数理解析研究所講究録
第 361 巻 1979 年 106-115

Micro-microlocal analysis の基礎

京大 数研　　柏原正樹

河合隆裕

正則パラメータを持つ超函数の性質は極めて正常で，特に病理現象は生じない。しかしながら，正則パラメータを持つ microfunction の扱いには注意を要する。（たとえば，正則パラメータに関して境界値を取ったものが microfunction になるとは限らない。実際 $(1/(x_2 - ix_1^2))Y(x_2)$ は，$C^{\mathbb{R}}_{\{x_2=0\}|\mathbb{C}^2}(\{x_1 \neq 0\})$ の元を定め，特に，$\mathrm{Im}\, x_1 > 0$ では well-defined な x_1 について正則に依存する microfunction であり，しかも

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + 2ix_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(\frac{1}{x_2 - ix_1^2}Y(x_2)\right) = -\frac{2\delta(x_2)}{x_1}$$

を満たすけれども，その境界値は microfunction にはならない。もし，なったとすれば，Lewy-溝畑型の方程式 $(\partial/\partial x_1 + 2ix_1\partial/\partial x_2)u = 0$ が $(0, i\,dx_2\infty)$ で基本解を持つことになってしまうからである。）しかも，正則性の伝播，方程式の可解性等と関係して重要なのは，正則パラメータを持つ超函数よりむしろ microfunction であり，その組織的な取扱い方法が開発できれば，線型微分方程式論に一つの新しい視点を与えることになると思われる。実際，Bony，Schapira 等が提唱した micro-microlocal analysis はその一つの試みであった。彼等は，パラメータの正則性に注目して，その部分に

関し，正則函数から microfunction を得るのと同様の手続により，microfunction を更に microlocalize することをその出発点とした。この方向に沿って，Laurent は，更に進めて，函数についてのみならず，作用素についても S-K-K の議論と同様にして超・超局所化が可能であることを指摘した。

本報告では，擬微分方程式の解の漸近展開への応用を目標としつつ，超・超局所解析の基礎付けを行う。尚，以下で(†)を付けた陳述の証明はまだ完全ではない。

以下，M を n 次元実解析的多様体，X をその複素化とする。Λ を T^*X 内の Lagrange 多様体であって $\Lambda^{\mathbb{R}} \underset{\mathrm{def}}{=} \Lambda \cap \sqrt{-1}\,T^*M$ も又実 Lagrange 多様体になるものとし，$\mathcal{M}$ を Λ に台を持つ単純極大過剰決定系とする。$\mathcal{N} = \mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{M}^*$ と定めれば $\mathcal{N}$ は $\mathcal{E}_{X\times X}$-加群として $\mathcal{M}$ の取り方にはよらない。ここで

$$\Delta^a = \{(x,y;\xi,\eta) \in T^*(X\times X)\ ;\ x=y\ ,\ \xi=-\eta\}$$

$$\widetilde{{}_{\Delta^a}(\Lambda\times\Lambda^a)^*} = (\Lambda\times\Lambda^a - \Delta^a) \sqcup T^*_{\Delta^a}(\Lambda\times\Lambda^a)$$

と定め，$\widetilde{{}_{\Delta^a}(\Lambda\times\Lambda^a)^*}$ から $\Lambda\times\Lambda^a$ への写像を π と記す。

又，$T^*(\Lambda\times\Lambda^a) - T^*_{\Lambda\times\Lambda^a}(\Lambda\times\Lambda^a) \longrightarrow P^*(\Lambda\times\Lambda^a)$ なる標準的写像を γ と記す。

以上の記号の準備の後に，我々は次のような層を考える。

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{\mathcal{D}}^\infty_\Lambda \underset{\text{def}}{=} \mathcal{H}^n_{\Delta^a}(\mathcal{O}^\infty) \\[2ex] \tilde{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}}_\Lambda \underset{\text{def}}{=} \mathcal{H}^n_{T^*_{\Delta^a}(\Lambda\times\Lambda^a)}(\pi^{-1}\mathcal{O}^\infty)^a \\[2ex] \tilde{\mathcal{E}}^\infty_\Lambda \underset{\text{def}}{=} \gamma^{-1}\gamma_* \tilde{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}}_\Lambda \end{array}\right.$$

以下の議論から判るように，これらが，超・超局所解析において $\mathcal{D}^\infty$, $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$, $\mathcal{E}^\infty$ に各々対応する層となっている。具体的計算に用いる為に，$\tilde{\mathcal{D}}^\infty_\Lambda$ 及び $\tilde{\mathcal{E}}^\infty_\Lambda$ の元に対応する表象の構造を調べておこう。定理1においては $\Lambda = T^*_{\{0\}}\mathbb{C}^n$ とする。

定理1 (i) $P\in\tilde{\mathcal{D}}^\infty_\Lambda(\Omega)$ ($\Omega\subset\Lambda\cong\mathbb{C}^n_\xi$) は，次の条件(1)～(3)を満たす $p_{ij}(x,\xi)$ を用いて $P=\sum_{i\geq 0,\, j} p_{ij}(x,D)$ と表示され，又，逆も成立する。

(1) p_{ij} は x について i 次斉次多項式，ξ について j 次斉次となる Ω での正則函数。

(2) 任意の $K\Subset\mathbb{C}^n_x\times\Omega$ と任意の $\varepsilon>0$ に対して ある $C_{\varepsilon,K}$ が存在して

$$\sup_K |p_{ij}| \leqq \frac{C_{\varepsilon,K}}{j!}\varepsilon^j \quad (j\geqq i)。$$

(3) 同じく ある $R_{\varepsilon,K}$ が存在して

$$\sup_K |p_{ij}| \leqq \frac{(i-j)!}{i!} R_{\varepsilon,K}^{i-j} \varepsilon^i \qquad (j<i)。$$

(ii)[†] $P \in \widehat{\tilde{\mathcal{E}}}{}^{\infty}_{\Lambda}(U)$ $(U \subset T^*\Lambda \cong T_\Lambda(T^*X) \cong \mathbb{C}^n_x \times \mathbb{C}^n_\xi)$ は，次の条件 (1′)〜(3′) 及び (4), (5) を満たす $p_{ij}(x,\xi)$ を用いて $P = \sum p_{ij}(x,D)$ と表示され，逆も成立する。

(1′) p_{ij} は x について i 次斉次，ξ について j 次斉次となる U での正則函数。

(2′) 任意の $K \Subset U$ と任意の $\varepsilon>0$ に対してある $C_{\varepsilon,K}$ が存在して

$$\sup_K |p_{ij}| \leqq \frac{C_{\varepsilon,K}}{j!} \varepsilon^j \qquad (j \geqq i \geqq 0)。$$

(3′) 同じくある $R_{\varepsilon,K}$ が存在して

$$\sup_K |p_{ij}| \leqq \frac{(i-j)!}{i!} R_{\varepsilon,K}^{i-j} \varepsilon^i \qquad (j<i,\ i \geqq 0)。$$

(4) 任意の $K \Subset U$ に対してある R_K が存在して

$$\sup_K |p_{ij}| \leqq (-j)!\, R_K^{-j} \qquad (j<i<0)。$$

(5) 任意の $K \Subset U$ に対してある R_K が存在し，更に任意の $\varepsilon>0$ に対して $C_{\varepsilon,K}$ が存在して

$$\sup_K |p_{ij}| \leqq \frac{(-i)!}{(j-i)!} C_{\varepsilon,K}\, \varepsilon^{j-i} R_K^{-i} \qquad (j \geqq i,\ i<0)。$$

注意1. $\mathcal{E}_X^\infty|_\Lambda \subset \widetilde{\mathcal{D}}_\Lambda^\infty$ が成り立ち，その具体的対応は，$\mathcal{E} \ni P = \sum_j p_j(x, D)$ に対して，$p_{ij}(x,\xi) \underset{\mathrm{def}}{=} (p_j(x,\xi)$ の x について i 次斉次な部分）と定めることにより与えられる。

注意2. $T^*\Lambda \cong T_\Lambda(T^*X)$ なる（Hamiltonian を用いての）同一視は，以下においてもしばしば用いる。

注意3. $\Lambda = \{(x,\xi) \in T^*\mathbb{C}^n ;\ x_1 = \cdots = x_\ell = 0,\ \xi_{\ell+1} = \cdots = \xi_n = 0\}$ の場合には，"$p_{ij}(x,\xi)$ は $(x_1,\cdots,x_\ell,\xi_{\ell+1},\cdots\xi_n)$ について i 次斉次，ξ について j 次斉次"，とすれば定理1と同様の結果が成立する。

$\widetilde{\mathcal{D}}_\Lambda^\infty$ 及び $\widetilde{\mathcal{E}}_\Lambda^\infty$ が自然な結合により環の層となることは，$\mathcal{D}^\infty$ 及び $\mathcal{E}^\infty$ の場合とほぼ同様にして確かめ得る。次に，これ等の作用する層を構成しよう。以下，$\widetilde{\Lambda^{\mathbb{R}}}{}^* \longrightarrow \Lambda$ なる写像も π と記す。又，$\mathcal{E}^{\mathbb{R}} \underset{\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{M}$ を $\mathcal{M}^{\mathbb{R}}$ と記す。

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{B}}_\Lambda \underset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{H}^n_{\Lambda^{\mathbb{R}}}(\mathcal{M}^{\mathbb{R}}) \\ \widetilde{\mathcal{C}}_\Lambda \underset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{H}^n_{T^*_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\Lambda}(\pi^{-1}\mathcal{M}^{\mathbb{R}})^a \end{cases}$$

この時，次の事実が成立する。

定理2. (i) $\mathcal{M}^{\mathbb{R}}$ 及び $\mathcal{M}^\infty$ はいずれも $\widetilde{\mathcal{D}}_\Lambda^\infty$-加群。

(ii) $\tilde{\mathcal{B}}_\Lambda$ は $\tilde{\mathcal{D}}^\infty_\Lambda$-加群。

(iii) $\tilde{\mathcal{C}}_\Lambda$ は $\tilde{\mathcal{E}}^\infty_\Lambda$-加群。

(iv) $0 \to \mathcal{M}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{B}}_\Lambda \longrightarrow \pi_* \tilde{\mathcal{C}}_\Lambda \to 0$。

(v) $\mathcal{C}_M|_\Lambda \rightarrowtail \tilde{\mathcal{B}}_\Lambda$ なる $\mathcal{E}^\infty_X$-準同型写像が存在する。(この写像は $\mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{C}_M) = \mathbb{C}_\Lambda$ の non-zero section の取り方に依存する。)

(iv), (v) により microfunction の micro-micro-analyticity を考えることができる。又, (ii), (v) を用いて "microfunction の (Λ に関する) 漸近展開" と云う表現に, 次のようにして明快な意味を与えることができる。

例えば $\Lambda = T^*_Y X$ ($Y = \{(x_1, x') \in X \subset \mathbb{C}^n;\ x_1 = 0\}$) の場合に話を進めてみよう。この時 次の方程式 (6) の microfunction 解 u の漸近展開を考える。

(6) $\quad b\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) u = Pu$

(ここで $b(\lambda)$ は m 次多項式, $\operatorname{ord} P \leqq m$ かつ $P \in \mathcal{E}_\Lambda(-1)$ とする。)

(確定特異点型の極大過剰決定系の断面 u に対しては, それが必ず (6) の形の方程式を満たすことを示し得る。)

この時, 次の定理3 を示すことができる。以下 簡単の為,

$b(\lambda)=0$ の根 $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ に対して $\lambda_i-\lambda_{i'}\notin\mathbb{Z}$ $(i\neq i')$ を仮定する。

定理3. 方程式(6)は $\widetilde{\mathcal{D}}_\Lambda^\infty$-加群として，次の方程式(7)に同型である。

(7) $b\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\tilde{u}=0$

定理2(ii)とこの定理を合わせれば，(6)の解 u が $\sum_{i=1}^m Q_i\left((x_1+i0)^{\lambda_i}\mu_i(x')\right)$ $\left(Q_i\in\widetilde{\mathcal{D}}_\Lambda^\infty,\ \mu_i(x')\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{n-1}}\right)$ と云う展開を $\widetilde{\mathcal{B}}_\Lambda$ で持つことが判る。

尚，定理3の証明において，実は，$\widetilde{\mathcal{D}}_\Lambda$ と呼ぶべき，$\widetilde{\mathcal{D}}_\Lambda^\infty$ より狭いクラスの作用素によって(6)と(7)の同型を与えることが出来る。その事実を用いれば，いくつかの"比較定理"($C_{Y|X}$-解と $\hat{C}_{Y|X}$-解の間の，etc.)を与えることもできる。

次に $\widetilde{\mathcal{E}}_\Lambda^\infty$ における作用素の可逆性について考察する。

定理4. $P\in\widetilde{\mathcal{E}}_\Lambda^\infty$ が $p^*\in T^*\Lambda\simeq T_\Lambda(T^*X)$ において次の条件(8),(9)を，ある $(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2$ に対して満たすならば，P は p^* で可逆である。

(8) ある $c>0$ があって

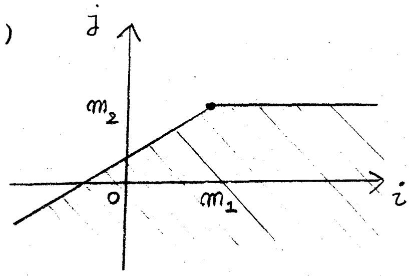
$$p_{ij}=0 \qquad (j>c(i-m_1)+m_2)$$

(9) $\quad p_{ij}=0 \quad (j>m_2)$

かつ

$p_{m_1,m_2}(p^*)\neq 0$

(図)



(斜線部以外の (i,j) に対して $p_{ij}=0$)

この結果を用いて $\mathcal{E}_X$-加群 $\mathcal{M}$ の $\widetilde{\mathcal{E}}_\Lambda^\infty$-加群としての構造を調べよう。まず，$\mathcal{J}_\Lambda \underset{def}{=} \{P\in\mathcal{E}_X(1);\ \sigma(P)|_\Lambda=0\}$，$J_\Lambda(1)\underset{def}{=}\{f\in\mathcal{O}_{T^*X}(1);\ f|_\Lambda=0\}$ と定め，更に

$$A \underset{def}{=} \bigoplus_k \left(\mathcal{J}_\Lambda^k/(\mathcal{J}_\Lambda^{k-1}+\mathcal{J}_\Lambda^{k+1}(-1))\right) \left(=\bigoplus_k J_\Lambda(1)^k/J_\Lambda(1)^{k-1}\mathcal{O}_{T^*X}(1)\right)$$

と定義する。次に導入する $T_\Lambda(T^*X)$ の部分集合 $Ch_\Lambda(\mathcal{M})$ は将来 $\mathcal{M}$ の Levi 条件を考察する際，重要な役割を果たすものと思われる。

$\mathcal{L}$ を $\mathcal{M}$ の連接的 $\mathcal{E}(0)$-部分加群であって $\mathcal{M}=\mathcal{E}\mathcal{L}$ となるものとする。この時，

$$Ch_\Lambda(\mathcal{M}) \underset{def}{=} \mathrm{supp}\left(\mathcal{O}_{T_\Lambda(T^*X)} \underset{A}{\otimes} \left(\bigoplus_k \left(\mathcal{J}_\Lambda^k\mathcal{L}/(\mathcal{J}_\Lambda^{k-1}\mathcal{L}+\mathcal{J}_\Lambda^{k+1}(-1)\mathcal{L})\right)\right)\right)$$

と定める。（これは $\mathcal{L}$ の取り方によらない。）

注意1. $T_\Lambda(T^*X)\simeq T^*\Lambda$ なる同一視の下で，$Ch_\Lambda(\mathcal{M})$ は $T^*\Lambda$ の包合的部分集合になると予想する。

注意2. $\mathcal{M}=\mathcal{E}/\mathcal{J}$ の時，

$$Ch_\Lambda(\mathcal{M}) = \bigoplus_k A/(\tilde{\sigma}_k(\mathcal{J}_\Lambda^k \cap \mathcal{J}))$$

が成立する。但し，ここで $\tilde{\sigma}_k$ とは，$\mathcal{J}_\Lambda^k/(\mathcal{J}_\Lambda^{k-1} + \mathcal{J}_\Lambda^{k+1}(-1)) \simeq$
$\simeq J_\Lambda(1)^k/J_\Lambda(1)^{k-1}\mathcal{O}_{T^*X}(1)$ なる同型を用いて定義される，$\mathcal{J}_\Lambda^k$ から，$T_\Lambda(T^*X)$ 上の k 次斉次式のつくる層 $J_\Lambda(1)^k/J_\Lambda(1)^{k-1}\mathcal{O}_{T^*X}(1)$ への準同型写像である。

定理4と上の注意2を合わせて次の定理を得る。

定理5. $Ch_\Lambda(\mathcal{M}) \supset \mathrm{Supp}(\hat{\mathcal{E}}_\Lambda^\infty \otimes \mathcal{M}|_\Lambda)$

尚，定理4から，より精密に

(10) $\quad C_\Lambda(\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}) \supset \mathrm{Supp}(\hat{\mathcal{E}}_\Lambda^\infty \otimes \mathcal{M}|_\Lambda)$

を得ることもできる。（ここで C_Λ は Λ に沿っての normal cone であり，$Ch_\Lambda(\mathcal{M}) \supset C_\Lambda(\mathrm{Supp}\,\mathcal{M})$ を示すことができる。）

注意．(10) において等号が成り立つと予想する。

最後に，Laurent によって考察された作用素の超・超局所化と本報告で論じた作用素の関係について一言する。

今，V を T^*X 内の余次元 $d\,(<n)$ の正則包合的

部分多様体とする。ここで $\Delta^a \cap V \times V^a$ を通る $V \times V^a$ の陪特性帯の全体は Lagrange 多様体 $\tilde{V}$ を定める。そこで $\tilde{V}$ に台を持つ単純極大過剰決定系 $\mathcal{M}$ を用いて $\mathcal{H}^d_{T^*_{\Delta^a}\tilde{V}}(\pi^{-1}\mathcal{M}^\infty)$ を考えると，これが Laurent によって考察された作用素の空間を与える。ここで $d=n$ とした極限的な場合が本講で論じた $\tilde{\mathcal{E}}^\infty_\Lambda$ となる。

議論の詳細及び文献については，現在準備中の論文に譲る。