数理解析研究所講究録
第 365 巻 1979 年 65-70

ホモトピー球面上の involution と Kervaire invariant について

横浜国大 工　　北田泰彦

ホモトピー球面上の involution の存在、球面と射影空間との積空間に対する inertia group の問題、射影空間の q 重 suspension によって得られる空間への normal map の Kervaire invariant の問題、これらの関連を以下において考察する。

次の3つの命題を考える. ただし $0 \leq q \leq 2k$ とする.

(A) [surgery, normal map の立場]

Kervaire invariant で与えられる surgery obstruction map

$$c : [D^{q+1} \times P^{4k+1-q} / S^q \times P^{4k+1-q}, G/O] \longrightarrow \mathbb{Z}_2$$

は non-trivial map である.

(B) [involution の立場]

Homotopy $(4k+1)$ sphere で non-zero Kervaire invariant をもつ parallelizable manifold を bound するもの Σ_K^{4k+1} (以下 Kervaire sphere とよぶ) 上の involution で

その固定点集合が自然な sphere S^q と diffeo. となるものが存在する.

(C) [inertia group の立場] Kervaire sphere Σ_K^{4k+1} は $S^q \times D^{4k+1-q}$ に trivial に作用する.

以上の命題に関し既に知られていることは次の通りであり いずれも q が奇数の場合についてである. すなわち, $q = 1, 5, 13, \cdots$ では $(q+1)$ 次元 $\underbrace{\text{parallelizable}}^{\text{almost}}$ closed manifold で Kervaire invariant $\neq 0$ なるものの存在が知れていることから, (A) が成り立つ. この場合, 以下の定理1によれば (B), (C) も成立することがわかるが, (B) については Brieskorn sphere 上の involution によっても直接的な例が示せる.

q が偶数の場合には何も実のある結果は(A), (C) に関してはない. ただ次の2点に注目する.

i) (B) は $q = 2k$ のとき成り立つ.

$$\Sigma_K^{4k+1} = \{(z_0, z_1, \cdots, z_{2k+1}) \mid z_0^3 + z_1^2 + \cdots + z_{2k+1}^2 = 0\} \cap S^{4k+3}$$

上の involution $(z_0, z_1, \cdots, z_{2k+1}) \mapsto (\bar{z}_0, \bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_{2k+1})$ を考えればよい.

ii) $q = 0$ のとき, (A), (B), (C) はすべて同値な問題となる. (Browder – Lopez de Medrano の問題)

§1. 結果

__定理 1.__ (A) が成り立てば、(B) 及び (C) が成り立つ.

__定理 2.__ Homotopy 球面 Σ^{2n+1} $(n \geqq 3)$ が involution T で $\mathrm{Fix}\ T = S^n$ (standard sphere) なるものをもてば、$(S^n \times P^{n+1}) \# \Sigma$ と $S^n \times P^{n+1}$ は diffeo である.

__系.__ $(S^{2k} \times P^{2k+1}) \# \Sigma_K^{4k+1}$ と $S^{2k} \times P^{2k+1}$ とは diffeo である.

§2. 証明.

[定理 1 の証明]

(A) ⇒ (C) は Wall の surgery exuct sequence

$$[D^{8+1} \times P^{4k+1-8}/S^8 \times P^{4k+1-8}, G/O] \xrightarrow{c} \mathbb{Z}_2 \to hS(D^8 \times P^{4k+1-8}/\partial)$$

より Σ_K^{4k+1} が $hS(D^8 \times P^{4k+1-8}/\partial)$ に自明に作用することから明らかである. 以下, (A) ⇒ (B) の証明を述べる.

$$f: M^{4k+2} \longrightarrow D^{8+1} \times P^{4k+1-8} \ \text{rel. boundary}$$

を Kervaire obstruction $c(f) \neq 0$ の normal map とする. f を $D^{8+1} \times P^{4k-8}$ に transverse regular として制限された normal map

$$f' = f|f^{-1}(D^{8+1} \times P^{4k-8}): f^{-1}(D^{8+1} \times P^{4k-8}) \to D^{8+1} \times P^{4k-8} \ \text{rel.}\ \partial$$

を考えると、$\pi_1 = \mathbb{Z}_2$, $4k+1$ 次元では常に surgery 可能であるから、f' は homotopy 同値 $M'^{4k+1} \longrightarrow D^{8+1} \times P^{4k-8}$ であ

ると仮定して一般性を失わない。このとき、M' の M における closed tubular neighborhood を N とすると、M' の自然な double cover $\tilde{M}'$ と、covering transformation による $\mathbb{Z}_2$ 作用によって、N は $\tilde{M}' \times_{\mathbb{Z}_2} D^1$ と同一視できる。E を $M-N$ の閉包とすると、$M = N \cup E$，$N \cap E \approx \tilde{M}'$ となる。そのとき、$\partial E = S^q \times D^{4k+1-q} \cup_{\varphi} \tilde{M}'$ であり，$\tilde{M}'$ 上の involution（covering transformation）は φ によって，$S^q \times S^{4k-q}$ 上の involution $(x, y) \mapsto (x, -y)$ に対応しているから、$S^q \times D^{4k+1-q}$ 上の involution $(x, y) \mapsto (x, -y)$ に拡張でき，∂E 上の involution T で $Fix = S^q$ なるものが得られた。$f|E : E \longrightarrow D^{q+1} \times D^{4k+1-q}$ は non-zero obstruction をもつ normal map なることより、$c(E) \neq 0$，∂E は homotopy 球面である．よって Kervaire sphere ∂E 上の $Fix\ T = S^q$ なる involution が存在する．（証了）

［定理２の証明］

補題３．Homotopy 球面 Σ^{2n+1} $(n \geq 3)$ が $Fix\ T = S^n$ なる involution T をもつとき、$\mathbb{Z}_2$-diffeo

$$(\Sigma^{2n+1}, T) \approx S^n_t \times D^{n+1}_a \cup_{\psi} D^{n+1}_t \times S^n_a$$

が存在する．ここで添字 t，a はそれぞれ trivial involution, antipodal involution を表わし，ψ は $\mathbb{Z}_2$-equivariant diffeo

$S_t^n \times S_a^n \longrightarrow S_t^n \times S_a^n$ である.

(証明は s-cobordism theorem より明らかである)

さて、ψ は diffeo. $S^n \times P^n \xrightarrow{\overline{\Psi}} S^n \times P^n$ を引きおこす。S^n の 1 点 $*$ を base point とするとき、$\overline{\Psi} | \{*\} \times P^n$ は identity と仮定してよい。$S^n = D_+^n \cup D_-^n$、D_+^n は $\{*\}$ を中心とする半球面とすると、$\overline{\Psi} | D_+^n \times P^n$ はある $\alpha : P^n \longrightarrow O(n)$ によって $\overline{\Psi}(x, [y]) = (\alpha([y]) \cdot x, [y])$ と書ける. この α を用いて、$D^{n+1} \times S^n$ の diffeo α_1 を $\alpha_1(x, y) = (\alpha[y] \cdot x, y)$ と定義する. $S^n \times D^{n+1} \underset{id}{\cup} D^{n+1} \times S^n$ の部分集合、$D_+^n \times D^{n+1} \underset{id}{\cup} D^{n+1} \times S^n$ から $S^n \times D^{n+1} \underset{\psi}{\cup} D^{n+1} \times S^n$ の部分集合 $D_+^n \times D^{n+1} \underset{\psi}{\cup} D^{n+1} \times S^n$ への写像を $D_+^n \times D^{n+1}$ 上では "identity", $D^{n+1} \times S^n$ 上では α_1 とすることにより、$S^n \times D^{n+1} \underset{id}{\cup} D^{n+1} \times S^n$ と $S^n \times D^{n+1} \underset{id}{\cup} D^{n+1} \times S^n$ は左辺の $D_-^n \times D^{n+1}$ を除いた部分で diffeomorphic となり、これを全体への diffeo に拡張する obstruction が $\Sigma \in \Gamma_{2n+1}$ を表わしている.

$$Q_0^{2n+1} = S^n \times P^{n+1} = S^n \times (S^n \underset{Z_2}{\times} D^1) \underset{id}{\cup} S^n \times D^{n+1}$$

$$Q_1^{2n+1} = S^n \times (S^n \underset{Z_2}{\times} D^1) \underset{\psi^{-1}}{\cup} S^n \times D^{n+1}$$

とおく.

$S^n \times (S^n \underset{Z_2}{\times} D^1) \subset Q_0$ から $S^n \times (S^n \underset{Z_2}{\times} D^1)$ への diffeo を $\overline{\alpha}_1(x\ [y, t]) = (\alpha[y] \cdot x, [y, t])$ で定義する. これは $\partial(S^n \times D^{n+1}) \subset Q_0$ から $\partial(S^n \times D^{n+1}) \subset Q_1$ への写像とみるとき $\partial(D_+^n \times D^{n+1})$ 上で identity となり、これは $D_+^n \times D^{n+1}$

上での diffeo に拡張できる．この diffeo を $D_-^n \times D^{n+1}$ への diffeo に拡張する obstruction が Σ であったから，Q_1 は $Q_0 \# \Sigma$ と diffeomorphic である．また一方，$S^n \times D^{n+1} \subset Q_0$ から $S^n \times D^{n+1} \subset Q_1$ への "identity" map は $S^n \times (S^n \times_{Z_2} D^1)$ の boundary 上では ψ^* によって与えられる．ψ は $S^n_t \times S^n_a$ 上の $\mathbb{Z}_2$- equivariant diffeo であったから，自然に $S^n \times (S^n \times_{Z_2} D^1)$ 上の diffeo に拡張できる．このことは Q_0 と Q_1 とが diffeo なることを示す．よって Q_0 と $Q_0 \# \Sigma$ とが diffeo となる．（証了）