数理解析研究所講究録
第 365 巻 1979 年 71-79

On the equivariant homotopy of Stiefel manifolds

山口大　理　小宮克弘

GをコンパクトLie群とする。Λを実数体$\mathbb{R}$, 複素数体$\mathbb{C}$または四元数体$\mathbb{Q}$とし, EをΛ上のGの表現とする。ただしここで考える表現は, $\Lambda=\mathbb{R}$のときはorthogonal, $\Lambda=\mathbb{C}$のときはunitary, $\Lambda=\mathbb{Q}$のときはsymplecticであるものとする。$V_m^\Lambda(E)$をEにおけるorthonormal m-frameの全体より成るStiefel manifoldとする。$m=1$のとき, これはEの単位球面$S(E)$である。orthonormal m-frame $(v_1, \cdots, v_m)$および$g\in G$に対して, $(gv_1, \cdots, gv_m)$もorthonormal m-frameになる。このことより, $V_m^\Lambda(E)$はsmooth G-manifoldになることがわかる。

FをGのもうひとつの表現とする。G-mapのG-homotopy set $[S(E), V_m^\Lambda(F)]_G$について二, 三考えてみたことを以下に報告したい。

§1. 結果

$m=1$ のときは Rubinsztein の仕事 [1] がある。その結果を先ず紹介する。

G の部分群 H に対し，$N(H)$ を normalizer，(H) を conjugacy class とする。G-space X に対し，$x \in X$ における isotropy subgroup を G_x で表す。(G_x) を orbit type という。

$$X^H = \{ x \in X \mid H \subset G_x \},$$
$$X_H = \{ x \in X \mid H = G_x \},$$
$$X_{(H)} = \{ x \in X \mid (H) = (G_x) \}.$$

とする．$\mathcal{M}(E)$ を $S(E)$ 上に現れる orbit type の全体とし，

$$\mathcal{N}(E,F) = \left\{ (H) \in \mathcal{M}(E) \;\middle|\; \begin{array}{l} N(H)/H \text{ は finite} \\ (H) \not< (K) \text{ for } {}^\forall (K) \in \mathcal{M}(F) \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{N}_0(E,F) = \{ (H) \in \mathcal{N}(E,F) \mid \dim_{\mathbb{R}} E^H = 1 \}$$

$$\mathcal{O}(E,F) = \left\{ ((H),\alpha) \;\middle|\; \begin{array}{l} (H) \in \mathcal{N}(E,F) \\ \alpha \text{ は } S(E)_{(H)}/G \text{ の連結成分} \end{array} \right\}$$

とする。さらに，free abelian group $A'(E,F)$ を

$$A'(E,F) = \bigoplus_{((H),\alpha)\in \mathcal{O}(E,F)} \mathbb{Z}_{((H),\alpha)}$$

と定める。ここに，すべての $((H),\alpha)$ に対して，$\mathbb{Z}_{((H),\alpha)} = \mathbb{Z}$ である。

$$P_{((H),\alpha)} : A'(E,F) \to \mathbb{Z}_{((H),\alpha)}$$

を projection とし，

$$A(E,F) = \left\{ a \in A'(E,F) \;\middle|\; \begin{array}{l} P_{((H),\alpha)}(a) = 0 \text{ or } -1 \\ \text{for } \forall (H) \in \mathcal{H}_0(E,F) \end{array} \right\}$$

と定める。

<u>定理1</u>（Rubinsztein）．コンパクト Lie 群 G の表現 E，F に対して，全単射

$$\Phi : [S(E), S(E\oplus F)]_G \to A(E,F)$$

が存在する。とくに，$\dim_{\mathbb{R}} E^G \geqq 2$ のときは $[S(E), S(E\oplus F)]_G$ は group structure をもち，Φ は group isomorphism となる。

$j : S(E\oplus F) \to V_m^{\wedge}(E\oplus F\oplus \Lambda^{m-1})$ を任意の $v \in S(E\oplus F)$ に対し，$j(v) = (v, e_1, \cdots, e_{m-1})$ と定める。ここに，

$\Lambda^{m-1} = \Lambda \oplus \cdots \oplus \Lambda$ （$m-1$ 個） でこの上の G-action は trivial，$(e_1, \cdots, e_{m-1})$ は Λ^{m-1} の標準的な ortho-normal $(m-1)$-frame である。この j は G-map であるから，

$$j_* : [S(E), S(E \oplus F)]_G \to [S(E), V_m^{\Lambda}(E \oplus F \oplus \Lambda^{m-1})]_G$$

を induce する。この j_* を経由することにより $[S(E), V_m^{\Lambda}(E \oplus F \oplus \Lambda^{m-1})]_G$ に対して Rubinsztein の結果と同様の結果が得られる。

<u>定理2</u>. コンパクト Lie 群 G の Λ 上の表現 E, F に対して，

(a). j_* は全射である．

(b). 次の (i) 又は (ii) の場合，j_* は単射である：

(i) $\Lambda = \mathbb{R}$，任意の $(H) \in \mathcal{V}(E, F)$ に対して $S(E)_{(H)}/G$ は連結，$\dim_{\mathbb{R}} E^H$ は奇数。

(ii) $\Lambda = \mathbb{C}$ 又は $\mathbb{Q}$，任意の $(H) \in \mathcal{V}(E, F)$ に対して $S(E)_{(H)}/G$ は連結。

(c). $\dim_{\mathbb{R}} E^G \geqq 2$ ならば，$[S(E), V_m^{\Lambda}(E \oplus F \oplus \Lambda^{m-1})]_G$ は group structure をもち，j_* は group homomorphism。

次のことが知られている：

命題3 (Rubinsztein). 次の(i)又は(ii)のとき，任意の $(H) \in \mathfrak{M}(E)$ に対して，$S(E)_{(H)}/G$ は連結である:

(i). G が abelian で，$\dim_{\mathbb{R}} E^G \neq 1$.

(ii) G が finite で，G の表現 E' が存在して $E = E' \oplus E'$.

定理1

定理2と命題3より，

定理4. 次の(i)又は(ii)のとき，$[S(E), V_m^{\Lambda}(E \oplus F \oplus \Lambda^{m-1})]_G$ と $A(E,F)$ は集合として同型である:

(i). $\Lambda = \mathbb{R}$, G が abelian, $\dim_{\mathbb{R}} E^G \neq 1$, 任意の $(H) \in \mathfrak{M}(E,F)$ に対し $\dim_{\mathbb{R}} E^H$ は奇数。

(ii). $\Lambda = \mathbb{C}$ 又は $\mathbb{Q}$, G が abelian 又は finite.

さらに，$\dim_{\mathbb{R}} E^G \geqq 2$ であれば $[S(E), V_m^{\Lambda}(E \oplus F \oplus \Lambda^{m-1})]_G$ と $A(E,F)$ は群として同型である。

以下に定理2の証明の概略を示す。

§2. 準備

M をコンパクトな smooth free G-manifold で $\dim M \leqq \dim S(E \oplus F)$ なるものとする。次のふたつ

の fibre bundle を考える：

$$B = M \times_G V_m^{\wedge}(E \oplus F \oplus \Lambda^{m-1}) \to M/G$$

$$B' = M \times_G S(E \oplus F) \to M/G$$

j より induce される bundle map を $\tilde{j} : B' \to B$ とする。このとき，Steenrod [2] の obstruction theory を使って次の補題を得る。

<u>補題 5</u>. $N = M/G$ とし，$s : N \to B$ を B の cross section とする。$P : \partial N \times [0,1] \to B|\partial N$ を cross section の homotopy で $P_0 = s|\partial N$，$P_1(\partial N) \subset \tilde{j}(B')$ とする。このとき，P は次のような homotopy $Q : N \times [0,1] \to B$ に拡張される：$Q_0 = s$，$Q_1(N) \subset \tilde{j}(B')$.

G-map : $M \to V_m^{\wedge}(E \oplus F \oplus \Lambda^{m-1})$ と B の cross section とは one-to-one, onto に対応するから，補題 5 より，

<u>補題 6</u>. $f : M \to V_m^{\wedge}(E \oplus F \oplus \Lambda^{m-1})$ を G-map，$P : \partial M \times [0,1] \to V_m^{\wedge}(E \oplus F \oplus \Lambda^{m-1})$ を，$P_0 = f|\partial M$，$P_1(\partial M) \subset j(S(E \oplus F))$ なる G-homotopy とする。このとき，P は次のような G-homotopy

$Q : M \times [0,1] \to \hat{V}_m(E \oplus F \oplus \Lambda^{m-1})$ に拡張される：
$Q_0 = f,\quad Q_1(M) \subset j(S(E \oplus F))$.

§3. j_* が全射であることの証明

$f : S(E) \to \hat{V}_m(E \oplus F \oplus \Lambda^{m-1})$ を任意の G-map とする。
$\mathfrak{M}(E)$ の各元に番号をつけて，

$$\mathfrak{M}(E) = \{(H_1), (H_2), \cdots, (H_a)\}$$

$$i < k \Rightarrow (H_i) \not\leq (H_k)$$

となるようにする。

補題 6 および帰納法を使って次の補題が得られる：

<u>補題 7</u>. $S(E)$ のコンパクトな smooth G-submanifods $M_1, \cdots, M_a$ で次をみたすものが存在する：

$$\dim M_i = \dim S(E) \quad \text{for } i = 1, \cdots, a$$

$$M_1 \supset S(E)_{(H_1)}$$

$$M_i \supset M_{i-1} \cup S(E)_{(H_i)} \quad \text{for } i = 2, \cdots, a$$

さらに，G-homotopies $R^{(1)}, \cdots, R^{(a)}$ で次をみたすものが存在する：

$$R^{(i)} : M_i \times [0,1] \to \hat{V}_m(E \oplus F \oplus \Lambda^{m-1}) \quad \text{for } i = 1, \cdots, a$$

$$R_0^{(i)} = f | M_i \quad \text{for } i = 1, \cdots, a$$

$$R_1^{(i)}(M_i) \subset j(S(E \oplus F)) \quad \text{for } i = 1, \cdots, a$$

$$R^{(i)} \,|\, M_{i-1}\times[0,1] = R^{(i-1)} \quad \text{for } i=2,\cdots,a$$

$M_a = S(E)$ であるから，この補題より j_* が全射であることがわかる。

§4. j_* が単射であることの証明

次の可換図式を考える：

$$\begin{tikzcd}
{[S(E), S(E\oplus F)]_G} \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "r_1^H"'] & {[S(E), V_m^\wedge(E\oplus F\oplus \Lambda^{m-1})]_G} \arrow[d, "r_2^H"] \\
{[S(E^H), S(E^H\oplus F^H)]} \arrow[r, "j_*^H"] & {[S(E^H), V_m^\wedge(E^H\oplus F^H\oplus \Lambda^{m-1})]}
\end{tikzcd}$$

ここに，下列のふたつの $[\ ,\ ]$ は non-equivariant homotopy sets，r_1^H，r_2^H は制限写像，j_*^H は j_* と同様にして得られる写像。今，$\alpha, \beta \in [S(E), S(E\oplus F)]_G$ に対して $j_*(\alpha) = j_*(\beta)$ とする。定理2の (i) 又は (ii) のとき，任意の部分群 H に対して，j_*^H は単射であるから，$r_1^H(\alpha) = r_1^H(\beta)$ である。~~から~~ このとき，Rubinsztein の結果により，$\alpha = \beta$ となる。よって，定理2の (i) 又は (ii) のとき，j_* は単射である。

§5. Group structure に関して

$\dim_{\mathbb{R}} E^G \geqq 2$ のとき，$[S(E), S(E \oplus F)]_G$ に対する Rubinsztein の方法と同様にして，$[S(E), V_m^{\wedge}(E \oplus F \oplus \Lambda^{m-1})]_G$ も group structure をもつことがわかる。さらにこのとき，j_* は group homomorphism になる。

文　　献

[1]. R. L. Rubinsztein; On the equivariant homotopy of spheres, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), 134 (1976).

[2]. N. Steenrod; The topology of fibre bundles, Princeton University Press, 1951.