数理解析研究所講究録
第 366 巻 1979 年 101-110

Koebe の定理について

京大教養　藤家 龍雄

<u>定理</u>（Koebe）　$f(z)$ は単位円 D : $|z|<1$ で正則かつ有界とし，$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n, \cdots$ を D 内の弧の列で，単位円周上の弧 γ に収束するものとする．もし

$$M_n = \max_{\gamma_n} |f(z) - \alpha| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

なる定数 α が存在するならば，$f(z) \equiv \alpha$ である．

定理における $\{\gamma_n\}$ を Koebe arc 列，γ を Koebe arc，そして α を Koebe value と呼ぶ．

上記 Koebe の定理については，関数の一般化の立場から Bagemihl-Seidel [1] により，関数 $f(z)$ が正規有理型関数のときにも成立つことが示され，MacLane によって，円周上到るところ稠密な集合の各点で漸近値をもつ正則関数，さらに Barth によって，同じ性質をもち，Nevanlinna の個数関数について $N(r, \infty, f) = O(1)$ なる有理型関数について定理の成立が証明されている [2]，[6]．

領域の一般化，つまり一般な平面領域あるいはリーマン面

上の関数についての Koebe の定理に関しては，方法上の制約もあり，限られた場合を除いて十分な結果が得られていないように思われる.

さらに Koebe values の集合については，Collingwood-Cartwright [3] 等の研究があり，有理型関数の集積値集合の中で，range of values，漸近値集合との関係について論じられている.

本講究においては，領域は単位円に限るが，単位円の閉包は Martin コンパクト化と同相であるという事実に基づいて，なるべくリーマン面上でも通用する方法を用いて上記 2 つの問題点から Koebe の定理を考察する．したがって，それらの方法のみによって得られる結果はそのままリーマン面上の結果である.

1. Fine limit points set

S を D 内の閉集合とする．Gamelin [5] によって S の almost radial limit points set をつぎのように定義する．先ず，2 つの実数 ψ，b に対して $T(e^{i\theta}, \psi, b)$ は点 $e^{i\theta}$ に頂点を有し，頂角が ψ，線分 $\overline{(1-b)e^{i\theta}, e^{i\theta}}$ を高さとする二等辺三角形とし,

$$E_S = \{e^{i\theta};\ T(e^{i\theta}, \psi, b) \cap S \neq \phi \ \text{for}\ {}^\forall\psi, {}^\forall b\}$$

とおく.

一方Dの開集合Gに対して，$D-G$ が $e^{i\theta}$ で thin であるとき $G\in\mathcal{G}_{e^{i\theta}}$ とし，Sの fine limit points set F_S を

$$F_S=\{e^{i\theta};\ G\cap S\neq\emptyset \text{ for } {}^{\forall}G\in\mathcal{G}_{e^{i\theta}}\}$$

と定義する。

$\Sigma(d\theta)$ を円周上の $L^\infty(d\theta)$ の maximal ideal space，$\hat{\chi}_{E_S}$ を χ_{E_S} の Gelfand transform として，

$$\tilde{E}_S=\{x\in\Sigma(d\theta);\ \hat{\chi}_{E_S}(x)=1\}$$

とおくと Gamelin により

$$\bar{S}\cap\Sigma(d\theta)=\tilde{E}_S$$

ただし，$\bar{S}$ は $H^\infty(D)$ の maximal ideal space $\mathcal{M}_D$ における S の closure である。

Constantinescu-Cornea [ ] によれば，円周上測度0を除いて $F_S\subset E_S$ であるから $\tilde{F}_S\subset\tilde{E}_S$ であり

F_S：測度正 $\Longrightarrow \tilde{F}_S\neq\emptyset$ かつ $\tilde{F}_S\subset\bar{S}\cap\Sigma(d\theta)$

$\Longrightarrow {}^{\exists}x\in\tilde{F}_S$ s.t. $U(x)\cap S\neq\emptyset$ for ${}^{\forall}$nbhd $U(x)$

である。ここで $\alpha\in\bar{\mathbb{C}}$ に対して $F_\alpha=\bigcap_n F_n$ とおく。ここに $F_n=F_{f^{-1}(\bar{V}_n)}$，$V_n=V_n(\alpha)$ は α の $\frac{1}{n}$-近傍である。もし，すべての n に対して，F_n が正の測度をもてば

$$\bigcap_n\left(\overline{f^{-1}(\bar{V}_n)}\cap\Sigma(d\theta)\right)\neq\emptyset$$ であるから，

$x\in\bigcap_n\left(\overline{f^{-1}(\bar{V}_n)}\cap\Sigma(d\theta)\right)$ とすれば，すべての n に対して $x\in\Sigma(d\theta)$ かつ $x\in\overline{f^{-1}(\bar{V}_n)}$ であるから，すべての n

と x のすべての近傍 $U(x)$ に対して $U(x)\cap f^{-1}(V_n)\neq\phi$, したがって, $\alpha\in C(f,x)$ (f の x における集積値集合). $\Sigma(d\theta)$ は $\mathfrak{M}_D$ の Šilov 境界と同一視することができるから, α は Šilov 境界点における集積値と考えてよい.

上で定義した F_α についてつぎのことが云える. すなわち任意の $\alpha,\beta\in\overline{\mathbb{C}}$ に対して, 測度 0 の集合を除いて $F_\alpha=F_\beta$ である. 何故ならば, もし $F_\beta-F_\alpha$ が測度正ならば, 十分大なる n に対し $F_\beta-F_n$ は測度正である. 一方単位円周上 $\partial D-F_n$ の点 ζ に対し, $G\in\mathcal{O}_\zeta$ が存在して $G\cap f^{-1}(\overline{V}_n)=\phi$ であるから $\partial D-F_n$ のほとんどすべての点は Fatou point であり, $F_\beta-F_n$ 上ほとんど到るところ Fatou limit は β に等しい. 故に $f\equiv\text{const.}=\beta$ である.

f の $\zeta\in\partial D$ における cluster value または global cluster value α に関して, つぎの定理を得る.

<u>定理</u>　$\alpha\in C(f,\zeta)$ (または $C(f)$) に対して F_α が測度正ならば, $f\equiv\text{const.}$ であるか $\overline{\mathbb{C}}-R(f,\zeta)$ ($\overline{\mathbb{C}}-R(f)$) は容量 0 である. こゝに $R(f,\zeta)$, $R(f)$ は ζ における (global な) range of values である.

<u>証明</u>　$R(f,\zeta)=\bigcap_n f(U_n)$. ただし $U_n=U_n(\zeta)$ は ζ の $\frac{1}{n}$-近傍とする. $\overline{\mathbb{C}}-R(f,\zeta)=\bigcup_n f(U_n)^c$ が容量正で

あるならば，ある n に対して $f(\Pi_n)^c$ は容量正であるから，f は Π_n の各成分 Π_n^i で Fatou 写像である．いま，開集合 G に対して $\Delta_1(G)=\{\zeta\in\partial D;\ G\in \mathfrak{G}_\zeta\}$ とおけば，$\Delta_1(\Pi_n)=\bigcup_i \Delta_1(\Pi_n^i)$ であり，$\Delta_1(\Pi_n)$ は測度正であるから，ある i に対して $\Delta_1(\Pi_n^i)\cap F_\alpha$ の測度は正となる．これより Lusin-Privalov 型の定理 [4] により $f\equiv \mathrm{const.}=\alpha$ となる．

以上述べた結果は一般の Riemann 面の上でも成立つ．その際，単位円周 ∂D を Riemann 面 R の Martin 境界 Δ，∂D 上のルベーグ測度 $d\theta$ を Δ 上の調和測度で，Šilov 境界 $\Sigma(d\theta)$ を R の Wiener コンパクト化における調和境界で置きかえる．

上記定理は Koebe の定理の一般化とみてよいが，上の注意によってリーマン面上でも成立つ．つぎに関数 f に条件をつけることによって，F_α の測度が正で $f\equiv$ 定数となる場合を考察する．

2. meas. $F_\alpha>0$ で $f\equiv \mathrm{const.}$ なるための条件．

$\{\gamma_n\}$ を Koebe value α に対する Koebe arc 列とし $S=\bigcup_n \gamma_n$，$\gamma=\lim_n \gamma_n$ とおく．α の近傍を V として $G=f^{-1}(V)$ とおけば

ある∇に対して，$F_S \cap \Delta_1(G)$ の測度正ならば $f \equiv \alpha$ であるから，任意の∇に対して $F_S \cap \Delta_1(G)$ の測度0の場合を考える．nが十分大なるとき，γ_nはGの1つの連結成分G_iに含まれる．したがって $F_S \cap \Delta_1(G)$ の測度0とすれば，

$\overline{\forall} \zeta \in F_S$ と $\forall \Pi \in \mathcal{G}_\zeta$ に対して，

$\Pi \cap \gamma_n \neq \emptyset$ かつ

$\Pi \cap \partial G \neq \emptyset$，したがって $T(\zeta, \psi, b) \cap \partial G \neq \emptyset$.

こゝで MacLane-Barth [2, 6] に従って，D の有理型関数のクラス $\mathcal{L}$ をつぎのように導入する．

fをDの有理型関数とし，$L(\lambda) = \{z; |f(z)| = \lambda\}$ を f の level set for λ と呼ぶ．$L(\lambda)$ が ∂D 上点に終る とは，$L_r^i(\lambda)$ を $L_r(\lambda) = L(\lambda) \cap (r < |z| < 1)$ の連結成分，$\delta_r^i(\lambda)$ を $L_r^i(\lambda)$ の直径としたとき，$\sup_i \delta_r^i(\lambda) \to 0$ $(r \to 1)$ なるときをいう．

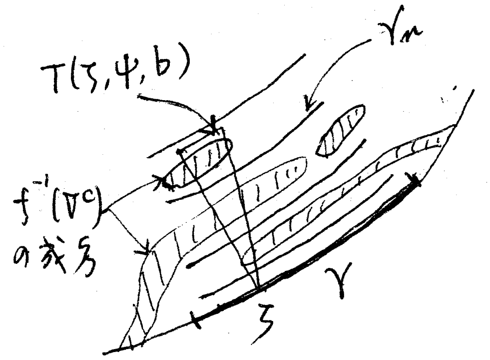
定理（[2] 参照）$f \in \mathcal{L}$ に対して 0 が Koebe value ならば，$f \equiv 0$ または $\overline{\mathbb{C}} - \{0\} \subset R(f, \zeta)$．ただし，$\zeta$は Koebe arc の任意の内点とする．

証明 $\nabla = \nabla(0)$ について $f^{-1}(\nabla^c)$ の成分を考えると，

(a)．non-compact なものについては，$f \in \mathcal{L}$ より，γの近傍で，γ上への射影が $\delta > 0$ 以上の長さをもつものは有限個，

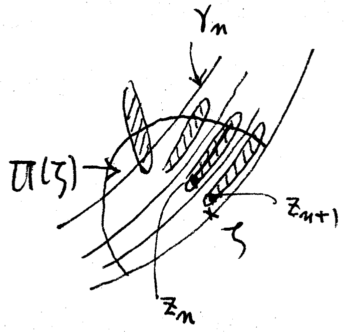
(b) compact なものはfの極を含み，γ の近傍に無数に

存在する．さもなくば，$\Delta_1(G)\cap E_\zeta$ は測度正となり，f は定数となる．



さらに，γ の内部 $(\gamma)^i$ の任意の点の近傍 $U(\zeta)$ は常に上記 compact components を無限個含む．

先ず，無限個と交わることを言う．有限個としか交わらないならば，十分小さい $U(\zeta)$ で考えれば，$\Delta_1(G)\cap E_\zeta$ は測度正となり，$f=$ 定数となって矛盾．故に無限個と交わる．



これらが $U(\zeta)$ に含まれないとすれば，各成分中に点 z_n をとり，点列 $\{z_n\}$ から ζ に収束するようにできる．また，z_n の属する成分と $\partial U(\zeta)$ との交わりに点 z_n' をとると，z_n と z_n' とを結ぶ弧で成分中に含まれるもの C_n をとることができる．弧列 $\{C_n\}$ の存在は $f\in\mathcal{A}$ に反する．故に $U(\zeta)$ と交わる compact component は有限個を除いて $U(\zeta)$ に含まれる．

これは $\forall\zeta\in(\gamma)^i$ に対して，$V^c\in R(f,\zeta)$ を示す．V は任意だったから $\mathbb{C}-\{0\}\subset R(f,\zeta)$ である．

fが正則なときは，$f\in\mathcal{L}$ と，∂D 上稠密な集合の各点でfが漸近値をもつことが同値である([6])から，$f\in\mathcal{L}$ と $f-\alpha\in\mathcal{L}$ とは同値である．よってつぎの系を得る．

系 ([6]) クラス $\mathcal{L}$ の正則関数は有限な Koebe value を持たない．

3. 有理型関数の集積値

fをDにおける有理型関数とし，$C(f,\zeta)$ をfの $\zeta\in\partial D$ における (full) cluster set とする．$C(f,\zeta)$ をつぎのように分解することができる．

$S_1=\{\alpha\in C(f,\zeta);\ {}^\forall U(\zeta)\ {}^\exists V(\alpha)\ni{}^\exists f^{-1}(V)$ の成分 $G\subset\overline{U}\}$

$S_2=C(f,\zeta)-S_1=\{\alpha\in C(f,\zeta);\ {}^\exists U_0(\zeta)\ni{}^\forall V(\alpha)$

${}^\forall f^{-1}(V)$ の成分 $\not\subset U_0\}$

S_1 をさらにつぎのように分解する．

$S_1'=\{\alpha\in S_1;\ S_1$ の定義における G はすべてクラス $SO_{HB}\}$

$S_1''=\{\alpha\in S_1;\ S_1$ の定義における G で $\notin SO_{HB}$ なるものが存在する$\}$．

このとき，S_1' は容量0の集合を除いて range of values $R(f,\zeta)$ に含まれ，除外集合は漸近値である．また $\alpha\in S_1''$ の任意の近傍Vには，ζ の近傍の測度正の集合 $\subset\partial D$ における f の fine limits の集合が常に容量正だけ含まれる．これは α が f の fine boundary function f^* の essential closed range $C^*(f,\zeta)$ に含まれることを意味し，§1で述べた事実により，$S_1'' \subset C^*(f,\zeta) \subset C(f,\check{S}_\zeta)$ である．ただし $\check{S}_\zeta$ は ζ 上の fiber に含まれる Šilov 境界の部分である．

$\alpha \in S_2$ に対しては，$z_n \in f^{-1}(V_n)$，$z_n \to \zeta$ かつ $f(z_n) \to \alpha$ なる点列が存在し，z_n と ∂U_0 とを結ぶ弧 γ_n を $f^{-1}(V_n)$ 内にとることができる．$f(z)|_{\gamma_n} \longrightarrow \alpha$ $(n \to \infty)$ であるから γ_n は ∂D 上の弧 γ に収束する．すなわち α は Koebe value である．リーマン面では，γ が Martin 境界上調和測度0の連続体に退化する可能性がある．以上をまとめると，

定理 $C_B^*(f,\zeta)$ を ζ における essential fine boundary cluster set とすると，Capacity 0 の集合を除いて

$$C(f,\zeta) - C_B^*(f,\zeta) \subset R(f,\zeta).$$

さらに

$$C(f,\zeta) - C_B^*(f,\zeta) = R(f,\zeta) \cup \chi(f,\zeta),$$

ここに $\chi(f,\zeta)$ は ζ の任意の近傍内に漸近道をもつ漸近値の集合である．

参考文献

[1] Bagemihl,F. and Seidel,W.; Koebe arcs and Fatou points of normal functions. Comm. Math. Helv. 39 (1961).

[2] Barth,K.F.; Asymptotic values of meromorphic functions. The Michigan Math. J. 13 (1966)

[3] Collingwood,E.F.; and Cartwright,M.I.; Boundary theorems for functions meromorphic in the unit circle. Acta Math. 87 (1952).

[4] Constantinescu,C. und Cornea,A.; Ideale Rander Riemannscher Flachen. Springer (1963).

[5] Gamelin,T.W.; Lectures on H (D). Univ. Nac. De La Plata. (1972).

[6] MacLane,G.R.; Asymptotic values of holomorphic functions. Rice Univ. Studies 49 (1963).