数理解析研究所講究録
第365巻 1979年 46-64

G-作用のある多様体上の横断的楕円型作用素の指数とV-多様体上の楕円型作用素の指数

学習院大学 理学部 川崎徹郎

1. 有限群の場合 (Atiyah-Singer の定理)

G を有限群, M を G が滑らかに作用している閉多様体とする. M 上に2つの G-同変複素ベクトル束 E, F と G-不変楕円型擬微分作用素 $P: C^\infty(M;E) \longrightarrow C^\infty(M;F)$ が与えられたとする. すると作用素 P の核(零空間)及び余核は G の有限次元表現になる. その2つの表現の指標の差を楕円型作用素 P の G-指数 $\mathrm{ind}_G P$ と呼ぶ.

$$\mathrm{ind}_G P = \mathrm{char}\,[\mathrm{Kernel}\, P] - \mathrm{char}\,[\mathrm{Coker}\, P] \quad \in R(G).$$

G-指数は G-不変楕円型作用素の同変ホモトピー類にしか依らない. 作用素 P は主表象 $\sigma(P)$ を定めるが, $\sigma(P)$ を余接ベクトル束 T^*M 上の台コンパクトな差束と考える時, 安定同値類

$[\sigma(P)] \in K_G(\tau M)$ を与えている．（計量により $K_G(\tau M)$ と $K_G(\tau^* M)$ を同一視している）．この時，G-指数は $[\sigma(P)] \in K_G(\tau M)$ に対し，$\mathrm{ind}_G P \in R(G)$ を対応させることにより，準同型

$$\mathrm{ind}_G : K_G(\tau M) \longrightarrow R(G)$$

を定めている．$u \in K_G(\tau M)$ に対し，$\mathrm{ind}_G u \in R(G)$ は G 上の滑らかな函数である．従って $g \in G$ に於る値 $(\mathrm{ind}_G u)(g)$ が定まるが，Atiyah-Singer の定理はこの値を τM^g 上の u 及び $\tau M/M^g$ の特性類の積分として表わしている．

$$(\mathrm{ind}_G u)(g) = (-1)^{\dim M^g} \langle ch^g(u)\, \mathcal{I}^g(M), [\tau M^g] \rangle$$

ここで特性類 $ch^g(u) \in H_c^*(\tau M^g; \mathbb{C})$，$\mathcal{I}^g(M) \in H^*(M^g; \mathbb{C})$ の定義を思い出そう．$u \in K_G(\tau M)$ に対し $u|_{\tau M^g}$ を τM^g 上の安定ベクトル束と思う．元 $g \in G$ の作用は底空間を動かさないから，g は $u|\tau M^g$ の纖維を固有空間に分解し，直和分解

$$u|_{\tau M^g} = \bigoplus_{0 \le \theta < 2\pi} u_g^\theta \qquad (u_g^\theta \text{ は固有値 } e^{i\theta} \text{ の固有空間.})$$

を与える．今，特性類 ch^θ を，

$$ch^{\theta}(\xi) = \sum_{j=1}^{k} e^{x_j + i\theta} \qquad \left(c(\xi) = \prod_{j=1}^{k}(1+x_j)\right)$$

で定義すると，$ch^g(u) \in H_c^*(\tau M^g ; \mathbb{C})$ は

$$ch^g(u) = \sum_{0 \leq \theta < 2\pi} ch^{\theta}(u_g^{\theta})$$

で与えられる．実ベクトル束 $\tau M|M^g$ は g の作用により次の様に分解する．

$$\tau M|_{M^g} = \tau M^g \oplus \bigoplus_{0<\theta\leq\pi} V_g^{\theta}$$

$$\left(\begin{array}{l} V_g^{\theta}\ (0<\theta<\pi) \text{ は複素ベクトル束で，} g \text{ は } e^{i\theta} \text{倍で働く．} \\ V_g^{\pi} \text{ は実ベクトル束で，} g \text{ は} (-1) \text{倍で働く．} \end{array}\right)$$

ここで実ベクトル束 τM^g，V_g^{π} の Pontrjagin 類を形式的に

$$p(\tau M^g) = \prod(1+x_j^2), \quad p(V_g^{\pi}) = \prod(1+y_j^2)$$

とおく時，特性類 $\mathcal{J}(M^g)$，$\mathcal{R}(V_g^{\pi})$ を

$$\mathcal{L}(M^g) = \mathcal{T}(\tau M^g \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \prod_j \left(\frac{x_j}{1 - e^{-x_j}} \frac{-x_j}{1 - e^{x_j}} \right)$$

$$\mathcal{R}(\nu_g^\pi) = \prod_j \left(\frac{2}{1 + e^{y_j}} \frac{2}{1 + e^{-y_j}} \right)$$

で定義し，複素ベクトル束 ν_g^θ $(0<\theta<\pi)$ の Chern類を形式的に

$$c(\nu_g^\theta) = \prod_j (1 + z_j)$$

とおく時，特性類 $\mathcal{S}^\theta(\nu_g^\theta)$ を

$$\mathcal{S}^\theta(\nu_g^\theta) = \prod_j \left(\frac{1 - e^{i\theta}}{1 - e^{z_j + i\theta}} \frac{1 - e^{-i\theta}}{1 - e^{-z_j - i\theta}} \right)$$

で定義する．この時特性類 $\mathcal{L}^g(M)$ は

$$\mathcal{L}^g(M) = \det{}_{\mathbb{R}}(1 - g|_{\nu_g})^{-1} \mathcal{R}(\nu_g^\pi) \prod_{0<\theta<\pi} \mathcal{S}^\theta(\nu_g^\theta) \, \mathcal{L}(M^g)$$

で定義される．但し $g|_{\nu_g}$ は法束 ν_g への g の作用を表わす線型変換で，g は ν_g 上固有値 1 を持たぬから，$1 - g|_{\nu_g}$ は可逆である．

ここで我々は G-不変断面へ働く作用素

$$P^G : C^\infty(M;E)^G \longrightarrow C^\infty(M;F)^G$$

の指数を考える．不変断面 $s: M \to E$ は軌道空間上の断面 $\bar{s}: G\backslash M \longrightarrow G\backslash E$ により一意的に定まるから，P^G は軌道空間 $G\backslash M$ 上の作用素と考えられることに注意する．我々は後にこの視点で以下の結果を一般化するであろう．

G の既約指標の正規直交性により，

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind} P^G &= \dim[\operatorname{Kernel} P^G] - \dim[\operatorname{Cokernel} P^G] \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} (\operatorname{ind}_G P)(g) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} (-1)^{\dim M^g} \langle ch^g[\sigma(P)]\, \mathcal{J}^g(M), [\tau M^g] \rangle
\end{aligned}$$

を得る．今 $h\in G$ に対して，$h\cdot M^g = M^{hgh^{-1}}$，$h^*(ch^{hgh^{-1}}[\sigma(P)]\cdot \mathcal{J}^{hgh^{-1}}(M)) = ch^g[\sigma(P)]\, \mathcal{J}^g(M)$ だから，上式は G の元の共役類毎に和をとった方が合理的である．$g\in G$ の共役類 (g) の元の個数は $|G|/|Z_G(g)|$ （$Z_G(g)$ は元 g の G の中での中心化群）だから，

$$\mathrm{ind}\, P^G = \sum_{(g)\in(G)} \frac{(-1)^{\dim M^g}}{|Z_G(g)|} < ch^g[\sigma(P)]\, \ell^g(M),\ [\tau M^g] >$$

となる．ここで $ch^g[\sigma(P)]\,\ell^g(M)$ は群 $Z_G(g)$ の作用で不動な元，すなわち，$H_c^*(\,Z_G(h)\backslash \tau M^g\,;\,\mathbb{C}\,)$ の元と考えられるから，積分を軌道空間 $Z_G(h)\backslash\tau M^g$ 上でとることができる．この時，$Z_G(g)$ は τM^g 上効果的に作用していないから，重複度 $m_G(M_i^g)$ を M^g の連結成分 M_i^g に対して

$$m_G(M_i^g) = \#\{\, h\in Z_G(g) \mid hx = x \quad \forall x\in M_i^g \,\}$$

とおくことにより

$$\mathrm{ind}\, P^G = \sum_{\substack{(g)\in(G)\\ M_i^g\subset M^g}} \frac{(-1)^{\dim M_i^g}}{m_G(M_i^g)} < ch^g(\sigma(P))\,\ell^g(M),\ [Z_G(g)\backslash\tau M_i^g] >$$

と書くことができる．更に同型，

$$H_c^*(Z_G(g)\backslash\tau M^g\,;\,\mathbb{C}) \cong H^*_{Z_G(g),c}(\tau M^g\,;\,\mathbb{C})$$

に注意すると，特性類 $ch^g[\sigma(P)]\,\ell^g(M)\in H_c^*(Z_G(g)\backslash\tau M^g\,;\,\mathbb{C})$

は全く同じ式で定義される同変特性類

$$ch_G^g[\sigma(P)]\cdot \mathcal{I}_G^g(M) \in H^*_{Z_G(g)}(\tau M^g;\mathbb{C}),$$

$$\begin{cases} ch_G^g[\sigma(P)] = \displaystyle\sum_{0\le\theta<2\pi} ch^\theta_{Z_G(g)}(u_g^\theta) \\ \mathcal{I}_G^g(M) = \det_{\mathbb{R}}(1-g|_{\nu_g})\,\mathcal{R}_{Z_G(g)}(\nu_g^\pi)\displaystyle\prod_{0<\theta<\pi} \mathcal{S}^\theta_{Z_G(g)}(\nu_g^\theta)\,\mathcal{I}_{Z_G(g)}(M^g) \end{cases}$$

と一致することがわかる．すなわち，我々は

$$\operatorname{ind} P^G = \sum_{\substack{(g)\in(G)\\ M_i^g\subset M^g}} \frac{(-1)^{\dim M_i^g}}{m_G(M_i^g)} \langle ch_G^g[\sigma(P)]\mathcal{I}_G^g(M), [Z_G(h)\backslash \tau M_i^g]\rangle$$

を得ることができた．

2. Compact Lie群の場合（横断的楕円型作用素の指数）

GをCompact Lie群，MをGが滑らかに作用している閉多様体とする．我々はG-不変擬微分作用素 $P: C^\infty(M;E)\to C^\infty(M;F)$ に対し，G-不変断面に働く作用素 $P^G: C^\infty(M;E)^G \to C^\infty(M;F)^G$ の指数

$$\mathrm{ind}\, P^G = \dim[\mathrm{Kernel}\, P^G] - \dim[\mathrm{Coker}\, P^G]$$

を考えたい．この指数はPが楕円型の時にはもちろん意味をもつが，そうでなくても意味をもつことがある．$T^*_G M$ を T^*M の部分集合で，Gの軌道に沿ったベクトルを零化するような余ベクトルの全体とする．Pの主表象 $\sigma(P)$ が，$T^*_G M - M$ に制限した時可逆になるようなPを横断的楕円型作用素と呼ぶ．これはPを各点の切片（slice）S_x に制限した時，楕円型になる事であり，軌道空間 $G\backslash M$ 上楕円型であると呼ぶのにふさわしい．このような作用素Pについて，ind P^G は有限の値をとるのであるが，Atiyah [401] はもっと強く，次の事を示している．

$P: C^\infty(M;E)\longrightarrow C^\infty(M;F)$ を横断的楕円型作用素とする．Pの核 $N(P)$ 及び余核 $N^*(P)$ は適当に完備化することにより，Gのunitary表現と考えることができる．この時Gの各既約表

現 ρ に対して，$N(P)$, $N^*(P)$ の ρ-成分 $N(P)_\rho$, $N^*(P)_\rho$ は有限次元になり，その指標の和

$$\mathrm{char}\, N(P) = \sum_{\rho\in\hat{G}} \mathrm{char}\, N(P)_\rho \quad , \quad \mathrm{char}\, N^*(P) = \sum_{\rho\in\hat{G}} \mathrm{char}\, N^*(P)_\rho$$

は G 上の超函数として収束する．この意味で，G-指数

$$\mathrm{ind}^G P = \mathrm{char}\, N(P) - \mathrm{char}\, N^*(P) \in \mathcal{D}'(G)$$

が定義される．この指数は P の主表象の $\tau^*_G(M)$ への制限 $\sigma(P)|\tau^*_G M$ の安定同値類にしか依らず，$R(G)$-準同型

$$\mathrm{ind}^G : K_G(\tau_G M) \longrightarrow \mathcal{D}'(G)$$

を定める．$\mathrm{ind}\, P^G$ との関係は，既約指標の正規直交性により，

$$\mathrm{ind}\, P^G = \langle \mathrm{ind}^G P , [1_G] \rangle$$

で与えられる．（1_G は G 上 1 の定数函数）．

今までの一般的な仮定の下で，$\mathrm{ind}\, P^G$ 或いは $\mathrm{ind}^G P$ を具体的に書き表わすことは非常に複雑で，実際的でない．Atiyah[401]

で述べられているのは，G が torus T^ℓ で，すべての isotropy 群が有限群の時だけである．我々はここで，G が一般の Compact Lie 群で，すべての isotropy 群が有限の時に，ind P^G を前節と同様な形に書き表わす事を試みる．この仮定の下では $\tau_G M$ は τM の部分束で，G の次元だけ次元が下がっている事に注意する．

前節の最後の式を今の仮定の下で一般化するには，軌道空間 $G\backslash M$ に着目するのが適切である．$G\backslash M$ は局所的には $G_x\backslash S_x$ で多様体／有限群の形をしている．そこで値を計るホモロジー類としては $[Z_G(g)\backslash \tau_{Z_G(g)} M^g]$ をとる．この時，isotropy 群は有限だから同型 $H^*_c(Z_G(g)\backslash \tau_{Z_G(g)} M^g ; \mathbb{C}) \cong H^*_{Z_G(g),c}(\tau_{Z_G(g)} M^g;\mathbb{C})$ があり，特性類は $H^*_{Z_G(g),c}(\tau_{Z_G(g)} M^g ; \mathbb{C})$ の元であるべきである．実際 $u \in K_G(\tau_G M)$ に対して，$u|\tau_{Z_G(g)} M^g$ は，$Z_G(g)$-同変ベクトル束として

$$u|_{\tau_{Z_G(g)} M^g} = \bigoplus_{0 \le \theta < 2\pi} u_g^\theta$$

と分解するから，$ch_G^g(u) \in H^*_{Z_G(g),c}(\tau_{Z_G(g)} M^g ; \mathbb{C})$ が定義される．また $\tau_G M|_{M^g}$ は $Z_G(g)$-同変に

$$\tau_G M|_{M^g} = \tau_{Z_G(g)} M^g \oplus \bigoplus_{0 < \theta \le \pi} V_{g,G}^\theta$$

と分解するから，$\mathcal{L}_G^g(M) \in H^*_{Z_G(g)}(M^g;\mathbb{C})$ も定義できる．

<u>定理</u>　G を compact Lie 群，M を G が滑らかに作用している閉多様体で，すべての isotropy 群が有限だとする．その時 $u \in K_G(\tau_G M)$ に対して，

$$< \mathrm{ind}^G u,\ 1_G > = \sum_{\substack{(g)\in(G),\, M^g \neq \phi \\ M_i^g \subset M^g}} \frac{(-1)^{\dim(Z_G(g)\backslash M_i^g)}}{m_G(M_i^g)}$$

$$\times < ch_G^g(u)\, \mathcal{L}_G^g(M),\ [\, Z_G(g)\backslash \tau_{Z_G(g)} M^g\,] > \quad .$$

<u>証明の方針</u>　Atiyah は [401] に於て，$G = T^\ell$ の時にこの式を証明している．我々は G が連結の時に，G の極大 torus T に関して Atiyah の結果を適用して結果を得よう．G が連結でない時には，後に述べる V-多様体の結果を通じて証明される．

G を compact connected Lie 群，$T^\ell \subset G$ を 1 つの極大 torus とする．旗多様体 G/T に G-不変な複素多様体の構造を入れておく．今ベクトル束の同型

$$G \times_T \tau_T M \cong \tau_G(G \times_T M) \cong \tau_G(G/T \times M) \cong \tau(G/T) \times \tau_G M$$

により同型

$$K_T(\tau_T M) \cong K_G(G \times_T \tau_T M) \cong K_G(\tau(G/T) \times \tau_G M)$$

が得られるが，$u \in K_G(\tau_G M)$ に対し，左辺の元 $ru \in K_T(\tau_T M)$ を $[\bar{\partial}] \times u \in K_G(\tau(G/T) \times \tau_G M)$ で定義する．この時，G/T の算術種数が1であることから，（これもAtiyah [401] による）

$$\langle \mathrm{ind}^G u, 1_G \rangle = \langle \mathrm{ind}^T ru, 1_T \rangle$$

が得られ，右辺はAtiyahの結果から計算することができる．

計算に於て，次の事実が重要である．$h \in T$ に対して同変剰余Todd類 $\mathcal{T}_G^h(G/T) \in H^{**}_{Z_G(h)}((G/T)^h; \mathbb{C})$ が得られる．これを $(G/T)^h$ 上価をとった類 $\pi_! \mathcal{T}_G^h(G/T) \in H^{**}_{Z_G(h)}(pt; \mathbb{C})$ は $\equiv 1$ である．これはBorel-Hirzebruchの結果 $\pi_! \mathcal{T}_G(G/T) \equiv 1 \in H^{**}_G(pt; \mathbb{C})$ と同じ方法で証明される．

3. V-多様体上の楕円型作用素の指数

はじめにV-多様体とV-束の定義を述べよう．Xを paracompact Hausdorff 空間とする．XがV-多様体であるとは，各点$x \in X$の十分小さな近傍U_xに対して，有限群G_xとG_xの効果的な実表現空間の原点の近傍$\tilde{U}_x$と，$U_x \subset X$と軌道空間$G_x \backslash \tilde{U}_x$の間の同一視$U_x \cong G_x \backslash \tilde{U}_x$が与えられていて，各$y \in U_x$に対して，$U_y$を$U_x$に含まれるように十分小さくとると，開埋蔵$\varphi : \tilde{U}_y \to \tilde{U}_x$が存在して，包含$U_y \subset U_x$を被っている時である．$\varphi$が微分同型になっている時を考える（$C^\infty$-V-多様体）．このような$\varphi$の選び方は$\tilde{U}_x$上の$G_x$の作用を除いて唯一つに定まる．各$\varphi$は群の単射準同型$\lambda_\varphi : G_y \longrightarrow G_x$を定め，$\varphi$は$\lambda_\varphi$-同変になる．

V-多様体の例としては，前節で考えたすべての isotropy 群が有限であるようなG-多様体(G, M)の軌道空間$G \backslash M$及びそれに伴なう軌道空間$Z_G(g) \backslash M^g$とか，固有不連続群$(\Gamma, \tilde{X})$の軌道空間$\Gamma \backslash \tilde{X}$等が考えられる．

V-多様体X上のV-束とは，同変繊維束の族$\{G_x, \hat{E}_x \to \tilde{U}_x\}$と接着束写像$\Phi : \tilde{E}_y \to \tilde{E}_x$（$\varphi : \tilde{U}_y \longrightarrow \tilde{U}_x$を被っている$\lambda_\varphi$-同変束写像）からできていて，両立性条件$\Psi : \hat{E}_z \to \hat{E}_y$，$\Phi : \hat{E}_y \to \hat{E}_x \Longrightarrow \Phi\Psi$は接着束写像を満たしているものである．例としては接ベクトルV-束$\{G_x, \tau\tilde{U}_x \longrightarrow \tilde{U}_x\}$を挙げておく．

V束$\{G_x : \hat{E}_x \to \tilde{U}_x\}$に対して軌道空間の族$\{G_x \backslash \hat{E}_x\}$を接着

束写像で貼り合わせた空間 $E=(\bigcup G_x\backslash \tilde{E}_x)/\sim$ はV-多様体になりV-束の全空間と呼ぶ．また射影 $E\to X$ も定義される．

接ベクトルV-束 $\tau_V X$ の同伴主V-束を考える．構造群は $O(n)$ としてよいが，ここでは適当な連結な compact Lie 群 G に拡大或いは制限しておく．同伴主V-束 $G(\tau_V X)$ の全空間を考えよう．局所的には $G_x\backslash G(\tau\tilde{U}_x)$ だが，G_x は $G(\tau\tilde{U}_x)$ 上自由に作用していることに注意する．従って，全空間 $G(\tau_V X)$ は滑らかな多様体になる．この時 G は全空間に右から作用しているが，isotropy 群は点 $x\in X$ 上 G_x に同型である．そしてV-多様体として X は軌道空間 $G(\tau_V X)/G$ に自然に同一視される．すなわち，すべてのV-多様体 X は，ある G-多様体 M の軌道空間になり，G は compact 連結 Lie 群，すべての isotropy 群は有限，そして主軌道型は自明としてよい．

一般にV-束 $E\to X$ に対し，位相的断面 $s: X\to E$ が，各 U_x に対して，滑らかな不変断面 $\tilde{s}_x:\tilde{U}_x\to\tilde{E}_x$ で被われる時，s を滑らかなV-断面と呼ぶ．ベクトルV-束 $E\to X$ に対して滑らかなV-断面の全体 $C_V^\infty(X;E)$ はベクトル空間になる．線型写像 $P: C_V^\infty(X;E)\to C_V^\infty(X;F)$ が，平滑化作用素を除いて局所的に(楕円型)擬微分作用素で表わされる時，P を(楕円型)擬微分作用素と呼ぶことにする．

Compact なV-多様体 X 上の楕円型作用素 P の指数

$$\mathrm{ind}_V\, P = \dim [\mathrm{Kernel}\, P] - \dim [\mathrm{Cokernel}\, P]$$

は有限になり，主表象のみで定まることがわかる．接ベクトルV-束 $\tau_V X$ 上の台Compactな差複素ベクトルV-束の安定同値類のつくる群を $K_V(\tau_V X)$ と書く時，準同型

$$\mathrm{ind}_V : K_V(\tau_V X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

が得られる．

V-多様体 X が，すべての isotropy 群が有限，主軌道型が自明なG-多様体 M の軌道空間 $G\backslash M$ となっている時，自然に X 上のベクトルV-束 E と M 上のG-同変ベクトル束 $\hat{E}$ は一対一に対応するから，$C_V^\infty(X;E) = C^\infty(M;\hat{E})^G$，$K_V(\tau_V X) \cong K_G(\tau_G M)$ となる．この時 $u \in K_V(\tau_V X) = K_G(\tau_G M)$ に対して，

$$\mathrm{ind}_V\, u = \langle \mathrm{ind}^G u, 1_G \rangle$$

が成立ち，前節の結果より，$\mathrm{ind}_V\, u$ を書き表わすことができる．この時，前節の定理の式の右辺をV-多様体の言葉で書き直してみよう．

まず積分をとるところが，$\tau_V X = G\backslash \tau_G M$ ばかりでなく，すべての $Z_G(g)\backslash \tau_{Z_G(g)} M^g$ にわたっているから，V-多様体 X に対して，積分をとるべき物を構成しなくてはならない．それはすべての $g \in G_x$ に対して，$\tilde{U}_x^g$ を合わせたものである．今，(1)，(h_x^1)，…，$(h_x^{p_x})$ を G_x のすべての共役類とする．すると自然な対応

$$\{(y, (h_y^j)) \mid y \in U_x,\ j = 1, \dots, p_y\} \cong \coprod_{i=1}^{p_x} Z_{G_x}(h_x^i)\backslash \tilde{U}_x^{h_x^i}$$

が得られる．そこで，

$$\Sigma X = \{(x, (h_x^i)) \mid x \in X,\ G_x \neq \{1\},\ i = 1, \dots, p_x\}$$

とおくと，ΣX は自然に $\tilde{U}_x^h \longrightarrow Z_{G_x}(h)\backslash \tilde{U}^h$ を局所座標にもつ V-多様体になる．ここで $Z_{G_x}(h)$ の $\tilde{U}^h$ への作用は効果的でないので，自明に作用している部分群の位数を，ΣXの X の中での点 $(x, (h))$ に於る重複度と定義する．ΣX は一般には色々な次元をもつ V-多様体の並置である．$\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_r$ を ΣX の連結成分としよう．すると各 Σ_i に対して重複度 m_i が定まっている．$X = G\backslash M$ の時は，自然に，

$$\begin{cases} \coprod_{(g)\in(G)} Z_G(g)\backslash M^g \cong X \amalg \Sigma X \\ m_G(M_i^g) = m_i \end{cases}$$

が成立っている．

ΣX の各局所座標 $\tilde{U}_x^h$ に対し，法束 $\nu(\tilde{U}_x^h)$，接束 $\tau(\tilde{U}_x^h)$ があり，更に法束上には h の作用による固有空間分解 $\nu(\tilde{U}_x^h)=\bigoplus_{0<\theta\le\pi}\nu_h^\theta$ が得られる．今これらのベクトル束に接着写像と両立する不変接続を入れることにより特性形式の族

$$\ell^h(\tilde{U}_x) \in \Omega^*(\tilde{U}_x^h)\otimes\mathbb{C}$$

が得られる．これらの形式は，cohomology類

$$\ell^\Sigma(X) \in H^*(\Sigma X;\mathbb{C}) \text{ 及び } \ell(X)\in H^*(X;\mathbb{Q})\ (h=1)$$

を定義しているが，これは前節の同変特性類に対応している．

また $u\in K_V(\tau_V X)$ に対しても，複素ベクトルV-束で代表させ，適当に不変接続を入れれば，特性形式

$$ch^h(E) - ch^h(F) \in \Omega^*(\tau\, \tilde{O}^h_x)\text{ の }\mathbb{C}$$

及び cohomology 類

$$ch^{\Sigma}(u) \in H^*_c(\tau_V \Sigma X\,;\mathbb{C}), \quad ch(u) \in H^*_c(\tau_V X\,;\mathbb{Q})$$

が得られ，前節の同変特性類に対応している．

従って次の定理が得られた．

定理．X を compact V-多様体とする．$u \in K_V(\tau_V X)$ に対して．

$$\mathrm{ind}_V(u) = (-1)^{\dim X} \langle ch(u)\, \mathcal{I}(X),\ [\tau_V X] \rangle + \sum_{i=1}^{c} \frac{(-1)^{\dim \Sigma_i}}{m_i} \langle ch^{\Sigma}(u)\, \mathcal{I}^{\Sigma}(X),\ [\tau_V \Sigma_i] \rangle$$

が成り立つ．

参考文献

[Atiyah 401] : Elliptic operators and compact groups
Lec. Notes in Math. 401, Springer-Verlag 1974.

T. Kawasaki : The index of elliptic operators over V-manifold,
to appear.