数理解析研究所講究録
第 366 巻 1979 年 48-62

H_p 極値函数について

東工大 理　　小林昇治

平面領域又は Riemann 面上の函数論においては，種々の函数族での極値問題が考えられ，その極値函数の性質等が興味の対象となることが多い．ここでは Hardy 族 $H^p(R)$ $(p>0)$ において Hejhal [5]，Gamelin [3] 等が扱ったような線型極値問題の極値函数の動向について調べる．大ざっぱに言って，$H^p(R)$ は $p\to\infty$ のとき，その記法からも想像されるように $H^\infty(R)$ にある意味で近づくのであるが，ある線型極値問題の $H^p(R)$ での極値函数 f_p は $p\to\infty$ のとき $H^\infty(R)$ における極値函数 f_∞ に（適当な位相で）近づくかというのがここで考える問題である．

§1. 定義と問題の設定．

R を開 Riemann 面とし，1点 $t\in R$ をとって固定する．正の実数 p に対して，指数 p の Hardy 族 $H^p(R)$ とは R 上の

一価正則函数 f で $|f|^p$ が R 上である調和函数でおさえられるものの族であり，$f \in H^p(R)$ に対してそのノルム $\|f\|_p$ は次式で定義される.

$$(1.1) \qquad \|f\|_p = \inf_u u(t)^{\frac{1}{p}}$$

ここに $\inf$ は $|f|^p$ をおさえるすべての調和函数についてとる. $H^\infty(R)$ は R 上の有界正則函数の族で，$f \in H^\infty(R)$ に対して $\|f\|_\infty$ は R 上の一様ノルムである.

K を R のコムパクト集合で，R の境界 ∂R を分離しないとする. l を K 上の連続函数族 $C(K)$ 上に定義された K 上の一様ノルムに関して連続な線型 functional とする. Riesz の表現定理 [8] により，K 上の complex measure μ が存在して l は次式で表わされる.

$$(1.2) \qquad l(f) = \int_K f(z)\, d\mu(z) \qquad (f \in C(K)).$$

l の $H^p(R)$ への制限のノルムを M_p とかく. すなわち，

$$(1.3) \qquad M_p = \sup\{ |l(f)| : f \in H^p(R),\ \|f\|_p \leq 1 \}.$$

同様に l の $H^\infty(R)$ 上のノルムを M_0 とかく. すなわち，

$$(1.4) \qquad M_0 = \sup\{ |l(f)| : f \in H^\infty(R),\ \|f\|_\infty \leq 1 \}$$

(1.3), (1.4) で sup をとる函数が存在することは正規族の議論から容易にわかる．それらをそれぞれ H^p 極値函数，H^∞ 極値函数と呼ぶ．H^p ノルム $\|f\|_p$ は p について単調増加であるから，M_p は単調減少である．以下自明な場合を除くため $M_0>0$ と仮定する．$1<p<\infty$ ならば $H^p(R)$ の一様凸性から H^p 極値函数が unique なることが知られている（[1], [6]）．また H^∞ 極値函数が unique なこともいろいろな人によって示されている（[2], [3], [5]）．H^p 極値函数を f_p，H^∞ 極値函数を f_0 と書く．

§2. f_p の広義一様収束．

まず一般の Riemann 面について容易にわかることを示す．

定理 1. $p \to \infty$ のとき f_p は f_0 に R 上広義一様収束する．

証明. $\{f_p\}_{p>1}$ は正規族をなすから，適当に部分列 $\{f_{p_n}\}$ をとれば f_{p_n} はある g に広義一様収束している．任意の q, $1<q<\infty$ に対して，n を十分大きくとれば $\|f_{p_n}\|_q \leq \|f_{p_n}\|_{p_n} = 1$．したがって $\|g\|_q \leq 1$，これから $\|g\|_\infty \leq 1$ を得る．一方 f_{p_n} は g に K 上一様収束しているから

$$(2.1) \quad l(g) = \lim_{n\to\infty} l(f_{p_n}) = \lim_{n\to\infty} M_{p_n} \geq M_0$$

したがって g は H^∞ 極値函数で

$$(2.2)\qquad \lim_{p\to\infty} M_p = M_0$$

が成り立つ. f_0 は unique であるから, f_p 自身が f_0 に R 上広義一様収束していることがわかる.

定理1は[6]で特別な極値問題について示した. 証明は本質的に同じである.

§3. 有限連結平面領域の場合.

以下 R が有限連結平面領域の場合を考える. 必要ならば, 等角同値な領域を考えればよいから, R の境界 ∂R は互いに共通部分のない有限個の解析閉曲線からなっているとしてよい. このとき H_p ノルムは ∂R 上の調和測度による積分で表わされる([7])ので, 極値問題は ∂R 上の L^p 空間の双対関係によって調べることができる.

R 内で正則, R の閉包 $\bar{R}$ 上で連続な函数の族を $A(R)$ で表わす. 以下 R の連結度を m (>0) とする. α を $\bar{R}$ 上の有理型函数又は微分とするとき, $Z(\alpha)$ (resp. $P(\alpha)$) で α の重複度をこめて数えた零点(∂R 上の零点は重複度の半分で数える)(resp. 極)の個数を表わす. Cauchy の定理

とFubiniの定理により，((1.2) は容易に，

$$(3.1)\qquad l(f)=\int_{\partial R} k(z)f(z)\,dz \quad , \quad f\in H^p(R)$$

と書き直せる．ここに k は μ の Cauchy 変換で

$$(3.2)\qquad k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{d\mu(\zeta)}{z-\zeta}$$

で与えられる．$H^p(R)$ における極値問題についての次の定理はよく知られている．一応簡単な証明をつけるが，くわしくは [2]，[3]，[4]，[5] 等を見られたい．

定理2．$g_0\in A(R)$ が存在して

$$(3.3)\qquad \int_{\partial R} |k(z)+g_0(z)|\,|dz| = M_0$$

$$(3.4)\qquad f_0(z)(k(z)+g_0(z))\,dz \geqq 0 \quad \text{along } \partial R$$

$$(3.5)\qquad Z(f_0) \geqq m .$$

f_0 が非定数ならば，g_0 は unique である．

<u>証明</u>．l の $A(R)$ への制限を Hahn-Banach の定理によって $C(\partial R)$ 上に拡張すれば，l は Riesz の表現定理によって，∂R 上の測度で表現される．すなわち ∂R 上の complex measure ν が存在して，次式がなり立つ．

(3.6) $$l(f)=\int_{\partial R} f(z)\,d\nu(z)\ ,\quad f\in A(R)$$

(3.7) $$\|\nu\|\leqq M_0\ .$$

(3.1) と (3.6) により

(3.8) $$\int_{\partial R} f(z)\,(d\nu(z)-k(z))\,dz=0,\quad f\in A(R).$$

したがって Riesz兄弟の定理によりこの測度はある H^1 函数によって表現される．すなわちある $g_0\in H^1(R)$ が存在して

(3.9) $$d\nu(z)-k(z)\,dz=g_0(z)\,dz$$

(3.7), (3.9) より，

(3.10) $$\int_{\partial R}|k(z)+g_0(z)|\,|dz|\leqq M_0.$$

一方 f_0 は極値函数であるから

(3.11) $$\begin{aligned}M_0=l(f_0)&=\int_{\partial R} f_0(z)\,k(z)\,dz\\&=\int_{\partial R} f_0(z)(k(z)+g_0(z))\,dz\\&\leqq\int_{\partial R}|f_0(z)|\,|k(z)+g_0(z)|\,|dz|\end{aligned}$$

$$\leqq \int_{\partial R} |k(z)+g_0(z)||dz| \leqq M_0.$$

したがって

(3.12) $$\int_{\partial R} |k(z)+g_0(z)||dz| = M_0.$$

$k(z)+g_0(z)$ は恒等的には0でないから，∂R 上ほとんどいたるところ

(3.13) $$f_0(z)(k(z)+g_0(z))\,dz \geqq 0$$

(3.14) $$|f_0(z)| = 1.$$

$f_0(z)(k(z)+g_0(z))$ は ∂R の近くで H^1 に属するから鏡像原理によって ∂R をこえて解析接続される。Rudin [7] の補題により，(3.14) から f_0，g_0 がともに ∂R をこえて解析接続されることがわかる。したがって (3.13)，(3.14) は ∂R 上すべての点で成り立つ。(3.5) は (3.14) から偏角の原理により容易にわかる。次に f_0 が非定数のとき g_0 が unique なることを示す。(3.13) をみたす $g_0 \in H^1(R)$ が他にあったとしそれを h_0 とする。

(3.15) $$\alpha = f_0(z)(g_0(z)-h_0(z))\,dz$$

とおけば，α は ∂R にそって real な $\bar{R}$ 上の正則微分であ

るから $Z(\alpha)=m-2$ となる．これは (3.5) と矛盾する．

以下 f_0 が非定数であると仮定する．$K_0(z)=(k(z)+g_0(z))f_0(z)$ とおく．

次に $H^p(R)$ $(1<p<\infty)$ の場合を考える．R の点 t に関する調和測度を η とする．$G(z,t)$ を R の t に極をもつ Green 函数とすれば，

$$(3.16)\qquad d\eta=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial G(z,t)}{\partial n_z}|dz|=\frac{i}{2\pi}P'(z)\,dz$$

とかける．ここに $P(z)$ は $G(z,t)$ の共役調和函数を $G^*(z,t)$ として $P(z)=G(z,t)+iG^*(z,t)$ である．よく知られているように $P'(z)$ は ∂R をこえて正則で ∂R 上に零点をもたない．このとき $f\in H^p(R)$ の H^p ノルムは

$$(3.17)\qquad \|f\|_p=\left(\int_{\partial R}|f(z)|^p\,d\eta\right)^{1/p}$$

と表わされる．

<u>定理3.</u> $p^{-1}+q^{-1}=1$ とする．$g_p\in H^q(R)$ が unique に存在して，

$$(3.18)\qquad \left(\int_{\partial R}|k(z)+g_p(z)|^q\left|\frac{dz}{d\eta}\right|^q d\eta\right)^{1/q}=M_p$$

$$(3.19)\quad (k(z)+g_p(z))f_p(z)\,dz \geqq 0 \quad \text{along } \partial R.$$

$$(3.20)\quad (k(z)+g_p(z))f_p(z)\frac{dz}{dy} = M_p\,|f_p(z)|^p \quad \text{on } \partial R.$$

<u>証明</u>. $L^p(dy)$ と $L^q(dy)$ の duality により l はある $h_p \in L^q(dy)$ によって表現される．すなわち

$$(3.21)\quad l(f) = \int_{\partial R} f(z)\,h_p(z)\,dy(z), \quad f \in H^p(R)$$

$$(3.22)\quad \|h_p\|_q = M_p.$$

(2.1) と (2.21) より

$$(3.23)\quad \int_{\partial R} f(z)(h_p(z)\,dy - k(z)\,dz) = 0 .$$

したがって Riesz 兄弟の定理により，ある $g_p \in H^1(R)$ が存在して

$$(3.24)\quad h_p(z)\,dy - k(z)\,dz = g_p(z)\,dz$$

とかける．(3.22) より (3.18) が得られる．これから $g_p \in H^q(R)$ がわかる．Hölder の不等式により．

$$(3.25)\quad M_p = \int_{\partial R} k(z)\,f_p(z)\,dz$$

$$= \int_{\partial R} (k(z) + g_p(z)) f_p(z)\, dz$$

$$\leq \quad \| h_p \|_q \, \| f_p \|_p = M_p .$$

等号条件より.

$$(3.26) \qquad (k(z) + g_p(z)) f_p(z)\, dz \geqq 0 \quad \text{a.e along } \partial R$$

$$(3.27) \qquad (k(z) + g_p(z)) f_p(z) \frac{dz}{dy} = M_p \, |f_p(z)|^p \quad \text{a.e on } \partial R$$

$K_p(z) = (k(z) + g_p(z)) f_p(z)$ とおけば, K_p は ∂R の近くで H^1 に属するから鏡像原理により ∂R をこえて解析接続される. したがって (3.26) は ∂R 上すべての点で成り立つ. $L_p(z) = K_p(z) \frac{dz}{dy}$ とおけば, L_p も ∂R 上正則である. (3.27) がすべての点で成り立つことを示すため次の補題を証明する.

補題 1. f_p, g_p は K_p がその上で零点をもたない ∂R の任意の弧をこえて解析接続される.

証明. 必要ならば等角写像で写せばよいから, R は上半平面に含まれ, 実軸が ∂R の一つの成分になっているとしてよい. K_p が区間 $[-1, 1]$ 上に零点をもたないとする. 適当な $[-1, 1]$ の近傍 N をとって K_p が $N \cap R$ に零点をもたない

ようにする．以下 $N \cap R$ を単位円内 U に等角写像し U で考える．K_p は $\bar{U}$ 上連続で 0 にならないから outer function である．したがって K_p の因数である f_p も outer function であるから次式の表現が成り立つ．

$$(3.28) \quad f_p(z) = c \exp \int_{\partial U} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log |f_p(e^{i\theta})| \, d\theta, \quad (|c|=1)$$

(3.27) を代入して

$$(3.29) \quad f_p(z) = c \exp \left\{ \int_{\Gamma_1} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \frac{1}{p} \log \left| \frac{L_p(e^{i\theta})}{M_p} \right| d\theta \right.$$

$$\left. + \int_{\Gamma_2} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log |f_p(e^{i\theta})| \, d\theta \right]$$

$$= c' L_p(z)^{\frac{1}{p}} \exp \int_{\Gamma_2} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \left(\log |f_p(e^{i\theta})| - \frac{1}{p} \log \left| \frac{L_p(e^{i\theta})}{M_p} \right| \right) d\theta,$$

ここに Γ_1 は $[-1,1]$ に対応する ∂U の弧，Γ_2 はその complement を表わす．(3.29) より f_p が Γ_1 をこえて解析接続されることがわかる．g_p については同様である．

系．f_p^p, g_p^q は $\bar{R}$ 上正則である．

特に $|f_p|^p$, $|g_p|^q$ は $\bar{R}$ 上連続であり，(2.27) は ∂R 上す

べての点で成り立つ.

§4. f_p の一様収束.

前節までの結果を利用して次の主定理を示す.

定理 4. f_p は f_0 に ∂R 上の高々有限個の点の任意の近傍の外で一様収束する.

証明. (3.18) により $\{g_p\}_{p>1}$ は正規族をなす. $\{g_{p_n}\}$ を $\{g_p\}$ の R 内広義一様収束する部分列とする. 定理 1 により f_p は f_0 に R 内広義一様収束するから, $K_{p_n}=(k+g_{p_n})f_{p_n}$ も R 内広義一様収束する. K_{p_n} は鏡像原理により解析接続したから, $\bar{R}$ を含む領域 D が存在して K_{p_n} は D 上で一様収束する. K_{p_n} の極限函数を K_1 とすれば, K_1 は高々有限個の零点を R 内にもつ. Γ を ∂R の一つの成分とする. 以下 Γ の内部を単位円内に写して考える. r を十分 1 に近くとれば $R_r=\{z: r<|z|<1\}$ に K_1 が零点をもたないようにできる. f_{p_n} の R_r 内の零点から作られた Blaschke 積を B_{p_n}, K_{p_n} のそれを $\tilde{B}_{p_n}$ とかく. これらはもちろん有限積である. $\log|f_{p_n}/B_{p_n}|$ は R_r 内の上に有界な調和函数で $\overline{R_r}$ 上連続 (高々有限個の点で $-\infty$ となる) であるから, R_r の点 ζ に関する調和測度を $\nu_\zeta(z)$ とすれば

$$(4.1)\quad \log|f_{p_n}(\zeta)/B_{p_n}(\zeta)| = \int_{\partial R_r} \log|f_{p_n}(z)/B_{p_n}(z)|\, d\nu_\zeta(z)$$

(3.20) を代入して

$$= \frac{1}{p_n}\log\left|L_{p_n}(\zeta)/M_{p_n}\widetilde{B}_{p_n}(\zeta)\right|$$

$$+ \int_{|z|=r}\left[\log|f_{p_n}(z)/B_{p_n}(z)| - \frac{1}{p_n}\log\left|L_{p_n}(z)/M_{p_n}\widetilde{B}_{p_n}(z)\right|\right] d_\zeta\nu(z).$$

Rouché の定理により B_{p_n}, $\widetilde{B}_{p_n}$ の零点はすべて K_1 の零点に収束し，f_{p_n} は $|z|=r$ 上一様収束するから，f_{p_n} は K_1 の零点の任意の近傍をのぞいて ∂R をこえて一様有界である．したがって Vitali の定理により f_{p_n} は f_0 にそこで一様収束する．特に ∂R 上有限個の点を除いて各点収束する．したがって g_{p_n} もある g_1 に ∂R 上有限個の点を除いて各点収束する．Fatou の補題と (3.18) により

$$(4.2)\quad \int_{\partial R} |k(z)+g_1(z)|\,|dz|$$

$$\leq \varliminf_{n\to\infty}\int_{\partial R} |k(z)+g_{p_n}(z)|\,|dz|$$

$$\leq \varliminf_{n\to\infty} M_p = M_0.$$

したがって定理2により $g_1 = g_0$. g_0 は unique であるから g_p 自身が g_0 に収束する。ゆえに上の議論を再びつかって、K_p が $\bar{R}$ を含むある領域 D 上 K_0 に一様収束し、K_0 の ∂R 上の零点の任意の近傍の外で f_p が f_0 に一様収束することがわかる。

系1. $\bar{R}$ を含む領域 D があって、K_p は D 上 K_0 に一様収束する。

系2. K_0 が ∂R 上に零をもたなければ、f_p は f_0 に $\bar{R}$ を含むある領域 D 上一様収束する。

系3 $l(f) = f'(\zeta)$ $(\zeta \in R)$ ならば f_p は f_0 に一様収束する。

§5. 結び.

K_0 が ∂R 上に零点をもつときは f_p が f_0 に一様収束するかどうかいまのところわからない。

講演の後 吹田先生から K_0 が ∂R 上に零点をもつ場合として次の例を教えられた。

$R = \{z : |z| < 1\}$, $0 < t < 1$ として

$$(5.1) \quad l(f) = f'(0) + \frac{(1-t^2)(1-t)}{t}\left(f(0) - f(t)\right)$$

とすれば

$$(A.2) \quad K_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{z} - \frac{(1-t)(1-t^2)}{(z-t)(1-tz)}\right)$$

$$(A.3) \quad f_0(z) = z$$

なることが簡単な計算によりわかり，$K_0(1)=0$である。

REFERENCES

1. Clarkson, J. A., Uniformly convex spaces. Trans. A.M.S. 40 (1936), 396-414.
2. Fisher, S. D., On Schwarz's lemma and inner functions. Trans. A.M.S. 138 (1969), 229-240.
3. Gamelin, T., Extremal problems in arbitrary domains. Michigan Math. J. 20 (1973), 3-11.
4. Garnett, J., Analytic capacity and measure. Lecture notes in Math. 297, Springer.
5. Hejahl, D. A., Linear extremal problems for analytic functions, Acta Math. 128 (1972) 91-122.
6. Kobayashi, S., Schwarz's lemma in H_p spaces. Kōdai Math. Semi. Rep. 27 (1976), 291-299.
7. Rudin, W., Analytic functions of class H_p. Trans. A.M.S. 78 (1955), 46-66.
8. _____, Real and complex analysis, 2nd edition, MacGraw-hill, 1974.