i,j} \subset\subset V_{i,j}$ なるものが存在する.

Kiehl は、このとき、次の定理を証明しました。

定理 $f: X \rightarrow Y$ を、rigid analytic spaces の間の proper morphism, \mathcal{G} を coherent \mathcal{O}_X -module とする。この時 \mathcal{G} の f による direct image $R^i f_*(\mathcal{G})$ は coherent \mathcal{O}_Y -module となる。

この定理より、通常の場合と同様に、GAGA-type の結果が出ることもわかっていきます。

§ 5. $D \subseteq \mathbb{P}^1(k)$ (open subset) の場合

以下 § 5 では、 k は代数的閉体だと仮定します。したがって § 3 末の \mathcal{O} の定義等に出て来た k^* は、 k と同一視できます。

$\mathbb{P}^1(k)$ を k 上の 1次元射影空間とし、通常の場合と同様にして、 $\mathbb{P}^1(k) = k \cup \{\infty\}$ と同一視します。この時

$$\{z \in \mathbb{P}^1(k) \mid |z| \leq 1\} = \text{Max}(k\{z\})$$

$$\{z \in \mathbb{P}^1(k) \mid |z| \geq 1\} = \text{Max}(k\{1/z\})$$

と同一視でき、さらにその交わりは

$$\{z \in \mathbb{P}^1(k) \mid |z| = 1\} \cong \text{Max}(k\{x, y\} / (xy - 1))$$

となる。したがって、 $\{z \in \mathbb{P}^1(k) \mid |z| \leq 1\}$ と

$\{z \in \mathbb{P}^1(k) \mid |z| \geq 1\}$ の canonical structures をはりあわせ、

$\mathbb{P}^1(k)$ を rigid analytic space に出来ます。 $\mathbb{P}^1(k)$ のこの構

造は、1次分数変換 $PGL(2, k)$ で不変であり、かつその open subset k 上には、 $k^* = k$ として入る前記の構造を induce します。

D を $P^1(k)$ の open subset とします。この時、 $P^1(k)$ の上記の構造は、 D の上には k -structure を導きます。以下我々は、この k -space D の性質を調べます。

D を $P^1(k)$ の open subset とします。この時、Granet は、 D がアフィン部分集合になるためには、次の形の集合の有限和となる必要十分であることを証明しています。

(1) 1点

$$(2) \{z \in k \mid |z-a| \leq r, |z-a_i| \geq r_i \ (i=1, \dots, n)\}$$

$$(a, a_i \in k, r, r_i \in |k^x|, 0 \leq n < +\infty)$$

$$(3) \{z \in P^1(k) \mid |z-a_i| \geq r_i \ (i=1, \dots, n)\}$$

$$(a_i \in k, r_i \in |k^x|, 1 \leq n < +\infty)$$

そこで、以下(2)又は(3)の形の $\emptyset \neq U \subseteq P^1(k)$ なる集合を、connected open affine subset (COA と略す) と言います。この時、次の定理が成り立ちます。

定理 $D \subseteq P^1(k)$ (open subset) とし、 \mathcal{D} を D の open covering とします。この時、 \mathcal{D} は、任意の D に含まれる connected open affine subset U に対し、 $\mathcal{D}|U$ なる \mathcal{D} の U への制限が、有限個の connected open affine subsets による

covering に細分できる時、かつその時に限り、admissible となり得る。

これを系として、次のことがわかり得る。

系1 D のすべての connected open affine subsets による covering \mathcal{D} は、 D の admissible covering τ である。

系2 $f: D \rightarrow k$ なる写像が rigid analytic, \rightarrow $\mathcal{O}(D)$ に入るための必要十分条件は、 D に入る任意の connected open affine subset U に対し、それと前ページの (2) または (3) の形に書いた時、 f の U への制限が

$$f(z) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} c_m^{(\infty)} (z-a)^m + \sum_{i=1}^n \sum_{m=-1}^{-\infty} c_m^{(i)} (z-a_i)^m & \dots (2) \text{ のとき} \\ c^{(\infty)} + \sum_{i=1}^n \sum_{m=-1}^{-\infty} c_m^{(i)} (z-a_i)^m & \dots (3) \text{ のとき} \end{cases}$$

と、(各係数の) 一樣収束する級数に展開できることである。

さて系1より、特にこのようなる D は、admissible covering τ もつ、rigid analytic space となり得る。 $\tau: \tau$ 。次に、 D とその Grothendieck Topology $\mathcal{T}(D)$ と供、 τ 連結成分に分けることを考え得る。そのため、我々は、 D が、

$$D', D'' \subseteq D \text{ (open)}, D' \cap D'' = \emptyset, D' \cup D'' = D, \{D', D''\} \in \mathcal{T}(D) \\ \implies D' \text{ or } D'' = \emptyset$$

となり得る時、連結 τ であるということにしよう。このとき

定理 $D \subseteq P^1(k)$ (open subset) とする。この時以下は同値 τ である。

- (1) D は $\mathcal{D}(D)$ に関し連結である.
- (2) D の *connected open affine subsets* による *open covering* \mathcal{D} で, 次の性質をもちものが存在する: \mathcal{D} の任意の 2 元 U, U' に対し, 有限個の \mathcal{D} の元 U_1, U_2, \dots, U_n で, $U_1 = U, U_n = U'$, $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ ($i=1, \dots, n$) なるものが存在する.
- (3) D は, CRGC である. つまり, (1) D は少くとも 2 点を含む, (ii) 任意の $a, b \in D, a \neq \infty$ に対し
- $$\#\{ |a-z| \mid z \in \mathbb{P}^1(k) \setminus D, |a-z| \leq |a-b| \} < +\infty,$$
- かつ (i) 任意の $a \in D, r \in \mathbb{R}^+, r \leq \sup_{x, y \in D} |x-y|$ に対し, $C = \{z \in k \mid |z-a| \leq r\}$ とおくと, $D^c \cap C$ は有限個の $\{z \in k \mid |z-a| < r\}$ の形の開円板でおおわれる.
- (4) D 上の *rigid analytic* な関数に対して, 通常形の一致の定理が成り立つ.

さらに, 我々の上の定理の(2)を, 次のように強めることが出来る.

定理 $D \neq \emptyset, \emptyset \neq D \subsetneq \mathbb{P}^1(k)$ なる $\mathbb{P}^1(k)$ の open かつ $\mathcal{D}(D)$ に関し連結の部分集合とする. この時 $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \dots \subseteq D_n \subseteq \dots \subseteq D$ なる列で次の性質をもちものが存在する.

- (1) D_n は D の *connected open affine subset* である.
- (2) $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$
- (3) 各 D_n の任意の穴は, 常に D^c と交る.

さらに、このような列 $\{D_n\}$ は D の *admissible covering* であり、かつ任意のこのような列は、互に(包含関係に関して) *cofinal* となる。

以上のことより、 $P(k)$ の任意の *open subset* D が与えられた時、 D をまず $\mathcal{G}(D)$ に関し $\coprod_i D_i$ と連結成分に分け、さらに各連結成分に関しては、上記の定理を依って調べることが出来る。以下このような方針で、近似定理と、cohomologies について調べます。

D, D' を $P(k)$ の *open* かつ \mathcal{G} に関して連結な部分集合で、 $D \subseteq D'$ なるものとする。そこで制限写像

$$\mathcal{O}(D') \ni f \longrightarrow f|_D \in \mathcal{O}(D)$$

について、以下の二つの問題を考えます。

(1) この写像の像は、 D 上の一様収束位相に関して、... *dense* となるか?

(2) $\{D_n\}$ を前定理のように取る時、この写像の像は、各 D_n 上の一様収束位相 (D 上の“広義一様収束”位相) に関して、... *dense* となるか?

我々の、問1については必要十分条件を、問2については、(ほとんど必要十分条件となる)十分条件を与えることが出来る。この(2)に対する答の特殊な場合として、次の定理が得られます。([10] 参照)

定理 $D \subseteq \mathbb{P}^1(k)$ なる open subset τ , $\mathcal{O}(D)$ に関して連結なものととする。この時 $f: D \rightarrow k$ なる写像が rigid analytic となるための必要十分条件は, D に pole をもたない k -係数の有理関数から成る列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ で, 各 D_m ($\{D_m\}$ は前の通りとする) 上で, $n \rightarrow \infty$ とする時, $f_n(z)$ は $f(z)$ に一様収束するものが取れることである。

したがって我々の場合には Runge の定理 が成り立っています。

$D \subseteq \mathbb{P}^1(k)$ の真の open subset τ , $\mathcal{O}(D)$ に関して連結なものとします。列 $\{D_m\}$ を前のように取ります。この時期から D は quasi-Stein の条件 (1), (2) を満たしますが, $\{D_m\}$ の性質の (3) より, quasi-Stein の条件の (3) も成り立ちます。よって

定理 $D \subseteq \mathbb{P}^1(k)$ なる open subset τ , $\mathcal{O}(D)$ に関して連結であるとする。このとき D は, quasi-Stein space となる。

これより特に

系 $D \subseteq \mathbb{P}^1(k)$ なる open subset τ , $\mathcal{O}(D)$ に関する連結層 \mathcal{F} とし, \mathcal{F} は D 上の $\mathcal{O}(D)$ に関する連結層とします。この時 cohomology $H^i(D, \mathcal{F})$ は, $i \geq 1$ の時は消える。

また covering cohomology に関しては, 次のような結果が得られます。

$D \subseteq \mathbb{P}^1(k)$ の open subset, \mathcal{U} はその open covering, \mathcal{F} は

D 上の $\mathcal{O}(D)$ に関する連接層とします。さらに我々は、(1) \mathcal{U} は高々可算個の元より成る、(2) どの $U \in \mathcal{U}$ も高々可算個の連結成分しかもたない、(3) $D = \mathbb{P}^1(k)$ の時は $\mathcal{F} = \mathcal{O}_D$ である、の三つを仮定します。このとき

定理 上の条件のもとで、covering cohomology $H^i(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ は、 $i \geq 1$ の時消える。

とくに

系 $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{P}^1(k)$ の open subsets τ , \mathcal{O} に関して連結、かつ $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ なるものとする。この時、任意の $f \in \mathcal{O}(D_1 \cap D_2)$ に対し、 $g \in \mathcal{O}(D_1)$ と $h \in \mathcal{O}(D_2)$ で

$$f(z) = g(z) + h(z) \quad \text{on } D_1 \cap D_2$$

なるものが存在する。

この系において、 $\{D_1, D_2\}$ は、 $D_1 \cup D_2$ の admissible covering でなくても良いことに注意しておきます。

§ 6. その他、問題など

以下、こういう事に関し、残っている問題をいくつか上げておきます。

(A) 複素 1 次元の proper な rigid analytic space は、projective となることがわかっています (Gerritzen - Grauert [3] 参照)。

にて

[問題] 2次元の場合はどうなるか? 分類せよ。

が考えられます。結果は、大体 complex の場合と似たものになると思われそうですが、ある種のものを実際に存在することと示すのは、場合によっては難しくなるものと思われます。例えば、 \mathbb{C} 上では、Hopf surface は、 \mathbb{C} の場合と同様に作れますが、complex torus に当るものを扱うには、多少工夫がいります。

(B) Stein space について、complex の場合と同様で、特徴づけは出来るか? また、実用上便利で、Stein space とするための十分条件を求めよ。

(C) universal covering に当るものは、どうすれば良いか? このような体上の保型関数の理論はあるが (Roquette [3], Gerritzen [2] など参照), 現在のところ、elliptic curve の場合、bad reduction をもつ場合は扱えるが、good reduction をもつ場合は扱えない。

(D) rigid analytic space の Grothendieck topology は、一般には、計算するのが容易でない。しかし1次元の場合は、p. 17 の定理のようには簡単になっています。この原因は、 $f: \text{Max}(A) \rightarrow \text{Max}(B)$ のアフィン空間の間の rigid な map の像が、 $B = \mathbb{C}\{z\}$ (1変数, \mathbb{C} は代数的閉体) の場合

には、 $\text{Max}(k[x])$ のアフィン部分空間となる点にあります。
 そこで同様のことが、一般の場合にも成り立つか疑問です。
 少くとも、現在のこと。反例は知られていないようです。

References

- [1] Artin, M.: Grothendieck topologies, Lecture note at Harvard University, 1962.
- [2] Gerritzen, L.: Zur nichtarchimedischen Uniformisierung von Kurven, Math. Ann., 210 (1974), 321-337.
- [3] Gerritzen, L., Grauert, H.: Die Azyklizität der affinoiden Überdeckungen. In: Global Analysis, pp. 159-184. Tokyo-Princeton: U. of Tokyo P., Princeton U. P. 1969.
- [4] Godement, R.: Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, Paris 1958.
- [5] Grauert, H.: Affinoide Überdeckungen eindimensionaler affinoider Räume, Publ. Math. I.H.E.S., 34 (1968), 1-36.
- [6] Grauert, H., Remmert, R.: Nichtarchimedischer Funktionentheorie. In: Weierstrass-Festband, pp. 393-476. Opladen: Westdeutscher Verlag 1966.

- [7] Kiehl, R.: Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen nichtarchimedischen Funktionentheorie, *Inventiones math.*, 2 (1967), 191-214.
- [8] _____: Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, *Inventiones math.*, 2 (1967), 256-273.
- [9] Krasner, M.: Rapport sur le prolongement analytique dans les corps valués complets par la methode des éléments analytiques quasi-connexes, *Bull. Soc. Math. France*, Mémoire 39-40 (1974), 131-254.
- [10] Morita, Y.: Analytic functions on an open subset of $P^1(k)$, to appear.
- [11] _____: Krasner's analytic functions and rigid analytic spaces. In: Proceedings of the conference on p-adic analysis held in Nijmegen, the Netherlands, pp. 134-142. Nijmegen, the Netherlands: The Catholic University of Nijmegen 1978.
- [12] _____: On the induced h-structure on an open subset of the rigid analytic space $P^1(k)$, to appear.

- [13] Roquette, P.: Analytic theory of elliptic functions over local fields. Hamb. Math. Einzelschriften, Neue Folge n^o1. Vandenhoeck und Ruprecht in Göttingen (1970).
- [14] Tate, J.: Rigid analytic spaces, Inventiones math., 12 (1971), 257-289.