数理解析研究所講究録
第 365 巻 1979 年 89-94

On Equivariant Desuspension

阪大 理学部　森本 雅治

コンパクト・リー群Gが与えられた時（有限次元）実G－ベクトル空間を，その単位球面のG－ホモトピー同値あるいは安定G－ホモトピー同値によって分類する問題がある。この問題はGが有限群の場合に帰着されるということが知られている。そこで以下Gは有限群とする。上の問題に関連して，G－ホモトピー同値と安定G－ホモトピー同値の差が我々の関心を引く。

V，Wを実G－ベクトル空間，$\mathbb{R}$を自明なG－作用を持つ1次元実G－ベクトル空間とする。V，Wおよび$\mathbb{R}$にG－不変な内積を入れ，さらに$V\oplus\mathbb{R}$，$W\oplus\mathbb{R}$に自然にG－不変な内積を導入しておく。Vの単位球面をS(V)とする。即ち

$$S(V)=\{x\in V : \|x\|=1\}$$

である。W等に対しても同様である。自然数nに対して$n\mathbb{R}$でn個の$\mathbb{R}$の直和を表す。

<u>問題A</u>　$S(V\oplus n\mathbb{R})$ から $S(W\oplus n\mathbb{R})$ への G－ホモトピー同値があるとき $S(V)$ から $S(W)$ への G－ホモトピー同値があるか。

この問題に密接に関連するのが次の問題である。

$S(V)$ から $S(W)$ へ G－写像 f があるとき、そのサスペンジョンと呼ばれるべき G－写像 $\Sigma f: S(V\oplus\mathbb{R}) \longrightarrow S(W\oplus\mathbb{R})$ が定義される。$S(V)$ から $S(W)$ への G 写像の全体を G－ホモトピー同値で割ったものを $[S(V), S(W)]_G$ で表す。このとき自然に $\Sigma: [S(V), S(W)]_G \longrightarrow [S(V\oplus\mathbb{R}), S(W\oplus\mathbb{R})]_G$ が誘導される。

<u>問題B</u>　$\Sigma([S(V), S(W)]_G) \subset [S(V\oplus\mathbb{R}), S(W\oplus\mathbb{R})]_G$ の決定。

また一般に $[S(V), S(W)]_G$ は加群とは限らない。しかし，$[S(V\oplus 2\mathbb{R}), S(W\oplus 2\mathbb{R})]_G$ には自然に加群構造がはいる。この事実は（G－ホモトピーに関するある条件をみたす）$S(V)$ から $S(W)$ への G－写像を作ろうとする時、まず $S(V\oplus n\mathbb{R})$ から $S(W\oplus n\mathbb{R})$ への G－写像を作り、サスペンジョンの逆にあたる操作によって $S(V)$ から $S(W)$ への G－写像を手に入れる

ことはできないものかという疑問を投げかける。

問題A，Bおよび上の理由によってサスペンションの逆操作を考えてみた。

HがGの部分群であるとき$H<G$によって表す。Hの共役類を(H)で書く。G－空間Xがあるとき

$$\mathrm{Iso}(X)=\{(H):H=G_x \ \ \textit{for some} \ \ x\in X\},$$

$H<G$に対して

$$X^H=\{x\in X:\forall g\in H,\ gx=x\}$$

とする。G－写像$f:S(V)\longrightarrow S(W)$に対して$f^H$を

$$f^H=f|S(V)^H:S(V)^H\longrightarrow S(W)^H$$

で定める。fを動径方向に自然に拡張してVからWへのG－写像としておく。$(a,b)\in S(V\oplus\mathbb{R})$，$a\in V$，$b\in\mathbb{R}$に対して，

$$\Sigma f(a,b)=(f(a),b)$$

により$\Sigma f:S(V\oplus\mathbb{R})\longrightarrow S(W\oplus\mathbb{R})$を定める。

問題A，Bに対する解答が定理A，Bである。

定理A　$(H)\in\mathrm{Iso}(S(V))$で$H\neq G$に対して$\dim V^H\geqq 2$が成り立てば，$S(V\oplus n\mathbb{R})$と$S(W\oplus n\mathbb{R})$がG－ホ

モトピー同値の時$S(V)$と$S(W)$はG-ホモトピー同値である.

定理B　VおよびWが次の(i)および(ii)をみたすとき

$$\Sigma : [S(V), S(W)]_G \longrightarrow [S(V \oplus \mathbb{R}), S(W \oplus \mathbb{R})]_G$$

は(加群の)全型である。

(i)　$\dim V = \dim W$。

(ii)　$(H) \in Iso(S(V))$に対して$\dim V^H = \dim W^H$で,
$\dim V^G \geq 2$。

これらの定理は次の補題から得られる。

補題1　G-写像$f : S(V \oplus \mathbb{R}) \longrightarrow S(W \oplus \mathbb{R})$, VおよびWが次の条件(i)~(iv)をみたしているとする。

(i)　$\dim V = \dim W$。

(ii)　$(H) \in Iso(S(V))$に対して$\dim V^H = \dim W^H$で,
$H \neq G$のとき$\dim V^H \geq 2$。

(iii)　$f(0,1) = (0,1)$かつ$f(0,-1) = (0,-1)$, ここで$0 \in V$ or W, $\pm 1 \in \mathbb{R}$。

(iv)　$\dim V^G = 1$ならば$\deg f^G = 0$ or ± 1。

このとき$S(V)$から$S(W)$へのG-写像gで, ΣgがfとG-ホモトピックになるものが存在する。

補題1は以下の命題，補題により証明される。

<u>命題2</u>　各$(H)\in \mathrm{Iso}(S(V))$に対して$\dim S(V)^H \leqq \dim S(W)^H$であればS(V)からS(W)へのG－写像が存在する。

XをコンパクトG－多様体，$Y=S(W\oplus \mathbb{R})$としよう。$i=1,2$に対してf_iがXからYへのG－写像であるとき，$d(f_1, f_2)$を

$$d(f_1, f_2)=\sup\{\|f_1(x)-f_2(x)\| : x\in X\}$$

で定める。

<u>命題3</u>　$d(f_1, f_2)<2$ならばf_1とf_2はG－ホモトピックである。

さてXの各連結成分の次元は相等しく，X^Hの各連結成分の次元も相等しいものとしよう。それによって$\dim X$および$\dim X^H$がおのおの定められているとする。

<u>補題4</u>　XおよびYが条件(a)，(b)をみたすとする。

(a)　$\dim X=\dim Y$。

(b)　$(H)\in \mathrm{Iso}(X)$について$\dim X^H=\dim Y^H$。

XからYへのG－写像 f が $f(\partial X)\not\ni(0,\pm1)$ をみたすとき，任意の $\delta>0$ に対して次の(i)，(ii)および(iii)をみたすG－写像 $f_\delta: X \longrightarrow Y$ が存在する。

(i) $f_\delta^{-1}((0,\pm1))$ は有限集合。

(ii) $d(f_\delta, f)<\delta$ かつ f_δ は f にG－ホモトピック。

(iii) $f_\delta|\partial X = f|\partial X$ 。

系5 補題1の f は $\tilde{f}^{-1}((0,\pm1))$ が有限集合であるG－写像 $\tilde{f}: S(V\oplus\mathbb{R}) \longrightarrow S(W\oplus\mathbb{R})$ にG－ホモトピックである。

参考文献

[1] C.N.Lee and A.G.Wasserman, *On the groups JO(G)*, Memorirs of the American Mathematical society 159 (1975).

[2] A. Meyerhoff and T. Petrie, *Quasi equivalence of G-modules*, Topology 15 (1976).

[3] R.L. Rubinsztein, *On the equivariant homotopy of spheres*, Dissertations Math. (Rozprawy Mat.) 134 (1976).