数理解析研究所講究録
第361巻 1979年 180-183

Impenetrable Boson の密度行列

京大数理研 佐藤幹夫・三輪哲二
・神保道夫

非線型波動の分野で，いわゆるソリトン解を持つ方程式はここ10年程の間に詳しく研究され，無限自由度をもつ完全積分可能系としての性格が明らかにされて来た。その方法も実に多種多様で出尽くした感さえあるが，まだ最終的、統一的理解には達していないように思われる。ことに非線型方程式を場の運動方程式とみなす量子化の問題は，(開拓途上であり)現在各国で研究が進められつつある重要な課題である[1]。

ここで問題にするのは，次の非線型シュレディンガー方程式

$$(1)\qquad i\frac{\partial\phi}{\partial t}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+c\,\phi^*\phi^2 \qquad (c>0)$$

$$[\phi(x,t),\ \phi^*(x',t)]=\delta(x-x')$$

に対する $2n$ 点函数の計算である。

少し正確に述べよう。まず(1)を有限の周期的箱 $0\leqq x\leqq L$ で考える。粒子数演算子 $N=\int dx\,\phi^*\phi$ は(1)のハミルトニアンと可換だから，その固有値Nに属する固有空間での基底状

態ベクトル $|vac\rangle_N$ が考えられる。この時，次の期待値

(2) $\quad {}_N\langle vac|\phi^*(x_1,0)\cdots\phi^*(x_n,0)\phi(x'_1,0)\cdots\phi(x'_n,0)|vac\rangle_N$

を，密度 $\rho_0=N/L$ を一定に保って $N,L\to\infty$ とした極限で計算したい。$|vac\rangle_N$ は，$\phi(x,t)|vac\rangle_0=0$ $(\forall x,t)$ で特徴づけられる状態 $|vac\rangle_0$ に，$N(\to\infty)$ 個の粒子をつめて得られる：

(3) $\quad |vac\rangle_N=\dfrac{1}{\sqrt{N!}}\displaystyle\int_0^L\!\!\cdots\!\!\int dx_1\cdots dx_N\,\psi_{N,L}(x_1,\cdots,x_N;c)\phi^*(x_1,0)\cdots\phi^*(x_N,0)|vac\rangle_0$

この意味で，“密度行列”(2) の計算は，Sine-Gordon 方程式や Massive Thirring 模型のような相対論的な場合におこる，いわゆる Dirac の海を埋める問題の，一つのケース・スタディとみなせる。但し (3) で，$\psi_{N,L}$ は次の N 体シュレディンガー方程式

(4) $\quad H_N\psi_{N,L}=E\psi_{N,L}\ ,\quad H_N=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^N\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+c\sum_{i<j}\delta(x_i-x_j)$

の基底状態の波動函数で，とくに $c\to\infty$ ならば次のような初等函数である。

(5) $\quad \psi_{N,L}(x_1,\cdots,x_N;\infty)=\dfrac{1}{\sqrt{N!L^N}}\displaystyle\prod_{j<k}\left|e^{2\pi i x_j/L}-e^{2\pi i x_k/L}\right|$

結合定数 c が ∞ の場合，(4) は互いに相手の粒子を透過できないボーズ粒子のガスを表わす(“impenetrable boson”)。この場合に限れば，密度行列の計算は，モノドロミー不変変形理論に持ち込んで実行することができる。一般の n でも全く並行に進むので，以下 $n=1$ とする。このとき (5) を使うと，問題の密度行列は

(6) $$\rho(|x-x'|)=\lim_{\substack{N,L\to\infty \\ \rho_0=N/L:\,\mathrm{fix}}} N\int_0^L\!\!\cdots\!\int dy_2\cdots dy_N\,\psi^*_{N,L}(x,y_2,\cdots,y_N;\infty)\times\psi_{N,L}(x',y_2,\cdots,y_N;\infty).$$

結果は次のようになる。

(7) $\sigma(x)=x\frac{d}{dx}\log\rho(x)$ とおくと

$$\left(x\frac{d^2\sigma}{dx^2}\right)^2=-4\left(x\frac{d\sigma}{dx}-1-\sigma\right)\left(x\frac{d\sigma}{dx}+\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2-\sigma\right).$$

別の言い方をすれば、

(8) $$\rho(x)=\rho_0\exp\int_0^x dx'\left(\frac{x'}{4y(1-y)^2}\left(\left(\frac{dy}{dx'}\right)^2+4y^2\right)-\frac{(1+y)^2}{4x'y}\right),\quad y=y(x')$$

但し $y=y(x)$ は次の第5種パンルヴェ方程式の解。

(9) $$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{y-1}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{(y-1)^2}{x^2}\left(\alpha y+\frac{\beta}{y}\right)+\frac{\gamma y}{x}+\frac{\delta y(y+1)}{y-1}$$

$$\left(\alpha=\tfrac{1}{2},\ \beta=-\tfrac{1}{2},\ \gamma=-2i,\ \delta=2\right).$$

これらを用いて，$x\to 0$, $x\to\infty$ における $\rho(x)$ の振舞いを計算することができる[2]。ことに $x\to\infty$ での展開を，微分方程式なしに求めることはかなり難しい。

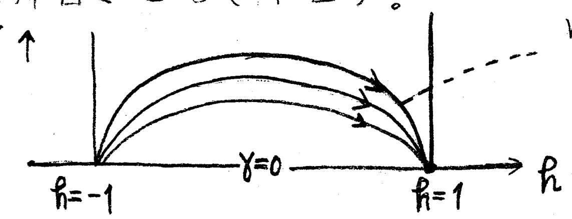
計算の方法は，次の XY 模型

(10) $$H_{XY}=-\sum_m\left((1+\gamma)S^x_m S^x_{m+1}+(1-\gamma)S^y_m S^y_{m+1}+h S^z_m\right)$$

$$S^\alpha_m=I_2\otimes\cdots\otimes\overset{m}{\tfrac{1}{2}\sigma^\alpha}\otimes\cdots\otimes I_2\qquad(\alpha=x,y,z)$$

$$\sigma^x=\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix},\quad \sigma^y=\begin{pmatrix} & -i\\ i & \end{pmatrix},\quad \sigma^z=\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}$$

の適当なスケール極限をとって得られるモデルの n 点函数の計算に帰着させる（下図）[3]。



$\sqrt{1-h^2}=\varepsilon$, $\gamma=g\varepsilon$
$x=m\varepsilon$: fix $(\varepsilon\to 0, m\to\infty)$
（最後に $g\to 0$ の極限をとる）

詳細は，プレプリント"Studies on Holonomic Quantum Fields XV"（RIMS 296）及び"XVI"（RIMS 297）を参照して下さい。

ついでながら，(6) は，有限区間 $(-x, x)$ で核 $\frac{\sin(\xi-\eta)}{\xi-\eta}$ をもつ積分作用素のフレドホルム小行列式として表わされる。従って，このフレドホルム小行列式（及び行列式自体も）が第5種パンルヴェ函数で表わせることがわかる。この附近は現在研究中である。

1) Faddeev, preprint（仏訳あり）.
Bergknoff-Thacker, Phys. Rev. Lett. 42, 135 (1979)
Honerkamp-Weber, preprint, Univ. Freiburg, THEP 79/4 (1979).
ことにFaddeev の Review は（新しい結果はあまりないが），Baxter模型を逆散乱法の立場から見る等最も視野が広く面白い。

2) 琉球大の毛織さんが計算された。

3) この方法は Vaidya-Tracy による。彼等は deformation theory を持っていないので複雑な級数表示を導くに止まった。